

в области G к решению первой краевой задачи, если граница области G удовлетворяет условиям, сформулированным в предыдущей теореме. Легко показать теперь, что и вся последовательность $\{u^n\}$ также сходится в области G к решению $U(t, x)$ первой краевой задачи.

Действительно, в противном случае найдутся бесконечное множество функций u^n , точка (\bar{t}, \bar{x}) из G и $\varepsilon > 0$ такие, что для каждой функции u^n из этого множества

$$|u^n(\bar{t}, \bar{x}) - U(\bar{t}, \bar{x})| > \varepsilon.$$

Это противоречит тому, что из всякого бесконечного множества функций u^n можно выбрать последовательность, сходящуюся в G к решению первой краевой задачи, которое, как было показано, единственno.

З а м е ч а н и я. 1. Все построения настоящего параграфа применимы также и в случае уравнения теплопроводности с любым числом независимых переменных.

2. Методом сеток, аналогично тому, как это изложено в настоящем параграфе, можно доказать существование решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа *).

§ 43. Замечания о методе сеток

Метод сеток или, как его часто называют, метод конечных разностей, является наиболее распространенным методом приближенного решения дифференциальных уравнений с частными производными. Особенно большое развитие этот метод получил в последние годы в связи с применением для численных расчетов быстродействующих электронных счетных машин.

Некоторые примеры применения метода сеток мы уже приводили. В § 10 было дано краткое описание конечно-разностного метода приближенного решения задачи Коши для гиперболических систем. В § 16 было указано на применение метода сеток к численному решению задачи Коши для волнового уравнения. В § 36 мы применили метод сеток для приближенного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

*). И. Г. Петровский, Успехи матем. наук VIII (1941), 161—170.

Метод сеток имеет не только прикладное, но и теоретическое значение. С помощью метода сеток можно доказывать существование решения различных краевых задач, а также исследовать свойства решений. Таким путем в предыдущем параграфе было доказано существование решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

В этом параграфе мы изложим некоторые основные понятия, связанные с методом сеток. Ради простоты изложения мы рассмотрим только случай двух независимых переменных (t, x) и ограничимся простыми краевыми задачами для линейных уравнений с частными производными. Мы будем рассматривать либо задачу Коши, либо задачу с начальными и граничными условиями.

1. Основная идея метода сеток заключается в том, что дифференциальное уравнение, начальные и граничные условия заменяются системой конечно-разностных (алгебраических) уравнений, приближенно представляющих данную краевую задачу.

Для этого в области G на плоскости (t, x) , в которой мы ищем решение, строится сетка, т. е. конечное или счетное множество точек, зависящее от одного или нескольких параметров. Точки, принадлежащие сетке, называются ее узлами. Наиболее часто пользуются прямоугольной сеткой. Узлы такой сетки имеют координаты $(t_0 + n\Delta t, x_0 + m\Delta x)$, где (t_0, x_0) — некоторая точка на плоскости (t, x) , а Δt и Δx — положительные параметры, называемые шагами сетки по t и по x соответственно; n и m принимают целочисленные значения. (Пример сетки, которая не является прямоугольной, был приведен в § 10 для случая, когда рассматривается гиперболическая система, состоящая из двух уравнений. Сетка в этом случае образуется из точек пересечения касательных к характеристикам.)

Будем считать, что область G , в которой требуется найти решение $u(t, x)$, является либо полосой $0 < t < T$, либо прямоугольником $0 < t < T, 0 < x < 1$. В обоих случаях мы будем пользоваться прямоугольной сеткой. В первом случае положим $t_0 = 0$. Во втором случае будем считать, что $t_0 = x_0 = 0$, а $\Delta x = \frac{1}{M}$, где M — целое положительное число.

Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$\tau = \Delta t, \quad h = \Delta x, \quad u_m^n = u(\pi \tau, mh).$$

Совокупность всех точек сетки с одним и тем же n будем называть слоем с номером n . Для простоты предположим, что τ зависит от h (при этом $\lim_{h \rightarrow 0} \tau = 0$), так что построенная нами прямоугольная сетка определяется одним параметром h .

Существуют различные способы построения конечно-разностных уравнений, приближенно представляющих дифференциальное уравнение с частными производными. Самый простой способ состоит в том, что каждая из частных производных, входящих в дифференциальное уравнение, заменяется такой линейной комбинацией значений $u(t, x)$ в узлах сетки, которая при $h \rightarrow 0$ стремится к соответствующей производной. Эту линейную комбинацию мы будем называть разностной аппроксимацией соответствующей производной.

Приведем примеры. Производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ можно заменить в точке $t = n\tau$, $x = mh$ любым из следующих выражений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(t, x + h) - u(t, x)}{h} = \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h}; \quad (1,43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(t, x) - u(t, x - h)}{h} = \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}; \quad (2,43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(t, x + h) - u(t, x - h)}{2h} = \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h}. \quad (3,43)$$

Оценим погрешности этих приближенных равенств. Пользуясь формулой Тэйлора, находим

$$\frac{u(t, x + h) - u(t, x)}{h} = \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(t, x + \theta_1 h)}{\partial x^2};$$

$$\frac{u(t, x) - u(t, x - h)}{h} = \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(t, x - \theta_2 h)}{\partial x^2};$$

$$\frac{u(t, x + h) - u(t, x - h)}{2h} = \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u(t, x + \theta_3 h)}{\partial x^3};$$

здесь $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$, $|\theta_3| < 1$.

Разность между какой-либо производной и ее разностной аппроксимацией называется погрешностью аппроксимации, или остаточным членом. Если погрешность аппроксимации для некоторой функции есть $O(h^k)$, то говорят, что порядок аппроксимации для такой функции равен k .

Для функций, которые имеют ограниченные производные, входящие в остаточные члены, порядок аппроксимации приближенных формул (1,43), (2,43) равен единице, а порядок аппроксимации приближенной формулы (3,43) равен двум. Можно построить приближенные формулы для $\frac{\partial u}{\partial x}$ со сколь угодно высоким порядком аппроксимации; эти формулы имеют более сложный вид, так как они содержат значения функции $u(t, x)$ во многих соседних узлах сетки.

Разностные аппроксимации $\frac{\partial u}{\partial t}$ строятся аналогично. При замене разностными аппроксимациями производных высших порядков можно рассматривать производную высшего порядка как результат многократного дифференцирования $u(t, x)$ по t и по x и применять последовательно соответствующие разностные операции, заменяющие дифференцирование.

Так, например:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right) \approx \frac{\frac{\partial u(t, x+h)}{\partial x} - \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}}{h} \approx \\ &\approx \frac{1}{h} \left[\frac{u(t, x+h) - u(t, x)}{h} - \frac{u(t, x) - u(t, x-h)}{h} \right] = \\ &= \frac{u(t, x+h) - 2u(t, x) + u(t, x-h)}{h^2}. \end{aligned}$$

Мы получили приближенную формулу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(t, x+h) - 2u(t, x) + u(t, x-h)}{h^2}. \quad (4,43)$$

Погрешность аппроксимации для этой формулы имеет вид

$$\frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(t, x+0h)}{\partial x^4} = O(h^2), \text{ где } |\theta| < 1.$$

Запишем линейное дифференциальное уравнение, которое мы хотим заменить конечно-разностным уравнением, в виде

$$L(u) = f, \quad (5,43)$$

где $f = f(t, x)$ — известная функция, а $L(u)$ — линейная комбинация неизвестной функции $u(t, x)$ и ее частных производных. Выразив в узловой точке (t, x) производные, входящие в $L(u)$, через соответствующие конечно-разностные аппрок-

симации и остаточные члены, получим следующее равенство:

$$\bar{L}_h(u) = f + \alpha_h. \quad (6,43)$$

Здесь $\bar{L}_h(u)$ — некоторое конечно-разностное выражение, т. е. линейная комбинация значений u в узлах сетки; α_h — погрешность аппроксимации для дифференциального уравнения (5,43), определяемая равенством

$$\alpha_h = \bar{L}_h(u) - L(u). \quad (7,43)$$

Отбросив в правой части (6,43) погрешность аппроксимации α_h , получим приближенное конечно-разностное уравнение

$$\bar{L}_h(\bar{u}) = f. \quad (8,43)$$

(Здесь и в дальнейшем через \bar{u} обозначается решение конечно-разностного уравнения.)

Для построения приближенных конечно-разностных уравнений часто пользуются также методом неопределенных коэффициентов. По этому методу аппроксимируются не отдельные производные, входящие в дифференциальное уравнение (5,43), а вся его левая часть $L(u)$. Для этой цели составляют линейную комбинацию с неопределенными коэффициентами значений u в какой-нибудь совокупности узлов. Затем все эти значения u по формуле Тэйлора выражают через значения функции u и ее производных в одной и той же точке (t, x) , которая может и не принадлежать сетке. Получается выражение, линейное относительно функции $u(t, x)$ и ее производных. После этого неопределенные коэффициенты выбираются таким образом, чтобы полученное выражение отличалось от $L(u)$ в точке (t, x) лишь слагаемыми, стремящимися к нулю при $h \rightarrow 0$.

Рассмотрим пример. Аппроксимируем уравнение

$$L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (9,43)$$

с помощью значений u в узлах

$(n\tau, mh), (n\tau, (m+1)h), ((n+1)\tau, mh), ((n+1)\tau, (m+1)h)$.

Точку (t, x) поместим в центр прямоугольника, вершинами которого являются эти узлы. Для упрощения вычислений

перенесем начало координат в точку (t, x) . Положим

$$\begin{aligned}\bar{L}_h(u) = & au\left(-\frac{\tau}{2}, -\frac{h}{2}\right) + bu\left(-\frac{\tau}{2}, \frac{h}{2}\right) + \\ & + cu\left(\frac{\tau}{2}, \frac{h}{2}\right) + du\left(\frac{\tau}{2}, -\frac{h}{2}\right),\end{aligned}$$

где a, b, c, d — неопределенные коэффициенты.

По формуле Тейлора имеем

$$\begin{aligned}\bar{L}_h(u) = & \\ = & (a+b+c+d)u(0,0) + \frac{\tau}{2}(-a-b+c+d)\frac{\partial u}{\partial t}(0,0) + \\ + & \frac{h}{2}(-a+b+c-d)\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + \frac{\tau^2}{8}(a+b+c+d)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,0) + \\ + & \frac{\tau h}{4}(a-b+c-d)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(0,0) + \\ + & \frac{h^2}{8}(a+b+c+d)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) + \dots\end{aligned}$$

(многоточием обозначены члены более высокого порядка относительно τ и h). Сравнивая $\bar{L}_h(u)$ с $L(u)$ и приравнивая коэффициенты при соответствующих производных, получаем следующие три уравнения:

$$\begin{aligned}a+b+c+d=0; \quad -a-b+c+d=\frac{2}{\tau}; \\ -a+b+c-d=-\frac{2}{h}. \quad (10,43)\end{aligned}$$

Дополним уравнения (10,43) еще одним:

$$a-b+c-d=0, \quad (11,43)$$

и определим a, b, c, d как решение системы алгебраических уравнений (10,43), (11,43). Тогда выражение $\bar{L}_h(u)$ будет совпадать с $L(u)$ с точностью до членов, обозначенных многоточием и стремящихся к нулю при $h \rightarrow 0$.

Возвращаясь к первоначальной системе координат, получаем следующее разностное уравнение, приближенно представляющее уравнение (9,43):

$$\begin{aligned}\bar{L}_h(\bar{u}) = & \frac{(\bar{u}_{m+1}^{n+1} + \bar{u}_m^{n+1}) - (\bar{u}_{m+1}^n + \bar{u}_m^n)}{2\tau} - \\ - & \frac{(\bar{u}_{m+1}^n + \bar{u}_{m+1}^n) - (\bar{u}_{m+1}^n + \bar{u}_m^n)}{2h} = 0. \quad (12,43)\end{aligned}$$

Заметим, что к уравнению (12,43) можно было бы прийти и другим путем. Действительно, первый член в левой части этого уравнения можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} \right).$$

В этом выражении первое слагаемое с погрешностью $O(\tau^2)$ аппроксимирует значение $\frac{\partial u}{\partial t}$ в точке $\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau, (m+1)h \right)$; второе слагаемое с погрешностью этого же порядка по τ аппроксимирует $\frac{\partial u}{\partial t} \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau, mh \right)$. Легко проверить, что все выражение аппроксимирует $\frac{\partial u}{\partial t}$ в точке $\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau, \left(m + \frac{1}{2}\right)h \right)$ с погрешностью $O(\tau^2) + O(h^2)$.

Аналогично можно показать, что второй член в левой части (12,43) с той же погрешностью аппроксимирует $-\frac{\partial u}{\partial x}$ в той же точке $\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau, \left(m + \frac{1}{2}\right)h \right)$. Следовательно, левая часть (12,43) аппроксимирует левую часть (9,43) с погрешностью $O(\tau^2) + O(h^2)$.

Приведем примеры различных конечно-разностных аппроксимаций для левых частей некоторых дифференциальных уравнений с частными производными (в скобках указан порядок погрешности аппроксимации α_h относительно τ и h).

$$1) \quad L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad (13,43)$$

$$\bar{L}_h(u) \equiv \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} \quad (\alpha_h = O(\tau) + O(h)); \quad (14,43)$$

$$\bar{L}_h(u) \equiv \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} \quad (\alpha_h = O(\tau) + O(h)); \quad (15,43)$$

$$\bar{L}_h(u) \equiv \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n-1}}{2\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \quad (\alpha_h = O(\tau^2) + O(h^2)); \quad (16,43)$$

$$\bar{L}_h(u) \equiv \frac{(u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n) + (u_m^{n+1} - u_m^n)}{2\tau} - \frac{(u_{m+1}^n - u_{m+1}^{n+1}) + (u_{m+1}^n - u_m^n)}{2h} \quad (\alpha_h = O(\tau^2) + O(h^2)). \quad (17,43)$$

$$2) \quad L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad (18,43)$$

$$\bar{L}_h(u) \equiv \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} (\alpha_h = O(\tau) + O(h^2)); \quad (19,43)$$

$$\bar{L}_h(u) \equiv \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} (\alpha_h = O(\tau) + O(h^2)); \quad (20,43)$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_h(u) \equiv & \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{1}{2} \left[\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \right. \\ & \left. + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right] \quad (21,43) \end{aligned}$$

$(\alpha_h = O(\tau^2) + O(h^2));$

$$\begin{aligned} \bar{L}_h(u) \equiv & \frac{3}{2} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{u_m^n - u_{m-1}^{n-1}}{\tau} - \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} \\ & (\alpha_h = O(\tau^2) + O(h^2)); \quad (22,43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_h(u) \equiv & \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n-1}}{2\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \quad (23,43) \\ & (\alpha_h = O(\tau^2) + O(h^2)). \end{aligned}$$

$$3) \quad L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad (24,43)$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_h(u) \equiv & \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_{m-1}^{n-1}}{\tau^2} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \quad (25,43) \\ & (\alpha_h = O(\tau^2) + O(h^2)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_h(u) \equiv & \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_{m-1}^{n-1}}{\tau^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \right. \\ & \left. + \frac{u_{m+1}^{n-1} - 2u_m^{n-1} + u_{m-1}^{n-1}}{h^2} \right) \quad (\alpha_h = O(\tau^2) + O(h^2)). \quad (26,43) \end{aligned}$$

Все эти выражения могут быть получены из левых частей соответствующих дифференциальных уравнений либо путем замены производных по формулам вида (1,43) — (4,43) (и по аналогичным формулам для производных по t), либо методом неопределенных коэффициентов.

В рассмотренных выше примерах погрешность аппроксимации оценивалась по абсолютной величине. При этом мы предполагали, что решение дифференциального уравнения является настолько гладким, что допускает представление по формуле Тэйлора до членов нужного порядка, причем производные, входящие в остаточный член, ограничены. При меньшей гладкости решения погрешность аппроксимации может иметь меньший порядок.

Для того чтобы получить разностную краевую задачу, необходимо кроме дифференциального уравнения, заменить разностными уравнениями начальные и граничные условия. Если в начальные и граничные условия не входят производные решения, то при указанном выше выборе прямоугольной сетки заданные краевые условия непосредственно определяют значения искомой функции в соответствующих граничных узлах сетки. Если же краевые условия содержат производные искомой функции, то эти производные можно заменить разностными аппроксимациями, как это было показано выше. При этом получаются разностные краевые условия, аппроксимирующие с некоторой погрешностью краевые условия для дифференциального уравнения. Имеются и другие способы аппроксимации краевых условий.

Приведем пример. Пусть требуется заменить разностным уравнением граничное условие

$$l(u) \equiv A(t) u(t, 0) + B(t) \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = C(t).$$

Простейший способ состоит в замене $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0)$ выражением $\frac{u(t, h) - u(t, 0)}{h}$. При этом получим разностное граничное условие

$$\bar{l}_h(u) \equiv A(n\tau) \bar{u}_0^n + B(n\tau) \frac{\bar{u}_1^n - \bar{u}_0^n}{h} = C(n\tau).$$

Погрешность аппроксимации, т. е. разность $l(u) - \bar{l}_h(u)$, есть $O(h)$. Если заменить $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0)$ выражением $\frac{3u_0^n - 4u_1^n + u_2^n}{h}$, то получится более точная аппроксимация: $l(u) - \bar{l}_h(u) = O(h^2)$.

Запишем разностное уравнение, аппроксимирующее дифференциальное уравнение, а также разностные уравнения, аппроксимирующие начальные и граничные условия, и укажем, какую совокупность значений пробегают индексы m и n в этих уравнениях. Полученная система алгебраических уравнений называется *разностной схемой* соответствующей задачи для дифференциального уравнения с частными производными.

Разностные схемы для задач рассматриваемого нами типа различают по числу слоев, участвующих в разностном уравнении, которое аппроксимирует дифференциальное уравнение; соответственно говорят о схемах *двухслойных*, *трехслойных* и т. д. Двухслойные схемы получаются, например, с помощью разностных выражений (14,43), (15,43), (17,43), (19,43), (20,43), (21,43). Формулы (16,43), (22,43), (23,43), (25,43), (26,43) приводят к трехслойным схемам. При решении задачи с начальными условиями с помощью двухслойной схемы достаточно задать значения \bar{u} в узлах одного начального слоя ($n=0$). В случае трехслойной схемы необходимо задавать значения \bar{u} в узлах двух соседних начальных слоев ($n=0$ и $n=1$).

Если значения неизвестной функции на слое с номером $n+1$ непосредственно из разностных уравнений схемы выражаются через значения этой функции на предыдущих слоях, то разностная схема называется *явной*. Если же для определения \bar{u}_m^{n+1} приходится решать некоторую систему уравнений, то разностная схема называется *неявной*. К неявным схемам приводят формулы (17,43), (20,43), (21,43), (22,43), (26,43)*).

Введем некоторые обозначения. Начальные и граничные условия для уравнения $L(u)=f$ мы будем записывать в виде

$$l_i(u)=\varphi_i, \quad i=1, 2, \dots, p \quad (\text{начальные условия}); \quad (27,43)_1$$

$$l_i(u)=\varphi_i, \quad i=p+1, p+2, \dots, s \quad (\text{граничные условия}). \quad (27,43)_2$$

Здесь φ_i — известные функции, заданные на некоторых частях границы области G , а $l_i(u)$ — линейные комбинации искомого решения u и его частных производных. Начальные и гранич-

*.) Удобный метод решения систем уравнений, возникающих при использовании неявных разностных схем, изложен в книге: И. С. Березин и Н. П. Жидков, Методы вычислений, Физматгиз, 1959, т. II, гл. 10, § 6.

ные условия для разностной схемы будем записывать в виде

$$\bar{l}_{ih}(\bar{u}) = \varphi_{ih}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (\text{начальные условия}); \quad (28,43)_1$$

$$\bar{l}_{ih}(\bar{u}) = \varphi_{ih}, \quad i = p + 1, p + 2, \dots, s \quad (\text{границные условия}). \quad (28,43)_2$$

Значения приближенного решения в узлах сетки, т. е. величины \bar{u}_m^n , можно рассматривать как компоненты вектора в некотором линейном пространстве, размерность которого определяется числом узлов, входящих в сетку. Этот вектор мы будем обозначать через \bar{u}_h .

Правые части разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальное уравнение, и правые части разностных начальных и граничных условий также образуют некоторый вектор, который мы обозначим через F_h . Матрицу из коэффициентов системы уравнений, составляющих разностную схему, обозначим через R_h . В этих обозначениях разностная схема, т. е. совокупность уравнений (8,43), (28,43), может быть записана следующим образом:

$$R_h \bar{u}_h = F_h. \quad (29,43)$$

Погрешностью аппроксимации разностной схемы (29,43) для данного решения $u(t, x)$ краевой задачи (5,43), (27,43) называется разность $R_h u - F_h \equiv r_h$.

С точки зрения приложений основное значение имеет оценка разности $u - \bar{u}_h$ между точным и приближенным решениями. Эта разность определена только в узлах сетки. Для оценки r_h и $u - \bar{u}_h$ естественно воспользоваться понятием нормы в линейном пространстве. В оценках погрешности аппроксимации r_h , приведенных выше, фактически использовалась норма, определяемая для элемента $w = \{w_m^n\}$ по формуле

$$\|w\|_C = \sup_{n, m} |w_m^n|. \quad (30,43)$$

Приходится, однако, рассматривать и другие, так называемые «интегральные» нормы. Примеры таких норм приведены в п. 5. Подобные нормы употребляются, в частности, в случаях, когда погрешность аппроксимации не стремится к нулю по абсолютной величине при $h \rightarrow 0$ или даже неограниченно возрастает в отдельных точках, будучи малой в каком-либо «интегральном» смысле, например в среднем.

Для измерения разности $u - \bar{u}_h$ также можно пользоваться различными нормами.

Предположим, что введены некоторые нормы для r_h и для $u - \bar{u}_h$ (эти нормы, вообще говоря, не совпадают). Сформулируем два основных определения.

I. Разностная схема (29,43) аппроксимирует краевую задачу (5,43), (27,43) для данного решения $u(t, x)$ этой краевой задачи, если погрешность аппроксимации r_h стремится к нулю при $h \rightarrow 0$; если $r_h = O(h^k)$, то говорят, что порядок аппроксимации равен k .

II. Разностная схема (29,43) называется сходящейся для данного решения $u(t, x)$ краевой задачи (5,43), (27,43), если разность $u - \bar{u}_h$ стремится к нулю при $h \rightarrow 0$; если $u - \bar{u}_h = O(h^q)$, то говорят, что порядок сходимости равен q .

В этих определениях предполагается, что r_h и $u - \bar{u}_h$ стремятся к нулю по соответствующим нормам; в этом же смысле понимаются равенства $r_h = O(h^k)$ и $u - \bar{u}_h = O(h^q)$ (так, например, равенство $r_h = O(h^k)$ означает, что $\|r_h\| h^{-k} \leq C_1 = \text{const}$).

2. Простые примеры показывают, что не всякая аппроксимирующая разностная схема является сходящейся даже при сколь угодно большой гладкости точного решения.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad (31,43)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Допустим, что $\varphi(x)$ имеет ограниченную производную второго порядка. Тогда точное решение $u(t, x) = \varphi(x + t)$ этой задачи имеет ограниченные частные производные второго порядка. Поэтому разностная схема:

$$\left. \begin{aligned} \bar{L}_h(\bar{u}_h) &\equiv \frac{\bar{u}_m^{n+1} - \bar{u}_m^n}{\tau} - \frac{\bar{u}_m^n - \bar{u}_{m-1}^n}{h} = 0, \\ \bar{u}_m^0 &= \varphi(mh) \\ (n &= 0, 1, \dots, \lceil \frac{T}{\tau} \rceil - 1; m = 0, \pm 1, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (32,43)$$

аппроксимирует задачу (31,43) с погрешностью $O(\tau) + O(h)$ (в смысле нормы (30,43)).

Докажем, что разностная схема (32,43) не может быть сходящейся ни при каком соотношении между τ и h . Из уравнений (32,43) следует, что значение функции \bar{u}_h в узле $(t+\tau, x)$ определяется через ее значения в узлах $(t, x-h)$ и (t, x) . Рассмотрим некоторый узел (t_0, x_0) . Легко видеть, что значение $\bar{u}_h(t_0, x_0)$, найденное согласно (32,43), однозначно определяется через значения функции $\varphi(x)$ при $x \leq x_0$. С другой стороны, значение точного решения $u(t, x)$ в точке (t_0, x_0) равно $\varphi(x_0 + t_0)$, т. е. определяется значением $\varphi(x)$ при $x > x_0$.

Пусть $\varphi(x) \equiv 0$ при $x \leq x_0$ и $\varphi(x) > 0$ при $x > x_0$. Тогда $\bar{u}_h(t_0, x) = 0$ для всех $x \leq x_0$, однако $u(t_0, x) = \varphi(x + t_0) > 0$ для $x_0 - t_0 < x < \infty$. Таким образом, в области $\{x_0 - t < x < x_0, 0 < t < \infty\}$ разность $u - \bar{u}_h$ между точным решением задачи Коши (31,43) и решением разностных уравнений (32,43) положительна и не зависит от h . Следовательно, эта разность не может стремиться к нулю при $h \rightarrow 0$.

Рассмотрим теперь очень близкую к (32,43) по внешнему виду разностную схему

$$\bar{L}_h(\bar{u}_h) \equiv \frac{\bar{u}_{m+1}^{n+1} - \bar{u}_m^n}{\tau} - \frac{\bar{u}_{m+1}^n - \bar{u}_m^n}{h} = 0; \quad (33,43)_1$$

$$\bar{u}_m^0 = \varphi(mh); \quad (33,43)_2$$

$$(n=0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau} \right] - 1; m=0, \pm 1, \dots).$$

Докажем, что при $\frac{\tau}{h} = c \leq 1$ ($c = \text{const}$) эта схема является сходящейся (в смысле нормы (30,43)).

Пусть $\alpha_h = \bar{L}_h(u) - L(u)$. Так как $L(u) = 0$, то

$$\bar{L}_h(u) = \alpha_h. \quad (34,43)$$

Вследствие оценки (15,43) для α_h и условия $\frac{\tau}{h} = \text{const}$ имеем $\alpha_h = O(h)$, т. е. α_h равномерно стремится к нулю при $h \rightarrow 0$.

Используя (33,43) и (34,43), получаем для разности $u - \bar{u}_h = v_h$ уравнение

$$\bar{L}_h(v_h) = \alpha_h \quad (35,43)$$

с начальным условием $v_m^0 = 0$. Разрешая уравнение (35,43) относительно v_m^{n+1} , находим

$$v_m^{n+1} = \tau \alpha_m^n + (1 - \tau) v_m^n + c v_{m+1}^n. \quad (36,43)$$

Пусть $V_n = \sup_{-\infty < m < \infty} |v_m^n|$, $A_h = \sup_{n, m} |\alpha_m^n| = O(h)$. Из (36,43) получаем

$$V_{n+1} \leq \tau A_h + V_n \left(n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau} \right] - 1 \right).$$

Суммируя эти неравенства по n от 0 до $N - 1$, где $N\tau \leq T$, и учитывая, что $V_0 \equiv 0$, приходим к соотношению

$$V_N \leq A_h T = O(h). \quad (37,43)$$

Отсюда вытекает равномерная сходимость $\bar{u}_h - u$ к нулю в полосе $\{0 \leq t \leq T, -\infty < x < \infty\}$ и оценка: $u - \bar{u}_h = O(h)$.

Заметим, что условие $c = \frac{\tau}{h} \leq 1$ является существенным для сходимости разностной схемы (33,43). При $c > 1$ схема (33,43) не будет сходящейся, что легко показать аналогично тому, как это было сделано для схемы (32,43). Таким образом, сходимость схемы зависит не только от вида разностных уравнений, но и от выбора соотношения между шагами сетки.

3. При доказательстве сходимости разностной схемы (33,43) мы фактически использовали только два свойства этой схемы. Во-первых, благодаря тому, что схема (33,43) является аппроксимирующей, мы получили, что точное решение задачи Коши (31,43) удовлетворяет разностному уравнению (34,43) с правой частью α_h , стремящейся к нулю при $h \rightarrow 0$. Во-вторых, мы использовали тот факт, что разность v_h между решением уравнения (34,43) и решением уравнения (33,43), с тем же начальным условием стремится к нулю при $\alpha_h \rightarrow 0$. Этот факт, означающий непрерывную зависимость решения разностного уравнения (34,43) от правой части, был установлен с помощью неравенства (37,43). Из (37,43) следует, что $|v_h| < \epsilon$, если $|\alpha_h| < \delta$, где $\delta > 0$ зависит от ϵ , но не зависит от h .

В рассмотренном примере погрешность аппроксимации содержится только в разностном уравнении, аппроксимирующим дифференциальное уравнение. В других случаях погрешность

аппроксимации входит также в разностные уравнения, приближенно выражающие начальные и граничные условия. Поэтому при доказательстве сходимости приходится исследовать зависимость решения разностной схемы не только от правой части уравнения (8,43), но и от правых частей начальных и граничных условий (27,43).

По аналогии с определением корректно поставленной краевой задачи для дифференциального уравнения (см. § 8) говорят о корректной разностной схеме.

Разностная схема (29,43) называется *корректной*, если для всякого достаточно малого положительного h ($0 < h < h_0$) и для любой правой части F_h существует единственное решение \bar{u}_h уравнения (29,43), непрерывно зависящее от F_h , причем эта непрерывная зависимость равномерна относительно h . Последнее означает, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, не зависящее от h , что для всякого изменения F_h , не превосходящего δ (по некоторой норме), соответствующее изменение \bar{u}_h не превосходит ϵ (по некоторой, вообще говоря, другой норме).

Из определений, приведенных выше, можно получить следующее общее утверждение: при соответствующем выборе норм, участвующих в определениях аппроксимации, сходимости и корректности, решения корректной разностной схемы сходятся при $h \rightarrow 0$ к решению краевой задачи для дифференциального уравнения, если это решение существует и для него разностная схема является аппроксимирующей.

Доказательство этого утверждения мы провели выше на примере схемы (33,43). Аналогично проводится доказательство и в общем случае, причем краевая задача (5,43), (27,43) может быть как линейной, так и нелинейной. В случае линейной краевой задачи можно показать, что порядок сходимости равен порядку аппроксимации. Это позволяет обосновать часто применяемый на практике простой метод оценки погрешности приближенного решения путем сравнения приближенных решений \bar{u}_h , полученных при различных значениях h . Все эти вопросы подробно изложены в книге В. С. Рябенького и А. Ф. Филиппова «Об устойчивости разностных уравнений», Гостехиздат, 1956.

4. Согласно данному выше определению корректной разностной схемы, решение такой схемы непрерывно (и при том равномерно относительно h) зависит от правой части f

разностного уравнения (8,43), аппроксимирующего дифференциальное уравнение, от правых частей φ_{ih} ($i = 1, \dots, p$) начальных условий (28,43)₁, и от правых частей φ_{ih} ($i = p+1, \dots, s$) граничных условий (28,43)₂. Для линейной разностной схемы при исследовании корректности достаточно отдельно изучить зависимость решения от каждого из этих трех факторов. Если решение разностной схемы существует при любых значениях φ_{ih} ($i = 1, \dots, p$) и непрерывно (при том равномерно по h) зависит от φ_{ih} ($i = 1, \dots, p$), то разностная схема называется *устойчивой по начальным условиям*. Аналогично определяется устойчивость по правой части разностного уравнения, аппроксимирующего дифференциальное уравнение, а также устойчивость по граничным условиям. Очевидно, что линейная разностная схема, устойчивая по начальным условиям, по правой части и по граничным условиям, является корректной.

В настоящее время еще не найдены достаточно общие методы исследования устойчивости разностных схем. Обычно легче всего исследуется устойчивость по начальным условиям. Можно показать, что устойчивость по правой части для достаточно широкого класса схем вытекает из устойчивости по начальным условиям. Вопрос об устойчивости по граничным условиям изучен еще очень мало.

Мы рассмотрим на примерах некоторые приемы исследования устойчивости по начальным условиям.

Пусть $\delta\bar{u} = \{\delta\bar{u}_m^n\}$ — изменение решения \bar{u}_m^n линейной разностной схемы (8,43), (28,43), вызванное изменением $\delta\varphi_{ih}$ ($i = 1, \dots, p$) начальных условий (28,43)₁. Легко видеть, что $\delta\bar{u}$ является решением следующей разностной схемы:

$$\left. \begin{aligned} \bar{L}_h(\delta\bar{u}) &= 0; \\ \bar{l}_{ih}(\delta\bar{u}) &= \delta\varphi_{ih}, \quad i = 1, \dots, p \text{ (начальные условия);} \\ \bar{l}_{ih}(\delta\bar{u}) &= 0, \quad i = p+1, \dots, s \text{ (граничные условия).} \end{aligned} \right\} \quad (38,43)$$

Поэтому при исследовании устойчивости по начальным условиям можно ограничиться изучением схем вида (38,43). Для сокращения записи мы будем в дальнейшем писать \bar{u}_m^n вместо $\delta\bar{u}_m^n$.

Рассмотрим снова схему (33,43). Неравенство (37,43) означает, что эта схема при $c = \frac{\tau}{h} \leq 1$ устойчива по правой

части. Докажем, что эта схема при $c \leq 1$ устойчива и по начальным условиям, если использовать нормы

$$\|\bar{u}_h\| = \sup_{n,m} |\bar{u}_m^n|, \quad \|\varphi\| = \sup_m |\varphi(mh)|.$$

Положим $U_n = \sup_m |\bar{u}_m^n|$. Из (33,43) имеем

$$\bar{u}_m^{n+1} = (1 - c)\bar{u}_m^n + c\bar{u}_{m+1}^n.$$

Отсюда при $c \leq 1$ находим $U_{n+1} \leq U_n$, и следовательно, $U_n \leq U_0$ ($n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau}\right]$). Поэтому $\|\bar{u}_h\| \leq \varepsilon$, если $\|\varphi\| \leq \varepsilon$. Устойчивость по начальным условиям при $c \leq 1$ доказана.

Докажем теперь, что если $c = 1 + \mu$, где $\mu > 0$, то схема (33,43) неустойчива по начальным условиям. Пусть $\bar{u}_m^0 = (-1)^m \varepsilon$. Легко проверить, что решение в этом случае имеет вид

$$\bar{u}_m^n = (-1)^{n+m} (1 + 2\mu)^n \varepsilon.$$

Для всякого фиксированного $t = n\tau$ при $h \rightarrow 0$ решение неограниченно возрастает и притом быстрее любой степени $\frac{1}{h}$, так как

$$|\bar{u}_m^n| = \varepsilon (1 + 2\mu)^n = \varepsilon e^{\frac{Kt}{h}}, \text{ где } K = \frac{\ln(1 + 2\mu)}{1 + \mu}.$$

В качестве следующего примера рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности (18,43). Разностную схему построим согласно (19,43). Положим $\frac{\tau}{h^2} = c$. Разрешая соответствующее разностное уравнение $\bar{L}_h(\bar{u}_h) = 0$ относительно \bar{u}_m^{n+1} , получим

$$\bar{u}_m^{n+1} = c\bar{u}_{m+1}^n + (1 - 2c)\bar{u}_m^n + c\bar{u}_{m-1}^n. \quad (39,43)$$

Если $c \leq \frac{1}{2}$, то все коэффициенты в правой части (39,43) неотрицательны и сумма их равна единице. Отсюда, как и в предыдущем примере, следует, что верхняя грань абсолютной величины решения не возрастает при переходе от n

к $n+1$. Таким образом, разностная схема, построенная согласно (19,43), устойчива по начальным условиям при $c \leq \frac{1}{2}$.

При $c = \frac{1}{2} + \mu$, где $\mu > 0$, рассматриваемая разностная схема неустойчива по начальным условиям. Для доказательства этого утверждения снова положим $\bar{u}_m^0 = (-1)^m \varepsilon$; после простых вычислений получим

$$|\bar{u}_m^n| = \varepsilon (4c - 1)^n = \varepsilon e^{\frac{Kt}{h^2}}, \quad (40,43)$$

$$\text{где } K = \frac{2 \ln(1 + 4\mu)}{1 + 2\mu}, \quad t = n\tau.$$

Доказательство устойчивости разностных схем по начальным условиям в рассмотренных примерах основывалось только на том, что сумма модулей коэффициентов в формулах, явно выражающих \bar{u}_m^{n+1} через значения решения в узлах слоя с номером n , не превосходит единицы. Эта сумма модулей коэффициентов называется индексом разностной схемы. Для устойчивости схемы по начальным условиям достаточно, чтобы индекс схемы не превосходил $1 + C\tau$, где C — некоторая постоянная. Действительно, в этом случае для любого $t = n\tau \leq T$

$$\sup_m |\bar{u}_m^n| \leq (1 + C\tau)^{\frac{T}{\tau}} \sup_m |\bar{u}_m^0| \leq e^{CT} \sup_m |\bar{u}_m^0|,$$

откуда вытекает устойчивость по начальным условиям.

В некоторых случаях для исследования устойчивости по начальным условиям можно использовать свойства, аналогичные принципу максимума для решений уравнения теплопроводности. Рассмотрим в качестве примера разностную схему

$$\frac{\bar{u}_m^{n+1} - \bar{u}_m^n}{\tau} = \frac{\bar{u}_{m+1}^{n+1} - 2\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_{m-1}^{n+1}}{h^2},$$

$$\bar{u}_0^{n+1} = \bar{u}_M^{n+1} = 0, \quad \bar{u}_m^0 = \varphi(mh)$$

$$\left(n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau} \right] - 1; m = 1, 2, \dots, M - 1 \right),$$

аппроксимирующую первую краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольнике $\{0 < t < T, 0 < x < 1\}$

с условиями

$$u(0, x) = \varphi(x); \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0. \quad (41,43)$$

По лемме п. 2 § 42 имеем $\sup_{n, m} |\bar{u}_m^n| \leq \sup_m |\bar{u}_m^0|$ при любом значении $\frac{\tau}{h^2}$ (доказательство этой леммы не зависит от значения $\frac{\tau}{h^2}$). Отсюда следует, что рассматриваемая схема устойчива по начальным условиям при произвольном значении $\frac{\tau}{h^2}$.

5. Кроме частных приемов, существенно использующих специальные свойства той или иной разностной схемы, для исследования устойчивости по начальным условиям применяют два общих метода: метод разделения переменных (для краевых задач с начальными и граничными условиями) и метод интеграла Фурье (для задачи Коши).

Приведем примеры применения метода разделения переменных.

Рассмотрим разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_m^{n+1} - \bar{u}_m^n}{\tau} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}_{m+1}^{n+1} - 2\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{u}_{m+1}^n - 2\bar{u}_m^n + \bar{u}_{m-1}^n}{h^2} \right), \quad (42,43)_1 \end{aligned}$$

$$\bar{u}_0^n = 0, \quad \bar{u}_M^n = 0, \quad \bar{u}_m^0 = \varphi(mh) \quad (42,43)_2$$

$$\left(n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau} \right] - 1; \quad m = 1, 2, \dots, M - 1 \right),$$

аппроксимирующую первую краевую задачу для уравнения теплопроводности (18,43) с условиями (41,43). По аналогии с методом разделения переменных для дифференциального уравнения будем сначала искать решения уравнения (42,43)₁, удовлетворяющие нулевым граничным условиям и имеющие специальный вид

$$\bar{u}_m^n = T(n) X(m).$$

Подставляя это выражение в (42,43)₁, получим после разделения переменных

$$\frac{2h^2}{\tau} \frac{T(n+1) - T(n)}{T(n+1) + T(n)} = \frac{X(m+1) - 2X(m) + X(m-1)}{X(m)} = \lambda, \quad (43,43)$$

где λ не зависит от n и m . Для определения λ и $X(m)$ имеем следующую разностную краевую задачу, аналогичную задаче Штурма — Лиувилля (см. § 20):

$$X(m+1) - 2X(m) + X(m-1) = \lambda X(m) \quad (44,43)$$

$$(m=1, 2, \dots, M-1),$$

$$X(0) = X(M) = 0. \quad (45,43)$$

Те значения λ , при которых существует нетривиальное решение задачи (44,43), (45,43), естественно называть собственными значениями этой задачи, а сами нетривиальные решения $X(m)$ — собственными функциями.

Найдем общее решение уравнения (44,43). Для этого, по аналогии с известным методом решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, будем искать сначала частные решения уравнения (44,43) вида

$$X(m) = e^{kx} = e^{kmh} = q^m, \text{ где } q = e^{kh}.$$

Для определения q из (44,43) получим так называемое характеристическое уравнение

$$q^2 - (2 + \lambda)q + 1 = 0. \quad (46,43)$$

Пусть q_1, q_2 — корни уравнения (46,43) и $q_1 \neq q_2$. Тогда любое решение уравнения (44,43) можно представить в виде $X(m) = C_1 q_1^m + C_2 q_2^m$, где C_1, C_2 — постоянные. Действительно, легко проверить, что всякая функция такого вида удовлетворяет уравнению (44,43). Далее, из (44,43) непосредственно следует, что любое решение $X(m)$ этого уравнения однозначно определяется, если заданы значения $X(m)$ в двух соседних точках: $X(m_0 - 1) = a$, $X(m_0) = b$. Но последним условиям можно удовлетворить, если определить C_1 и C_2 как решение системы

$$C_1 q_1^{m_0 - 1} + C_2 q_2^{m_0 - 1} = a,$$

$$C_1 q_1^{m_0} + C_2 q_2^{m_0} = b,$$

которая, очевидно, совместна при любых a и b , так как $q_1 \neq q_2$.

Аналогичным образом можно показать, что при $q_1 = q_2 = q$ любое решение уравнения (44,43) представляется в виде

$X(m) = (C_1 + C_2 m) q^m$. Нетрудно проверить, что если функция такого вида удовлетворяет граничным условиям (45,43), то она тождественно равна нулю. Поэтому решение задачи (44,43), (45,43) мы будем искать в виде $X(m) = C_1 q_1^m + C_2 q_2^m$, где $q_1 \neq q_2$.

Положим $q_1 = q$; тогда $q_2 = q^{-1}$, так как $q_1 q_2 = 1$. Следовательно, $X(m) = C_1 q^m + C_2 q^{-m}$. Используя граничное условие $X(0) = 0$, находим, что $C_2 = -C_1$ и

$$X(m) = C_1 (q^m - q^{-m}). \quad (47,43)$$

Второе граничное условие $X(M) = 0$ приводит к уравнению

$$q^{2M} = 1,$$

откуда

$$q = e^{i \frac{\pi k}{M}}, \quad k = 0, 1, \dots, 2M - 1. \quad (48,43)$$

Полагая $C_1 = \frac{1}{2i}$, получим из (47,43) и (48,43) $M - 1$ собственных функций

$$X_k(m) = \sin \frac{\pi k m}{M}, \quad k = 1, 2, \dots, M - 1. \quad (49,43)$$

(Остальные значения k , указанные в (48,43), приводят к тем же собственным функциям с точностью до множителя -1 .) Соответствующие собственные значения находим с помощью соотношения $\lambda = q + q^{-1} - 2$, вытекающего из уравнения (46,43) в силу формулы Виета; получаем

$$\lambda_k = -4 \sin^2 \frac{\pi k}{2M}, \quad k = 1, 2, \dots, M - 1. \quad (50,43)$$

Собственные функции (49,43), рассматриваемые в узлах сетки ($x = mh$, $m = 1, 2, \dots, M - 1$), в силу системы (44,43), (45,43) являются собственными векторами действительной симметрической матрицы, составленной из коэффициентов уравнений (44,43). Так как все собственные значения (50,43) различны, то собственные функции (49,43) линейно независимы. Они образуют базис в $(M - 1)$ -мерном линейном пространстве, состоящем из функций $\{f(x)\}$, которые рассматриваются только в узлах сетки ($x = mh$, $m = 1, 2, \dots, M - 1$).

Введем в этом пространстве скалярное произведение

$$(f, g)_h = h \sum_{m=1}^{M-1} f(mh) g(mh). \quad (51,43)$$

В силу известной теоремы алгебры собственные функции (49,43) взаимно ортогональны в смысле скалярного произведения (51,43), т. е. $(X_k, X_l)_h = 0$ при $k \neq l$ ^{*}). Легко проверить, что $(X_k, X_k)_h = \frac{1}{2}$. Поэтому система функций

$$\tilde{X}_k(m) = \sqrt{\frac{\tau}{2}} \sin \frac{\pi k m}{M}, \quad k = 1, 2, \dots, M-1, \quad (52,43)$$

образует ортонормированный базис в пространстве функций на сетке.

Найдем теперь функции $T_k(n)$ ($k = 1, 2, \dots, M-1$). Из уравнения (43,43) получим

$$T_k(n+1) = \frac{1 + \frac{\tau}{2h^2} \lambda_k}{1 - \frac{\tau}{2h^2} \lambda_k} T_k(n).$$

Отсюда

$$T_k(n) = A_k (s_k)^n, \quad (53,43)$$

где

$$s_k = \frac{1 + \frac{\tau}{2h^2} \lambda_k}{1 - \frac{\tau}{2h^2} \lambda_k}, \quad (54,43)$$

а A_k — произвольная постоянная. Заметим, что $|s_k| < 1$, так как $\lambda_k < 0$.

Следуя основной идее метода разделения переменных, будем искать решение разностной краевой задачи (42,43) в виде

$$\bar{u}_m^n = \sum_{k=1}^{M-1} a_k (s_k)^n \tilde{X}_k(m), \quad (55,43)$$

где a_k — постоянные, которые должны быть выбраны так,

^{*}) См., например, И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, Гостехиздат, 1951, стр. 121.

чтобы выполнялось начальное условие $\bar{u}_m^0 = \varphi(mh)$. Для этого нужно положить $a_k = (\varphi, \tilde{X}_k)_h$.

Из равенства (55,43) получаем

$$(\bar{u}^n, \bar{u}^n)_h = \sum_{k=1}^{M-1} |a_k|^2 |s_k|^{2n},$$

так как функции $\tilde{X}_k(m)$ образуют ортонормированную систему. В частности, полагая $n=0$, находим

$$(\bar{u}^0, \bar{u}^0)_h = (\varphi, \varphi)_h = \sum_{k=1}^{M-1} |a_k|^2.$$

Так как $|s_k| < 1$, то $(\bar{u}^n, \bar{u}^n)_h \leq (\varphi, \varphi)_h$ при $n > 0$. Отсюда вытекает устойчивость решения по начальным условиям, если изменение начальных условий измерять с помощью нормы $\sqrt{(\varphi, \varphi)_h}$, а изменение решения — с помощью нормы $\sup_n \sqrt{(\bar{u}^n, \bar{u}^n)_h}$.

Аналогичным образом можно исследовать с помощью метода разделения переменных следующие разностные схемы для той же краевой задачи (18,43), (41,43):

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \frac{\bar{u}_m^{n+1} - \bar{u}_m^n}{\tau} &= \frac{\bar{u}_{m+1}^{n+1} - 2\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_{m-1}^{n+1}}{h^2}, \\ \bar{u}_0^n &= \bar{u}_M^n = 0, \quad \bar{u}_m^0 = \varphi(mh). \end{aligned} \right\} \quad (56,43)$$

$$\left. \begin{aligned} 2) \quad \frac{\bar{u}_m^{n+1} - \bar{u}_m^n}{\tau} &= \frac{\bar{u}_{m+1}^n - 2\bar{u}_m^n + \bar{u}_{m-1}^n}{h^2}, \\ \bar{u}_0^n &= \bar{u}_M^n = 0, \quad \bar{u}_m^0 = \varphi(mh). \end{aligned} \right\} \quad (57,43)$$

Предоставляем читателю доказать, что разностная схема (56,43) устойчива по начальным условиям при любом значении $\frac{\tau}{h^2}$, а схема (57,43) устойчива, если $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$.

Разностную схему (56,43) мы уже исследовали выше с помощью принципа максимума (при другом выборе норм) и также получили устойчивость по начальным условиям без каких-либо ограничений на величину $\frac{\tau}{h^2}$. Разностные уравнения, входящие в схему (57,43), мы рассматривали выше для задачи Коши и установили, что соответствующая разностная

схема устойчива по начальным условиям, если $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$, и неустойчива, если $\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{2} + \mu$, $\mu > 0$.

В последнем случае неустойчива и разностная схема (57,43), аппроксимирующая первую краевую задачу. Для доказательства этого утверждения достаточно взять $\varphi(mh) = \epsilon \tilde{X}_{M-1}(m)$, где $\tilde{X}_{M-1}(m)$ определяется согласно (52,43). Соответствующее решение уравнений (57,43) имеет вид

$$\bar{u}_m^n = \epsilon (s_{M-1})^n \tilde{X}_{M-1}(m),$$

где

$$s_{M-1} = 1 - \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{(M-1)\pi}{2M}.$$

Так как $M = \frac{1}{h}$, то при $h \rightarrow 0$

$$|s_{M-1}| \rightarrow \left| 1 - \frac{4\tau}{h^2} \right| = 1 + 4\mu.$$

Отсюда легко получить неустойчивость по начальным условиям.

Рассмотренные нами примеры применения метода разделения переменных относились к двуслойным разностным схемам. При переходе к многослойным схемам общая идея метода разделения переменных остается прежней, но возникают некоторые новые обстоятельства, которые мы коротко охарактеризуем на примере двух схем для волнового уравнения (24,43).

Рассмотрим вначале явную схему

$$\frac{\bar{u}_m^{n+1} - 2\bar{u}_m^n + \bar{u}_m^{n-1}}{\tau^2} = \frac{\bar{u}_m^n + 1 - 2\bar{u}_m^n + \bar{u}_m^{n-1}}{h^2}; \quad (58,43)_1$$

$$\bar{u}_m^0 = \varphi_0(mh); \quad (58,43)_2$$

$$\frac{\bar{u}_m^1 - \bar{u}_m^0}{\tau} = \varphi_1(mh); \quad (58,43)_3$$

$$\bar{u}_0^n = \bar{u}_M^n = 0. \quad (58,43)_4$$

Примем в качестве нормы для правых частей начальных условий $(58,43)_2$, $(58,43)_3$ выражение

$$\sqrt{(\varphi_0, \varphi_0)_h + (\varphi_1, \varphi_1)_h}.$$

Решение будем измерять с помощью нормы

$$\sup_n \sqrt{(\bar{u}^n, u^n)_h}.$$

Применяя метод разделения переменных, найдем сначала решения вида $\bar{u}_m^n = T(n) X(m)$, удовлетворяющие граничным условиям (58,43). Для определения λ и $X(m)$ мы получим снова задачу о собственных значениях (44,43), (45,43), решение которой дается формулами (49,43), (50,43). Для нахождения функции $T_k(n)$ имеем разностное уравнение

$$T_k(n+1) - \left(2 + \frac{\tau^2}{h^2} \lambda_k\right) T_k(n) + T_k(n-1) = 0. \quad (59,43)$$

Мы снова ищем решение краевой задачи (58,43) в виде $\bar{u}_m^n = \sum_{k=1}^{M-1} T_k(n) \tilde{X}_k(m)$. Пользуясь ортонормированностью системы функций $\{\tilde{X}_k(m)\}$, из начальных условий (58,43)₂, (58,43)₃, получаем начальные условия для $T_k(n)$:

$$T_k(0) = a_k^{(0)}, \quad a_k^{(0)} = (\varphi_0, \tilde{X}_k)_h; \quad (60,43)$$

$$\frac{T_k(1) - T_k(0)}{\tau} = a_k^{(1)}, \quad a_k^{(1)} = (\varphi_1, \tilde{X}_k)_h. \quad (61,43)$$

Введем фундаментальную систему решений $\{T_k^{(0)}(n), T_k^{(1)}(n)\}$ уравнения (59,43), определив ее условиями

$$\left. \begin{array}{l} T_k^{(0)}(0) = 1, \quad \frac{T_k^{(0)}(1) - T_k^{(0)}(0)}{\tau} = 0; \\ T_k^{(1)}(0) = 0, \quad \frac{T_k^{(1)}(1) - T_k^{(1)}(0)}{\tau} = 1. \end{array} \right\} \quad (62,43)$$

Тогда

$$T_k(n) = a_k^{(0)} T_k^{(0)}(n) + a_k^{(1)} T_k^{(1)}(n),$$

$$\bar{u}_m^n = \sum_{k=1}^{M-1} (a_k^{(0)} T_k^{(0)}(n) + a_k^{(1)} T_k^{(1)}(n)) \tilde{X}_k(m).$$

Отсюда, вследствие ортонормированности системы функций $\{\tilde{X}_k(m)\}$, имеем

$$(u^n, \bar{u}^n)_h = \sum_{k=1}^{M-1} (a_k^{(0)} I_k^{(0)}(n) + a_k^{(1)} I_k^{(1)}(n))^2. \quad (63,43)$$

Пусть $P_k(n, h) = \max \{ |T_k^{(0)}(n)|, |T_k^{(1)}(n)| \}$ и $P(n, h) = \max_k P_k(n, h)$. Используя неравенство $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, получим из (63,43)

$$\begin{aligned} (u^n, u^n)_h &\leq 2 \sum_{k=1}^{M-1} (|a_k^{(0)}|^2 |T_k^{(0)}(n)|^2 + |a_k^{(1)}|^2 |T_k^{(1)}(n)|^2) \leq \\ &\leq 2 [P(n, h)]^2 \sum_{k=1}^{M-1} (|a_k^{(0)}|^2 + |a_k^{(1)}|^2). \end{aligned}$$

Отсюда в силу (60,43), (61,43) имеем

$$\sqrt{(\bar{u}^n, \bar{u}^n)_h} \leq \sqrt{2} P(n, h) \sqrt{(\varphi_0, \varphi_0)_h + (\varphi_1, \varphi_1)_h}. \quad (64,43)$$

Из (64,43) следует, что разностная схема (58,43) устойчива по начальным условиям при указанном выше выборе норм, если величина $P(n, h)$ ограничена при всех достаточно малых $h > 0$ для всех n , удовлетворяющих неравенствам $0 \leq n\tau \leq T$.

С другой стороны, легко показать, что если величина $P(n, h)$ не ограничена, то схема (58,43) не может быть устойчивой по начальным условиям.

Таким образом, исследование устойчивости рассматриваемой схемы сводится к исследованию построенной выше фундаментальной системы решений $\{T_k^{(0)}(n), T_k^{(1)}(n)\}$ разностного уравнения (59,43).

В данном случае это исследование провести сравнительно легко, как как $T_k^{(0)}(n)$ и $T_k^{(1)}(n)$ просто выражаются через корни соответствующего характеристического уравнения

$$s_k^2 - \left(2 + \frac{\tau^2}{h^2} \lambda_k \right) s_k + 1 = 0.$$

Приведем результаты исследования: разностная схема (58,43) устойчива по начальным условиям, если $\frac{\tau}{h} = c < 1$ ($c = \text{const}$) и неустойчива, если $\frac{\tau}{h} = c \geq 1$.

Рассмотрим теперь неявную разностную схему для той же краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\bar{u}_m^{n+1} - 2\bar{u}_m^n + \bar{u}_m^{n-1}}{\tau^2} = \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}_{m+1}^{n+1} - 2\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{\bar{u}_{m+1}^n - 2\bar{u}_m^n + \bar{u}_{m-1}^n}{h^2} \right); \\ & \bar{u}_m^0 = \varphi_0(mh); \quad \frac{\bar{u}_m^1 - \bar{u}_m^0}{\tau} = \varphi_1(mh); \quad \bar{u}_0^n = \bar{u}_M^n = 0. \end{aligned} \right\} (65,43)$$

Эта схема может быть исследована так же, как и схема (58,43). Оказывается, что схема (65,43) устойчива по начальным условиям при любых значениях $\frac{\tau}{h}$.

Методом разделения переменных можно исследовать трехслойные разностные схемы, построенные для уравнения теплопроводности (18,43) согласно приближенным формулам (22,43) и (23,43). В этих схемах значение решения на каждом слое определяется с помощью значений решения на двух предшествующих слоях. Роль начальных данных играют значения решения на слоях с номерами 0 и 1. Разностные начальные условия, определяющие \bar{u}_m^0 и \bar{u}_m^1 , мы запишем, согласно (28,43):

$$\bar{l}_h(\bar{u}) \equiv \begin{pmatrix} \bar{u}_m^0 \\ \bar{u}_m^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_h(m) \\ \psi_h(m) \end{pmatrix}. \quad (66,43)$$

Функции φ_h , ψ_h должны быть определены таким образом, чтобы разностное начальное условие (66,43) аппроксимировало начальное условие

$$l(u) \equiv u(0, x) = \varphi_0(x)$$

для решения дифференциального уравнения.

В соответствии с п. 1 погрешностью аппроксимации для разностного начального условия (66,43) назовем функцию

$$\beta_h = \begin{pmatrix} \beta^0 \\ \beta^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(0, mh) - \varphi_h(m) \\ u(\tau, mh) - \psi_h(m) \end{pmatrix}.$$

Условие аппроксимации состоит в том, что при $h \rightarrow 0$ погрешность аппроксимации стремится к нулю. Для того чтобы

придать точный смысл этому условию, необходимо выбрать норму для измерения β_h . Можно, например, ввести такую норму:

$$\sqrt{(\beta^0, \beta^0)_h + (\beta^1, \beta^1)_h}$$

Эту норму можно использовать и для измерения разностных начальных данных. Изменение решения, как и в предыдущих примерах этого пункта, будем измерять с помощью нормы

$$\sup_n \sqrt{(\bar{u}^n, \bar{u}^n)_h}$$

При указанном выборе норм легко получить следующие результаты. Явная разностная схема

$$\frac{\bar{u}_m^{n+1} - \bar{u}_m^n}{2\tau} - \frac{\bar{u}_{m+1}^n - 2\bar{u}_m^n + \bar{u}_{m-1}^n}{h^2} = 0,$$

$$\bar{u}_0^0 = \varphi_h(m), \quad \bar{u}_m^1 = \psi_h(m), \quad \bar{u}_0^n = \bar{u}_M^n = 0$$

неустойчива по начальным условиям при всех значениях $\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$. Неявная разностная схема

$$\frac{3}{2} \frac{\bar{u}_m^{n+1} - \bar{u}_m^n}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{\bar{u}_m^n - \bar{u}_m^{n-1}}{\tau} - \frac{\bar{u}_{m+1}^{n+1} - 2\bar{u}_m^{n+1} + \bar{u}_{m-1}^{n+1}}{h^2} = 0,$$

$$\bar{u}_0^0 = \varphi_h(m), \quad \bar{u}_m^1 = \psi_h(m), \quad \bar{u}_0^n = \bar{u}_M^n = 0$$

устойчива по начальным условиям при любых значениях $\frac{\tau}{h^2}$.

6. Для исследования устойчивости по начальным условиям в случае задачи Коши применяется метод интеграла Фурье. Этот метод удобен для уравнений, коэффициенты которых не зависят от переменного x (в частности, для уравнений с постоянными коэффициентами). Как и метод разделения переменных, метод интеграла Фурье позволяет свести исследование устойчивости к изучению решений некоторого «обыкновенного» разностного уравнения (т. е. разностного уравнения, содержащего только один переменный индекс).

Основная идея метода заключается в исследовании решений разностной схемы, соответствующих начальным функциям вида e^{ikx} , где k — вещественный параметр. С помощью таких решений непосредственно получаются необходимые условия

устойчивости. Используя интеграл Фурье *), позволяющий выразить произвольные начальные данные через функции вида e^{ikx} , можно получить и достаточные условия устойчивости. Здесь мы ограничимся выводом основного необходимого условия устойчивости для двуслойных схем.

Функцию $\bar{u}_m^n = e^{ikmh}$ будем называть гармоникой. Решение разностной схемы, отвечающее начальной функции $\bar{u}_m^0 = e^{ik_0 h}$, будем искать в виде

$$\bar{u}_m^n = T(n, k, h) e^{ikmh}. \quad (67,43)$$

Для определения функции $T(n, k, h)$ получается разностное уравнение по переменному n . Если для данного $k = k_0$ функция $T(n, k, h)$ при достаточно малых h и всех n , для которых $n\tau \leq T_0 = \text{const}$, ограничена, то говорят, что схема устойчива на гармонике $e^{ik_0 x}$. Если имеет место равномерная ограниченность $T(n, k, h)$ для всех k при указанных выше условиях для h и n , то говорят, что разностная схема равномерно устойчива на всех гармониках.

При нормах $\|\bar{u}^0\| = \sup_m |\bar{u}_m^0|$, $\|\bar{u}_h\| = \sup_{m,n} |\bar{u}_m^n|$ для устойчивости схемы по начальным условиям, очевидно, необходимо, чтобы она была равномерно устойчивой на всех гармониках. Это условие сравнительно легко проверяется, и поэтому оно широко используется на практике для исследования разностных схем.

Рассмотрим некоторые простые примеры. Найдем $T(n, k, h)$ для разностной схемы (32,43). Подставив (67,43) в (32,43), получим

$$T(n, k, h) = [s(k, h)]^n, \quad \text{где } s(k, h) = 1 + \frac{\tau}{h} - \frac{\tau}{h} e^{ikh}.$$

Докажем, что для $T(n, k, h)$ при любом постоянном значении $\frac{\tau}{h}$ не выполняется условие равномерной ограниченности. Действительно, положим $kh = \alpha$, тогда

$$|s|^2 = \left[1 + \frac{\tau}{h} (1 - \cos \alpha) \right]^2 + \frac{\tau^2}{h^2} \sin^2 \alpha.$$

*) С интегралом Фурье можно познакомиться по книге: Г. Е. Шилов, Математический анализ. Специальный курс, Физматгиз, 1960, гл. 7,

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ имеем $|s|^2 = \left(1 + \frac{\tau}{h}\right)^2 + \frac{\tau^2}{h^2}$. Поэтому значения $T(n, k, h)$ не ограничены, и схема (32,43) не является устойчивой по начальным условиям ни при каком значении $\frac{\tau}{h}$.

Рассмотрим теперь схему (33,43). Для нее $T(n, k, h) = [s(k, h)]^n$, где

$$s(k, h) = 1 - \frac{\tau}{h} + \frac{\tau}{h} e^{ikh}.$$

Отсюда

$$|s|^2 = \left[1 - \frac{\tau}{h}(1 - \cos \alpha)\right]^2 + \frac{\tau^2}{h^2} \sin^2 \alpha. \quad (68,43)$$

Если $\frac{\tau}{h} = c \leq 1$, то из (68,43) вытекает, что $|s(k, h)| \leq 1$ и, следовательно, значения $T(n, k, h)$ равномерно ограничены. Если же $\frac{\tau}{h} = c > 1$, то при $\alpha = \pi$ имеем

$$|s|^2 = (1 - 2c)^2 > 1 + \mu,$$

где $\mu > 0$ не зависит от h . Для соответствующего k функция $T(n, k, h)$ при $n \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает по абсолютной величине; поэтому схема (33,43) при $c > 1$ неустойчива по начальным условиям.

Рассмотрим теперь неявную разностную схему для той же задачи (31,43), построенную согласно (16,43) (погрешность аппроксимации второго порядка по τ и h). Для этой схемы, как легко проверить,

$$s(k, h) = \frac{1 - i \frac{\tau}{h} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + i \frac{\tau}{h} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому $|s| = 1$ и $T(n, k, h)$ равномерно ограничены при любом значении $c = \frac{\tau}{h}$.

Подобным образом можно исследовать и трехслойные схемы.

7. Понятие корректной разностной схемы связано не только с вопросом о сходимости решений разностных схем, но и с очень важным для практики вопросом о влиянии ошибок

округления на приближенное решение, получаемое с помощью разностной схемы. На практике все вычисления производятся с округлениями, которые так или иначе влияют на решение разностной схемы. Очевидно, практический интерес могут представлять только такие схемы, для которых малые ошибки, допущенные в процессе численного решения разностных уравнений, не приводят к большим отклонениям от точного решения этих уравнений.

Мы приведем простые примеры, которые указывают на принципиальное различие между корректными и некорректными разностными схемами с точки зрения роста погрешности, вызванной ошибками округления. Рассмотрим для этого разностные схемы, соответствующие первой краевой задаче для уравнения теплопроводности (18,43).

Дадим оценку погрешности округления для явной разностной схемы, построенной в соответствии с (39,43) при $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$. Пусть погрешность, возникающая на каждом отдельном слое в результате округлений при вычислении \bar{u}_m^n , по абсолютной величине не превосходит ϵ . Предположим сначала, что эта погрешность допущена только на слое с номером n_0 , а на всех предыдущих и последующих слоях не было сделано ошибок округления. Для рассматриваемой схемы при $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ ошибка ϵ , допущенная на слое с номером n_0 , приведет к изменению точного решения разностной схемы (на последующих слоях) не более чем на ϵ . Это непосредственно вытекает из равенства (39,43), так как ввиду линейности разностных уравнений разность между точным и приближенным решениями также является (при $n > n_0$) решением уравнения (39,43).

Для того чтобы получить оценку погрешности округления в общем случае, когда ошибки округления допускаются на всех слоях, достаточно, в силу линейности разностных уравнений, суммировать погрешности, вызванные ошибками округления, которые были сделаны на различных слоях. Для $t \leq T$ число слоев оценивается величиной $\frac{T}{\tau}$, поэтому суммарная погрешность округления не превосходит по абсолютной величине $\frac{\epsilon T}{\tau}$.

Погрешность округления не будет возрастать при $h \rightarrow 0$, если $\epsilon = O(\tau) = O(h^2)$. Обозначим через ρ максимальную

ошибку округления при выполнении элементарных арифметических операций, с помощью которых \bar{u}_m^{n+1} вычисляется по формуле (39,43). Из этой формулы следует, что $\varepsilon = O(\rho)$; поэтому при $\rho = O(h^2)$ погрешность округления будет ограниченной, когда $h \rightarrow 0$. (Заметим, что для неявной схемы, построенной по формуле (20,43), точно таким же путем можно получить условие $\varepsilon = O(h^2)$, но оценка ε через ρ имеет более сложный вид; эта оценка зависит от выбранного способа решения системы алгебраических уравнений, связывающих значения \bar{u}_m^{n+1} на слое с номером $n+1$.)

Пусть теперь в схеме, построенной согласно (39,43), имеем $\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{2} + \mu$, $\mu > 0$ (схема неустойчива по начальным условиям). Как было показано в п. 4, ошибка вида $(-1)^n \varepsilon$, сделанная на начальном слое, вызывает на слое с номером $n = \frac{t}{\tau}$, $t \leq T$, погрешность, равную по абсолютной величине $\varepsilon e^{\frac{Kt}{h^2}}$, где K — некоторая постоянная. Для того чтобы погрешность округления при $h \rightarrow 0$ не возрастила, ε должно убывать при $h \rightarrow 0$ чрезвычайно быстро: как $e^{-\frac{Kt}{h^2}}$.

Приведем числовой пример, иллюстрирующий возможное быстрое возрастание ошибок в неустойчивых схемах. Пусть в схеме, построенной согласно (39,43), величина $\frac{\tau}{h^2}$ равна единице. Тогда ошибка вида $(-1)^n \varepsilon$ возрастает при переходе от n к $n+1$ в 3 раза. За 20 шагов она возрастает в $3^{20} \approx \approx 3,5 \cdot 10^9$ раз. Если вычисления ведутся с относительной точностью 10^{-9} , то результаты, полученные на 20-м слое, не будут содержать, вообще говоря, ни одного верного знака.

Вопрос о накоплении ошибок округления при вычислении решений разностных схем изучен еще очень мало.

8. Рассмотренные выше примеры простейших краевых задач для дифференциальных уравнений и соответствующих им разностных схем дают лишь общее представление об основных понятиях, связанных с методом сеток, а также о важнейших способах исследования разностных схем.

В настоящее время имеется большое число работ по различным общим вопросам теории разностных схем. Изучены

некоторые частные классы схем, подробно исследованы отдельные схемы, важные для практических приложений *).

Основное место в этих работах занимает исследование устойчивости разностных схем. Как правило, бывает трудно получить эффективные (т. е. более или менее просто проверяемые) достаточные условия устойчивости. Необходимые условия находятся обычно сравнительно легко. Для практики большое значение имеют простые и вместе с тем сильные, т. е. близкие к достаточным, необходимые условия устойчивости. Имеются методы, позволяющие получать такие условия для некоторых довольно общих классов схем (например, метод интеграла Фурье для разностных схем с постоянными коэффициентами, кратко изложенный выше).

Следует, однако, заметить, что разностные схемы, применяемые на практике, в большинстве случаев не допускают полного и строгого исследования с помощью известных в настоящее время общих методов. Это относится, в частности, к схемам, которые соответствуют линейным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами общего вида. Имеющиеся исследования устойчивости таких схем используют специфические свойства каждой конкретной схемы и не могут служить образцом для исследования разнообразных схем, применяемых в вычислительной практике.

Часто встречаются и такие случаи, когда применение общих методов исследования теоретически допустимо, но при этом возникают столь большие технические трудности, что практически эти методы оказываются непригодными (так, например, при исследовании устойчивости по методу разделения переменных могут встретиться большие трудности при вычислении собственных значений).

Поэтому возникли и получили широкое применение так называемые «практические приемы» исследования устойчивости разностных схем. Теоретически эти приемы или не обоснованы, или обоснованы только для частных случаев, но достаточно хорошо проверены на практике.

Одним из таких приемов является так называемый «метод замораживания коэффициентов». По этому методу линейные разностные уравнения с переменными коэффициентами

*) См. Р. Д. Рихтмайер, Разностные методы решения краевых задач, ИЛ, 1960.

заменяются такими же уравнениями с постоянными коэффициентами, равными значениям соответствующих переменных коэффициентов в какой-либо точке (t_0, x_0) рассматриваемой области. Если при любом выборе точки (t_0, x_0) схема, состоящая из уравнений с постоянными коэффициентами, оказывается устойчивой, то и исходную схему (с переменными коэффициентами) считают устойчивой.

Имеется также ряд других «практических приемов» исследования устойчивости разностных схем.

Выяснение пределов применимости и строгое обоснование таких «практических приемов» исследования устойчивости разностных схем представляет значительный интерес.

Наряду с развитием общих методов исследования разностных схем важное значение имеет разработка рациональных методов построения разностных схем для некоторых классов задач, часто возникающих в приложениях. Особенно большой интерес представляют разностные схемы, пригодные для приближенного нахождения разрывных и негладких решений линейных и в особенности нелинейных дифференциальных уравнений.

Интересные в теоретическом отношении и важные для практики вопросы возникают при численном решении дифференциальных уравнений с частными производными в случае, когда число независимых переменных больше двух. Обычные разностные схемы, аналогичные рассмотренным выше, в этом случае приводят к сетке, состоящей из очень большого числа узлов. При этом резко возрастает количество вычислений, а также увеличивается объем информации, которую приходится хранить в запоминающих устройствах счетной машины. Поэтому очень важное значение для развития методов приближенного решения многомерных задач имеют точные оценки информации, необходимой для получения решения с заданной точностью, и новые способы построения усовершенствованных разностных схем, позволяющих уменьшить количество вычислений.
