стоящей из конечного числа кусков гладких $(d-1)$-мерных поверхностей или конечного числа гладких дуг, если $d=2$.

Интегрирование всюду в дальнейшем, кроме § 20, мы будем понимать в обычном смысле, если функции непрерывны в G; если эти функции имеют на некоторых точках, линиях или поверхностях разрывы, то интегралы рассматриваются как несобственные; все рассматриваемые функции будем считать абсолютно интегрируемыми.

§ 2. Типичные задачи, сводящиеся к линейным интегральным уравнениям

Рассмотрим упругую нить длины l, которая легко (в пределе, как мы будем предполагать, без всякого сопротивления) изменяет свою форму, но для увеличения длины которой на Δl нужна сила $c\Delta l$, где c — некоторая постоянная (закон Гука). Пусть концы этой нити закреплены

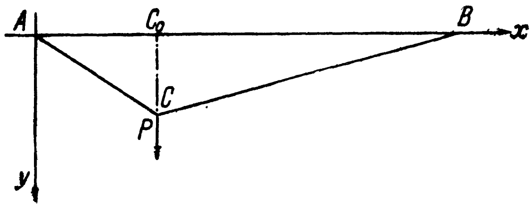

Рис. 1.

в неподвижных точках A и B, находящихся на неотрицательной части оси x. Пусть точка A находится в начальной точке оси. Ось x будем считать горизонтальной. Когда нить находится в покое под действием только горизонтальной растягивающей силы T_0, очень большой в сравнении с другими рассматриваемыми силами, положение нити будет горизонтальным, т. е. совпадающим с осью Ox.

Допустим, что в точке C, для которой $x=\xi$, приложена к нити вертикальная сила P. Под ее влиянием нить примет форму ломаной ACB (рис. 1). Будем считать $CC_0=\delta$ очень малым по сравнению с AC_0 и C_0B (результат малости P по сравнению с T_0). Пренебрегая квадратом δ по сравнению с l, мы можем считать, что натяжение нити осталось равным T_0 и под действием силы P. Проектируя на вертикаль силы натяжения нити в точке C и силу P и пренебрегая опять членами, содержащими δ^2, получим:

$$T_0 \frac{\delta}{\xi} + T_0 \frac{\delta}{l-\xi} = P,$$

откуда

$$\delta = \frac{P(l-\xi)\xi}{T_0 l}.$$

Обозначая через $y(x)$ прогиб нити в точке с абсциссой x, мы получим отсюда

$$y(x) = P \cdot G(x, \xi),$$

где

$$\left.\begin{aligned} G(x, \xi) &= \frac{x(l-\xi)}{T_0 l} \text{ для участка } AC (0 \leqslant x \leqslant \xi), \\ G(x, \xi) &= \frac{(l-x)\xi}{T_0 l} \text{ для участка } CB (\xi \leqslant x \leqslant l). \end{aligned}\right\} \qquad (1,2)$$

Пользуясь этими формулами, легко проверить, что

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Предположим, что на нить действует непрерывно распределенная сила с линейной плотностью $p(\xi)$ так, что на участок ее между точками ξ и $\xi + \Delta\xi$ действует сила, приблизительно равная $p(\xi)\Delta\xi$. Так как смещения, обусловленные элементарными силами $p(\xi)\Delta\xi$, суммируются («принцип суперпозиции»), то под действием этой силы нить примет форму

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi) p(\xi)\, d\xi.$$

Рассмотрим следующие задачи.

1. Будем искать плотность распределения силы $p(\xi)$, под влиянием которой нить примет заданную форму $y = y(x)$. Тогда мы придем к интегральному уравнению 1-го рода

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi) p(\xi)\, d\xi \qquad (2,2)$$

относительно искомой функции $p(\xi)$.

2. Допустим, что на нить действует меняющаяся со временем t сила с плотностью в точке ξ

$$p(\xi)\sin\omega t \quad (\omega > 0).$$

Под ее влиянием нить придет в движение. Будем при этом предполагать, что при движении нити абсцисса каждой ее точки не меняется и что нить совершает периодические колебания, описываемые уравнением

$$y = y(x)\sin\omega t.$$

Обозначая линейную плотность массы нити в точке ξ через $\varrho(\xi)$, мы найдем тогда, что в момент t на участок нити между точками ξ и $\xi+\Delta\xi$, кроме силы $p(\xi)\sin\omega t\,\Delta\xi$, действует еще сила инерции

$$-\varrho(\xi)\,\Delta\xi\,\frac{d^2y}{dt^2} = \varrho(\xi)\,y(\xi)\,\omega^2\sin\omega t\,\Delta\xi.$$

Поэтому равенство (2,2) примет следующий вид:

$$y(x)\sin\omega t = \int_0^l G(x, \xi)\,[p(\xi)\sin\omega t + \omega^2\varrho(\xi)\,y(\xi)\sin\omega t]\,d\xi.$$

Сокращая на $\sin\omega t$ и полагая

$$\int_0^l G(x, \xi)\,p(\xi)\,d\xi = f(x), \qquad G(x, \xi)\,\varrho(\xi) = K(x, \xi), \qquad \omega^2 = \lambda,$$

мы получим:

$$y(x) = \lambda\int_0^l K(x, \xi)\,y(\xi)\,d\xi + f(x). \tag{3,2}$$

Считая функцию $p(\xi)$ и, следовательно, $f(x)$ заданной, мы пришли таким образом к интегральному уравнению Фредгольма для определения функции $y(x)$. Заметим, что в силу определения функции $f(x)$ мы имеем:

$$f(0) = f(l) = 0.$$

Если плотность $\varrho(\xi)$ постоянна и $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, это интегральное уравнение нетрудно решить. В самом деле, подставим в $K(x, \xi)$ вместо $G(x, \xi)$ его выражение (1,2). Получим

$$y(x) = \omega^2 \varrho \int_0^x \frac{(l-x)\,\xi}{T_0 l} y(\xi)\,d\xi + \omega^2 \varrho \int_x^l \frac{x(l-\xi)}{T_0 l} y(\xi)\,d\xi + f(x)$$

или

$$y(x) = \frac{\omega^2 c}{l}(l-x) \int_0^x \xi y(\xi)\,d\xi + \frac{\omega^2 c x}{l} \int_x^l (l-\xi)\, y(\xi)\,d\xi + f(x),$$

где

$$c = \frac{\varrho}{T_0}.$$

Дифференцируя два раза по x обе части этого уравнения, получим:

$$y''(x) = -\omega^2 c y(x) + f''(x). \qquad (4,2)$$

С другой стороны, можно показать, что всякое решение дифференциального уравнения (4,2), обращающееся в нуль при $x=0$ и $x=l$, является также решением интегрального уравнения (3,2). Для этого умножим обе части равенства $y''(\xi) = -\omega^2 c y(\xi) + f''(\xi)$ на $-T_0 G(x, \xi)$ и проинтегрируем по ξ от 0 до l. Мы получим при этом равенство (3,2), так как, интегрируя по частям, легко показать, что

$$\int_0^l T_0 G(x, \xi)\,\varphi''(\xi)\,d\xi = -\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — любая дважды непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль при $x=0$ и $x=l$.

Как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, общим решением уравнения (4,2) является

$$y = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x + \frac{1}{\mu} \int_0^x f''(\xi) \sin \mu (x-\xi)\,d\xi,$$

где $\mu = \omega \sqrt{c}$, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Из равенств (1,2) и (3,2) следует, что $y(0) = y(l) = 0$. Определяя из этих условий C_1 и C_2, получим, если $\sin\mu l \neq 0$,

$$y(x) = -\frac{1}{\mu}\frac{\sin\mu x}{\sin\mu l}\int_0^l f''(\xi)\sin\mu(l-\xi)\,d\xi + \frac{1}{\mu}\int_0^x f''(\xi)\sin\mu(x-\xi)\,d\xi. \quad (5,2)$$

В этом случае интегральное уравнение (3,2) имеет единственное решение при любой функции $f(x)$, если только она дважды непрерывно дифференцируема и $f(0)=f(l)=0$.

Можно показать, что для существования решения интегрального уравнения (3,2) достаточно, если $\sin\mu l \neq 0$, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной; требование существования и тем более непрерывности второй производной является излишним. Условие же $\sin\mu l \neq 0$ совершенно необходимо для того, чтобы это интегральное уравнение имело решение при всякой непрерывной или даже при всякой сколько угодно раз дифференцируемой функции $f(x)$.

Если $\sin\mu l = 0$, то

$$\mu = \frac{k\pi}{l}, \quad (6,2)$$

$$\omega = \frac{k\pi}{l\sqrt{c}}, \quad (7,2)$$

$$\lambda = \frac{k^2\pi^2}{l^2c}, \quad (8,2)$$

где k — какое-нибудь целое число — положительное, отрицательное или 0. Значения λ, даваемые формулой (8,2) при $k=1, 2, 3, \ldots$, называются *собственными значениями* параметра λ в интегральном уравнении (3,2), а соответствующие значения ω называются *собственными частотами* колебаний струны.

Из вывода формулы (5,2) следует, что интегральное уравнение (3,2) в том случае, если $\sin\mu l = 0$ и у функции $f(x)$ существует непрерывная вторая производная, может иметь решение, только если

$$\int_0^l f''(\xi)\sin\mu(l-\xi)\,d\xi = 0. \quad (9,2)$$

Интегрируя по частям и пользуясь тем, что $\sin \mu (l - \xi) = 0$ и $f(\xi) = 0$ при $\xi = 0$ и $\xi = l$, это условие можно привести к виду

$$\int_0^l f(\xi) \sin \mu\xi \, d\xi = 0. \qquad (10,2)$$

Обратно, легко убедиться в том, что условие (10,2) является также достаточным для существования у уравнения (3,2) решения при данном μ, для которого $\sin \mu l = 0$.

Условие (10,2) удовлетворяется, в частности, если

$$f(x) \equiv 0.$$

Тогда интегральное уравнение (3,2) и дифференциальное уравнение (4,2) становятся однородными. Все решения однородного дифференциального уравнения (4,2), обращающиеся в 0 при $x = 0$ и $x = l$, а следовательно, и все решения интегрального уравнения (3,2) даются формулой

$$y(x) = C \sin \mu_k x, \qquad (11,2)$$

где C — произвольная постоянная и μ_k равно одному из чисел (6,2). Формула (11,2) дает амплитуды в точке x *собственных колебаний* струны:

$$y = C \sin \mu_k x \sin \omega_k t,$$

происходящих без действия внешней силы. Как видно из предыдущего, такие колебания могут происходить не с произвольной частотой, а только с одной из частот, даваемых формулой (7,2) при $k = 1, 2, \ldots$

Как показывает формула (5,2), если условие (9,2) не выполняется, амплитуда $y(x)$ периодических колебаний струны в точке x бесконечно растет, когда ω — частота колебаний внешней силы — приближается к одной из собственных частот колебаний струны. В пределе при совпадении этих частот наступает резонанс. Тогда не существует, вообще говоря, т. е. при произвольных амплитудах внешней силы, периодических колебаний струны. Соответственно этому, вообще говоря, не существует решения неоднородного интегрального уравнения (3,2) при λ, равном одному из собственных значений этого уравнения.