ДОПОЛНЕНИЕ

§ 42. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом сеток

1. Мы докажем существование решения первой краевой задачи для уравнения (1,38) методом сеток. Это доказательство будет заключать в себе также и способ построения приближенного решения задачи.

Будем обозначать через G область, ограниченную отрезками прямых $t=t_0$ и $t=T$ $(T>t_0)$ и кривыми $x=\varphi_1(t)$ и $x=\varphi_2(t)$. Функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ предполагаются непрерывными и $\varphi_1(t)<\varphi_2(t)$ при $t_0\leqslant t\leqslant T$. Через Γ будем обозначать нижнее основание $(t=t_0)$ и боковые стороны $(x=\varphi_1(t)$, $x=\varphi_2(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T)$ криволинейного четырехугольника G. Мы ищем в G решение уравнения (1,38), непрерывное в области G и на ее границе и принимающее на Γ значения заданной непрерывной функции f. Для разрешимости первой краевой задачи функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям, которые мы укажем в дальнейшем.

На плоскости (t, x), где расположена область G, проведем два семейства (сетку) прямых, параллельных координатным осям:

$$x=mh, \quad t=t_0+kh,$$

где h — некоторое положительное число, а m и k пробегают такие последовательные целые значения, чтобы вся область G покрылась квадратами со стороной h. Вершины этих квадратов мы будем называть узлами или узловыми точками построенной сетки.

Обозначим через $\overline{G}_h$ совокупность тех квадратов, которые целиком принадлежат $G+\Gamma$. Через Γ_h обозначим квадраты, принадлежащие $\overline{G}_h$, у которых хотя бы одна вершина принадлежит границе $\overline{G}_h$, исключая внутренние квадраты самого верхнего ряда, т. е. исключая квадраты, хотя бы одна из вершин которых имеет максимальную для точек $\overline{G}_h$ координату t и боковые стороны которых не принадлежат границе $\overline{G}_h$. Узловые точки, принадлежащие $\overline{G}_h - \Gamma_h$, обозначим через G_h (рис. 19).

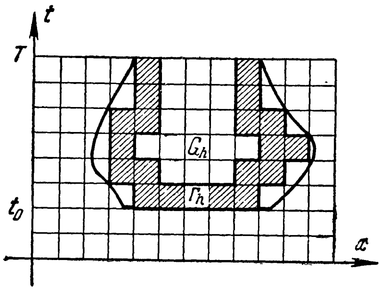

Рис. 19.

Определим в каждом узле Γ_h функцию f_h, равную значению функции f в ближайшей к этому узлу точке Γ или в одной из них, если таких точек несколько. Сопоставим уравнению (1,38) следующее разностное уравнение*):

$$\frac{u(t, x) - u(t-h, x)}{h} = \frac{u(t, x+h) - 2u(t, x) + u(t, x-h)}{h^2}. \quad (1,42)$$

Будем искать функцию u_h, определенную в узловых точках $\overline{G}_h$, удовлетворяющую уравнению (1,42) в узлах (t, x) из G_h и совпадающую с f_h в узловых точках Γ_h. Покажем, что существует единственная функция u_h, удовлетворяющая этим условиям.

2. Лемма. *Функция u_h, определенная в узлах $\overline{G}_h$ и удовлетворяющая уравнению* (1,42) *в узловых точках* (t, x) *из G_h, принимает наибольшее и наименьшее значения в узловых точках Γ_h.*

Доказательство. Предположим, что функция u_h принимает в некоторых узлах G_h значения, большие, чем наибольшее значение u_h в узловых точках Γ_h. В этом случае найдется такая узловая точка (t_1, x_1) в G_h, что в этой точке u_h принимает наибольшее значение, и хотя бы в одной из соседних точек значение u_h меньше $u_h(t_1, x_1)$. Соседними

*) Если функция $u(t, x)$ имеет производные $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в точке (t, x), то при стремлении h к нулю уравнение (1,42) переходит в уравнение (1,38).

к (t_1, x_1) мы называем узловые точки $(t_1 - h, x_1)$, $(t_1, x_1 + h)$, $(t_1, x_1 - h)$. Если $u_h(t_1 - h, x_1) < u_h(t_1, x_1)$, то в точке (t_1, x_1) левая часть равенства (1,42) положительна, а правая — отрицательна или равна нулю, и мы приходим к противоречию с тем, что в точке (t_1, x_1) должно удовлетворяться уравнение (1,42). Точно так же придем к противоречию, если предположим, что $u_h(t_1, x_1 + h) < u_h(t_1, x_1)$ или $u_h(t_1, x_1 - h) < < u_h(t_1, x_1)$. Аналогично доказывается, что u_h не может принимать в G_h значений, меньших, чем наименьшее значение u_h на Γ_h.

Пользуясь только что доказанной леммой, покажем, что при любой функции f_h, заданной в узлах Γ_h, существует единственная функция u_h, удовлетворяющая уравнению (1,42) в узловых точках G_h и совпадающая с f_h на Γ_h. Значения u_h в узловых точках G_h удовлетворяют линейной алгебраической системе уравнений, которую мы получим, написав уравнение (1,42) для каждой узловой точки (t, x) из G_h. Число уравнений такой системы будет равно числу неизвестных значений u_h. Определитель этой системы отличен от нуля, так как соответствующая однородная система, которую мы получим, положив $f_h = 0$ во всех узловых точках Γ_h, имеет только тривиальное решение вследствие доказанной леммы. Следовательно функция u_h определяется единственным образом.

3. Введем следующие обозначения:

$$u_{\bar{t}} = \frac{u(t, x) - u(t - h, x)}{h}, \quad u_x = \frac{u(t, x + h) - u(t, x)}{h},$$

$$u_{\bar{x}} = \frac{u(t, x) - u(t, x - h)}{h}.$$

В этих обозначениях уравнение (1,42) принимает вид

$$u_{\bar{t}} = u_{x\bar{x}}. \tag{2,42}$$

Пусть $h_n = \frac{1}{2^n}$ и $u_{h_n} = u^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Доказательство существования решения первой краевой задачи мы будем проводить следующим образом. Мы покажем сначала, что каждую из функций семейств $\{u^n\}$, $\{\overset{n}{u}_{\bar{t}}\}$, $\{\overset{n}{u}_{x\bar{x}}\}$, заданных на сетках, можно доопределить во всех точках области G так, что в любой области G^*, содержащейся в G вместе со своей границей, семейства функций $\{u^n\}$, $\{\overset{n}{u}_{\bar{t}}\}$ и $\{\overset{n}{u}_{x\bar{x}}\}$ будут равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Затем, используя теорему Арцеля *), покажем, что из последовательности $\{u^n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{u^{\bar{n}}\}$, сходящуюся в G к некоторой функции $u(t, x)$ равномерно во всякой области G^*, содержащейся в G вместе со своей границей. При этом последовательность $\{u_{\bar{t}}^{\bar{n}}\}$ сходится к $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\{u^{\bar{n}}_{x\bar{x}}\}$ сходится к $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Переходя в уравнении (2,42) к пределу при $h_n \to 0$, получим, что предельная функция $u(t, x)$ удовлетворяет в G уравнению (1,38).

Наконец, с помощью барьеров, аналогично тому, как это было сделано в § 31, мы покажем, что предельная функция $u(t, x)$ непрерывна в $G + \Gamma$ и принимает на Γ значения заданной непрерывной функции f. Используя единственность решения первой краевой задачи, покажем, что не только подпоследовательность $\{u^{\bar{n}}\}$, но и вся последовательность $\{u^n\}$ сходится к $u(t, x)$ и, следовательно, решения u_{h_n} уравнения (1,42) представляют решение соответствующей первой краевой задачи с любой заданной точностью, если только h_n достаточно мало.

4. Из леммы п. 2 следует, что $|u^n| \leqslant \max |f|$ при любом n. Покажем, что из равномерной ограниченности семейства $\{u^n\}$ в G следует равномерная ограниченность семейства $\{u_x^n\}$ во всякой области G^*, содержащейся вместе со своей границей в G.

При этом нам достаточно показать справедливость этого утверждения для прямоугольника Q со сторонами, параллельными координатным осям, так как любую область G^* можно покрыть конечным числом таких прямоугольников, принадлежащих G.

Для оценки u_x^n в Q мы воспользуемся приемом, который С. Н. Бернштейн применял для оценки производных решения параболического уравнения **).

Не ограничивая общности, можно считать, что прямоугольник Q определяется неравенствами

$$|x| \leqslant a, \quad 0 \leqslant t \leqslant b$$

и его стороны принадлежат сетке, начиная с достаточно

*) И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1952, стр. 40.

**) С. Н. Бернштейн, ДАН СССР, 18, № 7 (1938), стр. 385—388.

большого n. В последующих выкладках этого пункта для упрощения записи индекс n у функции u^n мы опускаем.

Рассмотрим в узловых точках прямоугольника Q функцию

$$z = u_x^2 F + Cv, \qquad (3,42)$$

где $F = t(a^2 - x^2)^2$, $v = u^2(t, x+h) + u^2(t, x-h) + u^2(t-h, x)$, $C > 0$ — некоторая постоянная. Покажем, что если C достаточно велико, то $z(t, x)$ принимает наибольшее значение либо при $t = 0$, либо на сторонах $x = \pm a$ прямоугольника Q. Отсюда легко получить оценку для $u_x(t, x)$. Действительно, если $|u(t, x)| \leqslant M$ в G, то на сторонах $t = 0$ и $x = \pm a$ прямоугольника Q $z \leqslant 3CM^2$ и, следовательно, всюду в Q $z \leqslant 3CM^2$, откуда

$$u_x^2 \leqslant \frac{3CM^2}{t(a^2 - x^2)^2},$$

т. е. u_x равномерно ограничены в прямоугольнике Q^*, лежащем внутри Q.

Чтобы показать, что $z(t, x)$ принимает при достаточно большом C наибольшее значение при $t = 0$ или $x = \pm a$, вычислим величину

$$L(z) \equiv z_{\overline{x}x} - z_{\overline{t}}.$$

Мы покажем, что при достаточно большом C

$$L(z) \geqslant 0 \text{ в } Q.$$

Отсюда с помощью тех же рассуждений, которыми мы доказали лемму п. 2, получим, что $z(t, x)$ принимает наибольшее значение на границе $t = 0$ или $x = \pm a$ прямоугольника Q.

Для вычисления $L(z)$ воспользуемся формулой

$$L(\varphi\psi) = \varphi L(\psi) + \psi L(\varphi) + h\varphi_{\overline{t}}\psi_{\overline{t}} + \varphi_x\psi_x + \varphi_{\overline{x}}\psi_{\overline{x}}, \qquad (4,42)$$

справедливость которой легко установить для любых функций φ и ψ, заданных на сетках. Имеем

$$L(z) = u_x^2 L(F) + FL(u_x^2) + hF_{\overline{t}}(u_x^2)_{\overline{t}} + F_x(u_x^2)_x + F_{\overline{x}}(u_x^2)_{\overline{x}} + CL(v).$$

Используя (4,42), получим

$$L(u_x^2) = 2u_x L(u_x) + h(u_{x\bar{t}})^2 + u_{xx}^2 + u_{x\bar{x}}^2 = u_{xx}^2 + u_{x\bar{x}}^2 + hu_{x\bar{t}}^2,$$

так как $L(u_x) = 0$.

Легко видеть, что

$$L(u^2(t, x+h)) = 2u(t, x+h)\, L(u(t, x+h)) + u_x^2(t, x+h) + u_{\bar{x}}^2(t, x+h) + hu_{\bar{t}}^2(t, x+h) =$$
$$= u_x^2(t, x+h) + u_{\bar{x}}^2(t, x+h) + hu_{\bar{t}}^2(t, x+h) =$$
$$= u_x^2(t, x+h) + u_x^2(t, x) + hu_{\bar{t}}^2(t, x+h),$$

$$(u_x^2)_x = [u_x + u_x(t, x+h)]\, u_{xx},$$
$$(u_x^2)_{\bar{x}} = [u_x + u_x(t, x-h)]\, u_{x\bar{x}},$$
$$h(u_x^2)_{\bar{t}} = u_x^2 - u_x^2(t-h, x).$$

Следовательно,

$$L(z) = C\,[u_x^2(t, x+h) + u_x^2(t, x) + hu_{\bar{t}}^2(t, x+h) + u_x^2(t, x-h) +$$
$$+ u_{\bar{x}}^2(t, x-h) + hu_{\bar{t}}^2(t, x-h) + u_x^2(t-h, x) + u_{\bar{x}}^2(t-h, x) +$$
$$+ hu_{\bar{t}}^2(t-h, x)] + u_x^2 L(F) + F_{\bar{t}}\,[u_x^2 - u_x^2(t-h, x)] +$$
$$+ F(u_{xx}^2 + u_{x\bar{x}}^2 + hu_{x\bar{t}}^2) + F_x\,[u_x + u_x(t, x+h)]\, u_{xx} +$$
$$+ F_{\bar{x}}\,[u_x + u_x(t, x-h)]\, u_{x\bar{x}}.$$

Оценим члены $Fu_{xx}^2 + F_x\,[u_x + u_x(t, x+h)]\, u_{xx}$. Так как $F_x = -2t(2x+h)(a^2 - x^2) + ht(2x+h)^2$, то

$$Fu_{xx}^2 + F_x\,[u_x + u_x(t, x+h)]\, u_{xx} =$$
$$= t\,\{(a^2 - x^2)\, u_{xx} - (2x+h)\,[u_x + u_x(t, x+h)]\}^2 -$$
$$- t(2x+h)^2\,[u_x + u_x(t, x+h)]^2 +$$
$$+ ht(2x+h)^2\,[u_x + u_x(t, x+h)]\, u_{xx} \geqslant$$
$$\geqslant -t(2x+h)^2\,[u_x + u_x(t, x+h)]^2 +$$
$$+ t(2x+h)^2\,[u_x^2(t, x+h) - u_x^2] =$$
$$= -t(2x+h)^2\,[2u_x^2 + 2u_x \cdot u_x(t, x+h)] \geqslant$$
$$\geqslant -t(2x+h)^2\,[3u_x^2 + u_x^2(t, x+h)].$$

Аналогично получим

$$Fu^2_{\bar{x}\bar{x}} + F_{\bar{x}} \left[u_x + u_x(t, x-h)\right] u_{\bar{x}\bar{x}} \geqslant$$
$$\geqslant -t(2x-h)^2 \left[3u_x^2 + u_x^2(t, x-h)\right].$$

Пользуясь последними неравенствами и тем, что $F > 0$, $F_{\bar{t}} > 0$, получаем

$$L(z) \geqslant C\left[u_x^2(t, x+h) + u_x^2(t, x) + u_x^2(t, x-h) + u_x^2(t-h, x)\right] +$$
$$+ L(F)\,u_x^2 - F_{\bar{t}}\,u_x^2(t-h, x) - t(2x+h)^2\left[3u_x^2 + u_x^2(t, x+h)\right] -$$
$$- t(2x-h)^2\left[3u_x^2 + u_x^2(t, x-h)\right] =$$
$$= \left[C - L(F) - 3t(2x+h)^2 - 3t(2x-h)^2\right] u_x^2 +$$
$$+ \left[C - t(2x+h)^2\right] u_x^2(t, x+h) + \left[C - t(2x-h)^2\right] u_x^2(t, x-h) +$$
$$+ \left[C - F_{\bar{t}}\right] u_x^2(t-h, x). \qquad (5{,}42)$$

Очевидно, что если C достаточно велико, то все слагаемые в правой части неравенства (5,42) будут неотрицательны. (Постоянную C можно выбрать независимо от h.) Таким образом, мы показали, что если решения $u^n(t, x)$ уравнения (2,42) равномерно ограничены в G, то $\overset{n}{u}_x$ также равномерно ограничены во всякой области G^*, лежащей вместе со своей границей внутри G. Так как $\overset{n}{u}_x$, $\overset{n}{u}_{x\bar{x}}$, $\overset{n}{u}_{x\bar{x}\bar{x}}$, являются также решениями уравнения (2,42), то из доказанного получаем равномерную ограниченность $\overset{n}{u}_{x\bar{x}} = \overset{n}{u}_{\bar{t}}$, $\overset{n}{u}_{x\bar{x}\bar{x}} = \overset{n}{u}_{\bar{t}x}$ и $\overset{n}{u}_{x\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = \overset{n}{u}_{\bar{t}\bar{t}}$ в любой области G^*, содержащейся в G вместе со своей границей.

5. Покажем теперь, что u^n можно так доопределить во всей области G, что полученное семейство $\{u^n\}$ будет равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в любой области G^*, содержащейся в G вместе со своей границей.

Для этого разобьем каждый квадрат сетки на два треугольника диагональю, параллельной прямой $t = x$. В каждом таком треугольнике положим u^n равной линейной функции, которая в вершинах треугольника принимает ранее определенные значения u^n. Легко видеть, что так построенная функция u^n непрерывна в $\bar{G}_{h_n}$, и внутри треугольника и на его сторонах не может принимать значений, больших или меньших, чем ее значения в вершинах треугольника. В точках G, не принадлежащих $\overline{G}_{h_n}$, функцию u^n доопределим произвольным образом, лишь бы она была непрерывной и ограниченной в G.

Из равномерной ограниченности u^n_x и $u^n_{\bar t}$ в G^* следует, что для узловых точек (t, x), принадлежащих G^*,

$$|u^n(t, x+h_n) - u^n(t, x)| \leqslant Kh_n$$

и

$$|u^n(t, x) - u^n(t-h_n, x)| \leqslant Kh_n,$$

где K не зависит от n.

Достаточно показать равностепенную непрерывность функций u^n внутри прямоугольника Q, принадлежащего G, со сторонами, параллельными координатным осям, так как любую область G^*, лежащую в G вместе со своей границей, можно покрыть конечным числом прямоугольников такого вида.

Для двух узловых точек (t_1, x_1) и (t_2, x_2) из Q имеем

$$|u^n(t_1, x_1) - u^n(t_2, x_2)| \leqslant 2K\sqrt{(t_1-t_2)^2+(x_1-x_2)^2}.$$

Пусть (t_1, x_1) и (t_2, x_2) — любые точки из Q, а (t_1^*, x_1^*) и (t_2^*, x_2^*) — узловые точки, ближайшие соответственно к (t_1, x_1) и (t_2, x_2). В силу определения функции u^n при n достаточно больших $|u^n(t_i^*, x_i^*) - u^n(t_i, x_i)| \leqslant 2Kh_n$ $(i=1, 2)$. Поэтому, если n достаточно велико,

$$\begin{aligned}|u^n(t_1, x_1) &- u^n(t_1, x_2)| \leqslant \\ &\leqslant |u^n(t_1^*, x_1^*) - u^n(t_1, x_1)| + |u^n(t_2^*, x_2^*) - u^n(t_2, x_2)| + \\ &\qquad + |u^n(t_1^*, x_1^*) - u^n(t_2^*, x_2^*)| \leqslant \\ &\leqslant 4Kh_n + 2K\sqrt{(t_1^*-t_2^*)^2+(x_1^*-x_2^*)^2}. \qquad (6,42)\end{aligned}$$

Из неравенства (6,42) и равномерной непрерывности каждой из функций u^n в G^* следует равностепенная непрерывность функций u^n в Q и, следовательно, в G^*.

Применяя теорему Арцеля, получим, что из семейства функций u^n можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся в G^*.

Точно так же показываем, пользуясь доказанной ранее равномерной ограниченностью $u^n_{\bar t}$, $u^n_{\bar t x}$, $u^n_{\bar t \bar t}$ и u^n_x, $u^n_{x\bar x}$, $u^n_{x\bar t}$, что каждую из функций $u^n_{\bar t}$ и u^n_x можно доопределить во всей области G так, что семейства функций $\{u^n_{\bar{t}}\}$ и $\{u^n_x\}$ будут равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в G^*. Поэтому, пользуясь теоремой Арцеля, можно из любого бесконечного множества функций u^n выбрать равномерно сходящуюся в G^* подпоследовательность $\{u^{n'}\}$ такую, что соответствующие ей последовательности $\{u^{n'}_{\bar{t}}\}$ и $\{u^{n'}_x\}$ также сходятся равномерно в G^*.

Пусть последовательность областей G^*_m такова, что $G^*_m \subset G^*_{m+1}$, $\sum_{m=1}^{\infty} G^*_m = G$ и G^*_m вместе со своей границей принадлежит G. Выберем из $\{u^n\}$ равномерно сходящуюся в G^*_1 последовательность $u^{11}, u^{12}, \ldots, u^{1k}, \ldots$ такую, что последовательности $\{u^{1k}_{\bar{t}}\}$ и $\{u^{1k}_x\}$ также равномерно сходятся в G^*_1. Из последовательности $\{u^{1k}\}$ выберем равномерно сходящуюся в G^*_2 подпоследовательность

$$u^{21},\ u^{22}, \ldots, u^{2k}, \ldots \tag{7,42}$$

такую, что подпоследовательности $\{u^{2k}_{\bar{t}}\}$ и $\{u^{2k}_x\}$ равномерно сходятся в G^*_2, и т. д.

Рассмотрим последовательность функций

$$u^{11},\ u^{22}, \ldots, u^{kk}, \ldots \tag{8,42}$$

Легко видеть, что эта последовательность и последовательности $\{u^{kk}_{\bar{t}}\}$ и $\{u^{kk}_x\}$ сходятся в каждой точке области G и притом равномерно во всякой области G^*, которая вместе со своей границей принадлежит G. Обозначим пределы в G последовательностей $\{u^{kk}\}$, $\{u^{kk}_{\bar{t}}\}$ и $\{u^{kk}_x\}$ соответственно через $U(t, x)$, $\overline{U}(t, x)$ и $\overline{\overline{U}}(t, x)$.

Покажем, что

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \overline{U},\quad \frac{\partial U}{\partial x} = \overline{\overline{U}} \text{ и } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \overline{U}. \tag{9,42}$$

Пусть точки (t_1, x) и (t_2, x) являются узловыми точками сетки при достаточно малых h_n, $t_1 - t_2 = l_k h_{kk}$ и отрезок прямой, их соединяющий, принадлежит G. Тогда

$$u^{kk}(t_1, x) - u^{kk}(t_2, x) = \sum_{i=0}^{l_k-1} u_{\overline{t}}^{kk}(t_1 - ih_{kk}, x)\, h_{kk} =$$
$$= \sum_{i=0}^{l_k-1} \overline{U}(t_1 - ih_{kk}, x)\, h_{kk} + \varepsilon_k, \qquad (10,42)$$

где ε_k стремится к нулю при $k \to \infty$, так как последовательность $u_{\overline{t}}^{kk}$ равномерно сходится к $\overline{U}$. Переходя в равенстве (10,42) к пределу при $k \to \infty$, получим

$$U(t_1, x) - U(t_2, x) = \int_{t_2}^{t_1} \overline{U}\, dt. \qquad (11,42)$$

Так как узловые точки образуют всюду плотное множество в G и функции $U(t, x)$ и $\overline{U}(t, x)$ непрерывны в G, то равенство (11,42) справедливо для любых точек (t_1, x) и (t_2, x), если отрезок, их соединяющий, принадлежит G. Поэтому $\frac{\partial U}{\partial t} = \overline{U}$ всюду в G. Точно так же показываем, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \overline{\overline{U}} \text{ и } \frac{\partial U(t, x_1)}{\partial x} - \frac{\partial U(t, x_2)}{\partial x} = \int_{x_2}^{x_1} \overline{\overline{U}}\, dx,$$

если точки (t, x_1) и (t, x_2) принадлежат G, т. е. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \overline{\overline{U}}$ в G. Таким образом, мы показали, что предельная функция $U(t, x)$ имеет производные $\frac{\partial U}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ во всех точках области G.

6. Изучим теперь поведение предельных значений функции $U(t, x)$ на границе Γ области G.

Лемма 1. *Пусть точка A с координатами (t_0, x_0) лежит на нижнем основании $(t = t_0)$ криволинейного четырехугольника G. Тогда*

$$\lim_{(t,x) \to A,\ (t,x) \subset G} U(t, x) = f(A).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$w = (x - x_0)^2 + 3(t - t_0).$$

Во всех точках $G+\Gamma$, отличных от A, $w(t, x)>0$. Легко проверить, что

$$L(w)=w_{x\bar{x}}-w_{\bar{t}}<0.$$

Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное малое число. Обозначим через Ω_ε столь малую окрестность точки A, что $|f_h-f(A)|<\varepsilon$ для значений f_h во всех узловых точках Γ_h, принадлежащих Ω_ε, при достаточно малых h. Пусть постоянная C такова, что $Cw>2\max\limits_{\Gamma}|f|$ во всех точках $G+\Gamma$, не принадлежащих Ω_ε. Будем рассматривать функцию u^n только в узловых точках $\overline{G}_{h_n}$. Легко показать, что в узлах $\overline{G}_{h_n}$

$$f(A)-\varepsilon-Cw(t, x)\leqslant u^n(t, x)\leqslant f(A)+\varepsilon+Cw(t, x). \quad (12,42)$$

Действительно, функции

$$\varphi=f(A)-\varepsilon-Cw-u^n \text{ и } \psi=-f(A)-\varepsilon-Cw+u^n$$

неположительны во всех узловых точках Γ_{h_n} в силу определения Ω_ε и выбора постоянной C. Так как $L(\varphi)>0$ и $L(\psi)>0$, то функции φ и ψ принимают наибольшее значение на Γ_{h_n}. Следовательно, во всех узловых точках $\overline{G}_{h_n}$ функции φ и ψ неположительны и неравенства (12,42) имеют место во всех узлах, принадлежащих $\overline{G}_{h_n}$.

Если точка (t, x) является узловой точкой G_{h_n}, начиная с некоторого n, то, переходя к пределу в этой точке в неравенствах (12,42), получим

$$f(A)-\varepsilon-Cw\leqslant U(t, x)\leqslant f(A)+\varepsilon+Cw. \quad (13,42)$$

Так как множество точек, которые являются узловыми точками G_{h_n}, начиная с некоторого n, всюду плотно в G и функция $U(t, x)$ непрерывна в G, то неравенства (13,42) имеют место во всех точках G. Следовательно,

$$f(A)-\varepsilon\leqslant \varliminf_{(t, x)\to A} U(t, x)\leqslant \varlimsup_{(t, x)\to A} U(t, x)\leqslant f(A)+\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon>0$ произвольно, то $\lim\limits_{(t, x)\to A} U(t, x)=f(A)$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть точка A с координатами (t_1, x_1) лежит на боковой стороне криволинейного четырехугольника G. Тогда*

$$\lim_{(t, x) \to A,\ (t, x) \subset G} U(t, x) = f(A),$$

если существует функция $v_A(t, x)$ (барьер), обладающая следующими свойствами:

1. *$v_A(t, x)$ определена и непрерывна в тех точках пересечения $G + \Gamma$ с некоторой окрестностью A, для которых $t \leqslant t_1$. Будем обозначать множество точек, где определена v_A, через Ω_A.*

2. *$v_A(A) = 0$ и $v_A(t, x) > 0$ во всех точках Ω_A, отличных от A.*

3. *$L(v) \leqslant 0$ во всех узловых точках G_{h_n}, принадлежащих Ω_A, при достаточно больших n.*

Доказательство. Пусть точка A с координатами (t_1, x_1) лежит на кривой $x = \varphi_1(t)$. Выберем $\alpha > 0$ настолько малым, чтобы область D_α, ограниченная прямыми $t = t_1$, $t = t_1 - \alpha$, $x = x_1 + \alpha$ и кривой $x = \varphi_1(t)$, содержалась в Ω_A.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное малое число. Обозначим через Ω_ε столь малую окрестность точки A, что

$$|f_h - f(A)| < \varepsilon \tag{14,42}$$

для значений f_h во всех узловых точках Γ_h, принадлежащих Ω_ε, при достаточно малых h. Пусть постоянная C_1 такова, что $C_1 v_A > 2 \max\limits_{\Gamma} |f|$ во всех точках D_α, не принадлежащих Ω_ε. Как и в предыдущей лемме, получаем, что во всех узловых точках $\overline{G}_h$, принадлежащих D_α, при достаточно большом n

$$f(A) - \varepsilon - C_1 v_A \leqslant u^n \leqslant f(A) + \varepsilon + C_1 v_A. \tag{15,42}$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, с помощью тех же рассуждений, что и в лемме 1, получаем, что

$$\lim_{(t, x) \to A,\ t \leqslant t_1} U(t, x) = f(A). \tag{16,42}$$

Из неравенств (15,42) следует, что найдется такая окрестность Ω точки A, что во всех узловых точках $\overline{G}_{h_n}$, принадлежащих Ω,

$$|u^n(t, x) - f(A)| < 2\varepsilon, \tag{17,42}$$

если $t \leqslant t_1$. Можно считать, что Ω принадлежит Ω_ε.

Рассмотрим функцию $w=(x-x_1)^2+3(t-t_1)$. Пусть постоянная C_2 такова, что $C_2 w > 2\max\limits_{\Gamma}|f|$ во всех точках G, не принадлежащих Ω и расположенных выше прямой $t=t_1-\delta$, где $\delta>0$ и достаточно мало.

Как и в предыдущей лемме, легко установить, что во всех узловых точках G_{h_n}, расположенных выше прямой $t=t_1-h_n$, при достаточно малых h_n имеют место неравенства

$$f(A)-3\varepsilon-C_2 w \leqslant u^n \leqslant f(A)+3\varepsilon+C_2 w. \qquad (18{,}42)$$

Рассмотрим для этого узловые точки, для которых $t>t_1-h_n$. Обозначим их H_n. Докажем, что неравенство (18,42) выполняется в узловых точках H_n, принадлежащих Γ_n, и узлах H_n' самого нижнего ряда. Для узлов, лежащих вне Ω, эти неравенства выполняются при достаточно большом n в силу выбора C_2. Для узлов, принадлежащих Ω, эти неравенства выполняются в силу неравенств (14,42) и (17,42), если только в этих узлах $w>0$. Если же в рассматриваемой узловой точке из Ω функция $w<0$, то неравенства (18,42) выполняются при достаточно большом n в силу того, что $C_2 w > -\varepsilon$ при $t>t_1-h_n$, если h_n достаточно мало, и в силу неравенства (17,42).

Так как $L(w)<0$, то, как и в предыдущей лемме, устанавливаем, что неравенства (18,42) справедливы во всех без исключения точках H_n.

Из этих неравенств с помощью тех же рассуждений, что и в предыдущей лемме, получаем

$$\lim_{(t,\,x)\to A,\ t\geqslant t_1} U(t,x)=f(A). \qquad (19{,}42)$$

Из (16,42) и (19,42) следует утверждение леммы для точек A, расположенных на кривой $x=\varphi_1(t)$. Для точек A, принадлежащих кривой $x=\varphi_2(t)$, доказательство аналогично.

Теорема. *Первая краевая задача для уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

разрешима в области G, если граница Γ удовлетворяет следующим условиям:

1) *Для каждой точки (t_1, x_1), лежащей на кривой $x=\varphi_1(t)$, существует положительное число k_1 такое, что*

при $t < t_1$ *и достаточно малых* $t_1 - t$

$$\varphi_1(t) - \varphi_1(t_1) > k_1(t - t_1).$$

2) *Для каждой точки* (t_2, x_2), *лежащей на кривой* $x = \varphi_2(t)$, *существует положительное число* k_2 *такое, что при* $t < t_2$ *и достаточно малых* $t_2 - t$

$$\varphi_2(t) - \varphi_2(t_2) < -k_2(t - t_2).$$

(Условия 1 и 2, в частности, выполняются, если $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ удовлетворяют условию Липшица.)

Доказательство. Достаточно показать, что при этих условиях функция, равная $f(A)$ на Γ и $U(t, x)$ в G, непрерывна в $G+\Gamma$.

Согласно леммам 1 и 2 указанная функция будет непрерывной в $G+\Gamma$, если для каждой точки A кривых $x = \varphi_1(t)$ и $x = \varphi_2(t)$ существует функция v_A (барьер). Если точка A с координатами (t_1, x_1) лежит на кривой $x = \varphi_1(t)$, то барьером может служить функция

$$v_A(t, x) = \frac{1}{[(x_1 - x')^2 + (t_1 - t')^2]^N} - \frac{1}{[(x - x')^2 + (t - t')^{2N}]},$$

где $x' = x_1 - \frac{\rho}{\sqrt{1 + k_1^2}}$, $\qquad t' = t_1 + \frac{k_1\rho}{\sqrt{1 + k_1^2}}$, $\quad \rho > 0$

достаточно мало, а $N > 0$ достаточно велико. В точке (t_2, x_2) кривой $x = \varphi_2(t)$ барьером может служить функция

$$v_A(t, x) = \frac{1}{[(x_2 - x'')^2 + (t_2 - t'')^2]^N} - \frac{1}{[(x - x'')^2 + (t - t'')^2]^N},$$

$$\text{где } x'' = x_2 + \frac{\rho}{\sqrt{1 + k_2^2}}, \qquad t'' = t_2 + \frac{k_2\rho}{\sqrt{1 + k_2^2}}.$$

Выполнение условий 1 и 2 леммы 2 для функций v_A очевидно. Чтобы проверить выполнение условия 3, нужно воспользоваться формулой Тэйлора в точке (t, x) и тем, что $\frac{\partial^2 v_A}{\partial x^2} - \frac{\partial v_A}{\partial t} < 0$ в достаточно малой окрестности точки A, если N выбрано достаточно большим.

7. Мы показали, что из любого бесконечного множества функций u^n можно выбрать последовательность, сходящуюся в области G к решению первой краевой задачи, если граница области G удовлетворяет условиям, сформулированным в предыдущей теореме. Легко показать теперь, что и вся последовательность $\{u^n\}$ также сходится в области G к решению $U(t, x)$ первой краевой задачи.

Действительно, в противном случае найдутся бесконечное множество функций u^n, точка $(\bar{t}, \bar{x})$ из G и $\varepsilon > 0$ такие, что для каждой функции u^n из этого множества

$$|u^n(\bar{t}, \bar{x}) - U(\bar{t}, \bar{x})| > \varepsilon.$$

Это противоречит тому, что из всякого бесконечного множества функций u^n можно выбрать последовательность, сходящуюся в G к решению первой краевой задачи, которое, как было показано, единственно.

Замечания. 1. Все построения настоящего параграфа применимы также и в случае уравнения теплопроводности с любым числом независимых переменных.

2. Методом сеток, аналогично тому, как это изложено в настоящем параграфе, можно доказать существование решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа *).

§ 43. Замечания о методе сеток

Метод сеток или, как его часто называют, метод конечных разностей, является наиболее распространенным методом приближенного решения дифференциальных уравнений с частными производными. Особенно большое развитие этот метод получил в последние годы в связи с применением для численных расчетов быстродействующих электронных счетных машин.

Некоторые примеры применения метода сеток мы уже приводили. В § 10 было дано краткое описание конечно-разностного метода приближенного решения задачи Коши для гиперболических систем. В § 16 было указано на применение метода сеток к численному решению задачи Коши для волнового уравнения. В § 36 мы применили метод сеток для приближенного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

---

*) И. Г. Петровский, Успехи матем. наук VIII (1941), 161—170.