ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ. ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА

§ 1. Определения. Примеры

Интегральными уравнениями принято называть такие уравнения, которые содержат искомую функцию под знаком интеграла. В частности, интегральным уравнением относительно функции $\varphi(\xi)$ является следующее уравнение:

$$a(x)\varphi(x)+f(x)=\int_a^b K(x,\ \xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{1,1}$$

где $a(x)$, $f(x)$, $K(x,\ \xi)$ — известные функции, а $\varphi(\xi)$ — неизвестная функция; переменная x принимает, так же как и ξ, все значения из интервала $(a,\ b)$.

Мы в этой книге будем рассматривать только уравнения, в которые неизвестная функция входит линейно, т. е. только уравнения вида (1,1). Они называются *линейными* интегральными уравнениями. Если $a(x)$ не обращается в нуль, то, разделив обе части уравнения (1,1) на $a(x)$, получим уравнение вида

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x,\ \xi)\varphi(\xi)\,d\xi+f(x). \tag{2,1}$$

Такие уравнения называются линейными интегральными уравнениями *2-го рода* или интегральными уравнениями *Фредгольма* по имени математика, который их впервые исследовал. Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (2,1) называется *однородным*.

Если бы $a(x) \equiv 0$, то уравнение (1, 1) обратилось бы в уравнение

$$\int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi = f(x),$$

которое называется линейным интегральным уравнением 1-*го рода.*

Функция $K(x, \xi)$ называется *ядром* интегрального уравнения.

В дальнейшем мы будем главным образом заниматься линейными интегральными уравнениями 2-го рода.

Можно рассматривать интегральные уравнения, где неизвестные функции зависят не от одного аргумента, а от многих. Таким будет, например, уравнение

$$\varphi(x, y) = \int_G K(x, y;\ \xi, \eta)\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta + f(x, y)$$

относительно неизвестной функции $\varphi(\xi, \eta)$, где интегрирование распространяется по некоторой области G на плоскости (ξ, η). Точка (x, y) также принадлежит этой области. Такое уравнение можно записать в виде

$$\varphi(P) = \int_G K(P, Q)\varphi(Q)\,dQ + f(P),$$

где $P \in G$ и $Q \in G$*).

Можно рассматривать системы интегральных уравнений со многими неизвестными функциями.

Замечание. Всюду в дальнейшем, кроме § 20, если даже это не оговорено особо, мы будем предполагать, что рассматриваемые функции точек P или Q определены в конечной d-мерной области G, что они непрерывны в этой области всюду, за исключением, быть может, некоторого конечного числа точек, достаточно гладких линий и поверхностей, до $(d-1)$-го измерения включительно. На этих особых точках, линиях и поверхностях функции могут быть не определены. Границу области G мы будем считать со-

*) Запись $A \in M$ означает, что точка A принадлежит множеству M.

стоящей из конечного числа кусков гладких $(d-1)$-мерных поверхностей или конечного числа гладких дуг, если $d=2$.

Интегрирование всюду в дальнейшем, кроме § 20, мы будем понимать в обычном смысле, если функции непрерывны в G; если эти функции имеют на некоторых точках, линиях или поверхностях разрывы, то интегралы рассматриваются как несобственные; все рассматриваемые функции будем считать абсолютно интегрируемыми.

§ 2. Типичные задачи, сводящиеся к линейным интегральным уравнениям

Рассмотрим упругую нить длины l, которая легко (в пределе, как мы будем предполагать, без всякого сопротивления) изменяет свою форму, но для увеличения длины которой на Δl нужна сила $c\Delta l$, где c — некоторая постоянная (закон Гука). Пусть концы этой нити закреплены

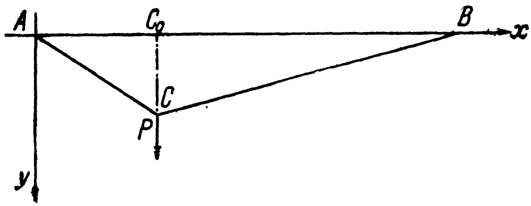

Рис. 1.

в неподвижных точках A и B, находящихся на неотрицательной части оси x. Пусть точка A находится в начальной точке оси. Ось x будем считать горизонтальной. Когда нить находится в покое под действием только горизонтальной растягивающей силы T_0, очень большой в сравнении с другими рассматриваемыми силами, положение нити будет горизонтальным, т. е. совпадающим с осью Ox.

Допустим, что в точке C, для которой $x=\xi$, приложена к нити вертикальная сила P. Под ее влиянием нить примет форму ломаной ACB (рис. 1). Будем считать $CC_0=\delta$ очень малым по сравнению с AC_0 и C_0B (результат малости P по сравнению с T_0). Пренебрегая квадратом δ по сравнению с l,