Задача 1. Пусть $u(t, x)$ — ограниченное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (1,38) в полуплоскости $t > 0$. Докажите, что для любого x справедливо равенство

$$\lim_{t \to \infty} u(t, x) = \frac{a+b}{2},$$

если $\lim\limits_{x \to -\infty} u(0, x) = a$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} u(0, x) = b$.

Задача 2. Докажите, что задача Коши для уравнения теплопроводности (1,38) с начальным условием, заданным при $t = 0$, поставлена некорректно в любой полосе $\{-T < t < 0, \ -\infty < x < \infty\}$.

§ 41. Обзор некоторых дальнейших исследований уравнений параболического типа

1. Доказаны существование и единственность решений первой краевой задачи для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \qquad (1,41)$$

при любом n. Эта задача в простейшем случае формулируется следующим образом.

Ищется непрерывная функция $u(t, x_1, \ldots, x_n)$, определенная на замыкании области G, ограниченной кусками гиперплоскостей $t = 0$ и $t = T$ («снизу» и «сверху»), а по бокам одной или несколькими поверхностями с непрерывно вращающейся касательной гиперплоскостью, которая нигде не перпендикулярна оси Ot. Функция u должна удовлетворять уравнению (1,41) внутри G и совпадать с некоторой функцией f, заданной на боковой поверхности S и на нижнем основании $t=0$. Эта функция предполагается непрерывной на всем том замкнутом множестве, где она определена. Единственность решения задачи и непрерывная зависимость решения от функции f доказываются в точности так же, как это делалось в § 38.

Первую краевую задачу можно ставить и для областей более общего вида. Найдены условия, которым должна удовлетворять граница области для того, чтобы первая краевая задача была разрешима *).

2. Линейное параболическое уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A(t,\ x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(t,\ x)\frac{\partial u}{\partial x}+C(t,\ x)u+D(t,\ x), \qquad (2{,}41)$$

где A, B, C, D — ограниченные функции и $A(t,\ x)\geqslant\alpha>0$, заменой $u=ve^{Kt}$ преобразуется к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t}=A(t,\ x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+B(t,\ x)\frac{\partial v}{\partial x}+C_1(t,\ x)v+D_1(t,\ x). \qquad (3{,}41)$$

Здесь $C_1=C-K$, $D_1=De^{-Kt}$. Предположим, что $K>M_1\equiv\sup|C(t,\ x)|$; тогда $C_1(t,\ x)\leqslant M_1-K<0$.

Пусть функция $v(t,\ x)$ удовлетворяет уравнению (3,41) внутри криволинейного четырехугольника G, ограниченного отрезками прямых $t=0$, $t=T$ и кривыми $x=\varphi_1(t)$, $x=\varphi_2(t)$ $(\varphi_1(t)<\varphi_2(t))$, и совпадает с некоторой непрерывной функцией f на нижнем основании и боковых сторонах G. Тогда всюду в G имеет место неравенство

$$|v(t,\ x)|\leqslant\max\left\{M,\ \frac{M_2}{K-M_1}\right\}, \qquad (4{,}41)$$

где $M=\max|f|$, $M_2=\sup|D(t,\ x)|$.

Действительно, если $v(t,\ x)$ принимает наибольшее положительное значение в некоторой точке, лежащей на верхнем основании или внутри G, то в этой точке $\frac{\partial v}{\partial t}\geqslant 0$, $\frac{\partial v}{\partial x}=0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\leqslant 0$, $C_1v<0$. Из уравнения (3,41) получаем, что в этом случае $\max v(t,\ x)\leqslant\frac{M_2}{K-M_1}$. Если же v принимает наибольшее значение на нижнем основании или боковой стороне G, то $v\leqslant M$ всюду в G. Таким образом, $v\leqslant\max\left\{M,\ \frac{M_2}{K-M_1}\right\}$. Аналогично устанавливается, что $v\geqslant-\max\left\{M,\ \frac{M_2}{K-M_1}\right\}$.

---

*) И. Г. Петровский, Compositio Mathematica 1:3 (1935), 383—419.

Для функции $u = ve^{Kt}$, удовлетворяющей внутри G уравнению (3,41), из (4,41) получаем неравенство

$$|u(t, x)| \leqslant \max\left\{Me^{KT}, \frac{M_2e^{KT}}{K - M_1}\right\},$$

которое является обобщением теоремы о максимуме и минимуме (ср. § 38).

Аналогичное неравенство справедливо для решений $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i, j=1}^{n} A_{ij}(t, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(t, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \\ + C(t, x_1, \ldots, x_n) u + D(t, x_1, \ldots, x_n), \quad (5,41)$$

где форма $\sum\limits_{i, j=1}^{n} A_{ij}(t, x_1, \ldots, x_n)\alpha_i\alpha_j$ является положительно определенной во всех точках рассматриваемой области.

3. Первая краевая задача для параболического уравнения (5,41) в области G, ограниченной кусками гиперплоскостей $t = 0$, $t = T$ и поверхностью S, имеет единственное решение при любой непрерывной функции f, заданной на S и при $t = 0$, если: 1) коэффициенты A_{ij}, B_i, C и D удовлетворяют условию Гёльдера *) в области $\bar{G}$; 2) каждой точки P поверхности S можно коснуться шаром с центром Q, все точки которого, кроме P, лежит вне $\bar{G}$, причем прямая QP не параллельна оси Ot **).

4. Для квазилинейного параболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(t, x, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x} + C(t, x, u),$$

где A, B, C имеют непрерывные производные достаточно высоких порядков, $A(t, x, u) \geqslant \alpha > 0$ и $C'_u(t, x, u) < c$ (α и c — некоторые постоянные), доказаны существование и единственность решения первой краевой задачи в любом прямоугольнике $\{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant l\}$, а также существование и единственность ограниченного решения задачи Коши

---

*) См. сноску на стр. 327.

**) Friedman, Journal of Mathematics and Mechanics, 7, № 5 (1958), 771—791.

в любой полосе $\{0 \leqslant t \leqslant T,\ -\infty < x < \infty\}$. Эти задачи рассматривались также для квазилинейных параболических уравнений с бо́льшим числом независимых переменных *).

5. Система линейных уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{0 \leqslant k_1 + \ldots + k_n \leqslant 2m} A_{ij}^{(k_1 \ldots k_n)}(t, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + \\ + F_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, N) \qquad (6,41)$$

называется параболической в точке $(t^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, если при любых действительных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, сумма квадратов которых равна 1, все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ определителя

$$\left| \sum_{k_1 + \ldots + k_n = 2m} (-1)^m A_{ij}^{(k_1 \ldots k_n)}\, t^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\ \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} - \lambda \delta_{ij} \right|$$

имеют отрицательные действительные части.

Для параболических систем корректно поставлена задача Коши для положительных t в классе ограниченных функций с достаточно гладкими начальными данными при $t = 0$. Корректность сохраняется также в классе функций, возрастающих при $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \to \infty$ не быстрее, чем $e^{c\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)^{\frac{m}{2m-1}}}$, где $2m$ — порядок системы.

Если все коэффициенты $A_{ij}^{(k_1 \ldots k_n)}$ и F_i параболической системы (6,41) аналитичны по аргументам $x_1, \ldots, x_n$, то все достаточно гладкие решения этой системы также аналитичны по $x_1, \ldots, x_n$ **).

*) См. «Математика в СССР за сорок лет», том I, Физматгиз, 1959, стр. 604—628.

**) См. предыдущую сноску.