§ 3. Аналогия между линейными интегральными уравнениями и линейными алгебраическими уравнениями. Формулировка теорем Фредгольма

Будем рассматривать линейное интегральное уравнение 2-го рода

$$y(x)=\int_a^b K(x,\ \xi)\,y(\xi)\,d\xi+f(x), \tag{1,3}$$

где $K(x,\ \xi)$ и $f(x)$ — известные функции при $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant\xi\leqslant b$. Разобьем интервал $(a,\ b)$ на n равных между собой интервалов, длина каждого из которых равна:

$$\frac{b-a}{n}=\Delta x=\Delta\xi.$$

Положим

$$\begin{aligned}
&K(a+p\Delta x,\ a+q\Delta\xi)=K_{pq} && (p,\ q=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\\
&y(a+p\Delta x)=y_p && (p=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\\
&f(a+p\Delta x)=f_p && (p=1,\ 2,\ \ldots,\ n).
\end{aligned}$$

Заменим интеграл $\int_a^b K(x,\ \xi)\,y(\xi)\,d\xi$ при $x=a+p\Delta x$ суммой

$$\sum_{q=1}^{n} K_{pq}y_q\Delta\xi,\quad p=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Тогда вместо интегрального уравнения (1,3) получится система линейных алгебраических уравнений

$$y_p=\sum_{q=1}^{n}K_{pq}y_q\Delta\xi+f_p,\quad p=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2,3}$$

Мы будем считать здесь K_{pq}, f_p, $\Delta\xi$ известными величинами, а y_p — неизвестными.

Целью ближайших параграфов является перенести известные теоремы о линейных алгебраических уравнениях на интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода. В обычных формулировках теорем о линейных алгебраических уравнениях участвуют определители, связать которые с интегральными уравнениями было бы, хотя и возможно, но громоздко. Поэтому мы сформулируем эти теоремы, не пользуясь определителями. Эти формулировки напечатаны у нас курсивом.

При решении системы (2,3) существенную роль играет составленный из коэффициентов этой системы определитель

$$\begin{vmatrix} 1-K_{11}\Delta\xi & -K_{12}\Delta\xi & \dots & -K_{1n}\Delta\xi \\ -K_{21}\Delta\xi & 1-K_{22}\Delta\xi & \dots & -K_{2n}\Delta\xi \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -K_{n1}\Delta\xi & -K_{n2}\Delta\xi & \dots & 1-K_{nn}\Delta\xi \end{vmatrix}. \tag{3,3}$$

Если этот определитель не равен 0, то, как известно, система (2,3) имеет, и притом всегда единственное, решение при любых значениях $f_1, f_2, \dots, f_n$. В этом случае транспонированная система, т. е. система

$$z_p = \sum_{q=1}^{n} K_{qp} z_q \Delta\xi + f_p^*, \quad p = 1, 2, \dots, n,$$

также имеет, и притом единственное, решение при произвольных f_p^*.

Если же определитель равен 0, то система (2,3) при произвольных f_p, вообще говоря, не имеет решения. Но тогда соответствующая однородная система, т. е. система, полученная из (2,3) приравниванием 0 всех f_p, всегда имеет нетривиальное решение, т. е. решение, состоящее не из одних только нулей.

Таким образом, имеет место следующая альтернатива: *или данная неоднородная система линейных алгебраических уравнений* (2,3) *имеет, и притом только единственное, решение при всяких $f_1, \dots, f_n$, стоящих в правых частях, или соответствующая однородная система имеет по крайней мере одно нетривиальное решение. Если для данной системы имеет место первый случай альтернативы, то он имеет место и для транспонированной системы.*

Во втором случае данная однородная система

$$y_p - \sum_{q=1}^{n} K_{pq} y_q \Delta\xi = 0, \quad p = 1, \dots, n, \tag{4,3}$$

имеет то же число линейно независимых решений, что *и транспонированная к ней система*

$$z_p - \sum_{q=1}^{n} K_{qp} z_q \Delta\xi = 0, \quad p = 1, \ldots, n. \tag{5,3}$$

Это число равно $n-r$, где r — ранг матрицы определителя (3,3) *).

Найдем необходимые и достаточные условия, при которых во втором случае альтернативы неоднородная система (2,3) имеет решения. Прежде всего легко найти необходимые условия для этого. Пусть

$$z_1, z_2, \ldots, z_n$$

— какое-нибудь решение системы (5,3). Умножая тогда p-е из уравнений (2,3) на z_p и складывая все уравнения почленно, получим:

$$\sum_p y_p z_p - \sum_{p,q} K_{pq} y_q z_p \Delta\xi = \sum_p f_p z_p.$$

Но левую часть этого равенства можно переписать еще так:

$$\sum_p y_p z_p - \sum_{p,q} K_{qp} y_p z_q \Delta\xi = \sum_p y_p \left(z_p - \sum_q K_{qp} z_q \Delta\xi\right).$$

В силу уравнений (5,3) это выражение равно 0. Следовательно, должно быть

$$\sum_{p=1}^{n} f_p z_p = 0. \tag{6,3}$$

Покажем, что это равенство является также и достаточным условием для существования решения системы (2,3), если оно выполняется для всех решений системы (5,3). Очевидно, это условие будет соблюдено, если оно выполняется для каких-нибудь $(n-r)$ линейно независимых между собой решений системы (5,3). Для доказательства нашего утверждения вспомним из курса высшей алгебры, что достаточным условием существования решения у системы (2,3)

*) Заметим, что утверждение о существовании ровно $(n-r)$ линейно независимых решений у однородных систем (4,3) и (5,3) верно и в первом случае альтернативы, когда $n=r$. Выражение «нуль линейно независимых решений» означает, что имеется лишь решение, состоящее из одних нулей.

в случае, когда ее определитель равен нулю, является следующее условие: ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} 1-K_{11}\Delta\xi & -K_{12}\Delta\xi & \ldots & -K_{1n}\Delta\xi & f_1 \\ -K_{21}\Delta\xi & 1-K_{22}\Delta\xi & \ldots & -K_{2n}\Delta\xi & f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -K_{n1}\Delta\xi & -K_{n2}\Delta\xi & \ldots & 1-K_{nn}\Delta\xi & f_n \end{matrix} \right\| \tag{7,3}$$

должен совпадать с рангом матрицы (3,3).

Для этого достаточно, чтобы равнялись нулю все определители $(r+1)$-го порядка, составленные из элементов матрицы (7,3) и содержащие элементы последнего столбца этой матрицы. Раскрывая такой определитель D_{r+1} по элементам f_k, мы найдем из условия (6,3), что он действительно равен нулю, так как системе (5,3) удовлетворяет ряд чисел

$$z_1, \ z_2, \ \ldots, \ z_n,$$

составленный следующим образом: если i таково, что f_i входит в определитель D_{r+1}, то z_i равно алгебраическому дополнению f_i в этом определителе, в противном случае $z_i=0$ *).

Итак, *во втором случае альтернативы решение неоднородной системы существует тогда и только тогда, если для любого решения* $(z_1, \ldots, z_n)$ *транспонированной однородной системы выполняется условие* (6,3).

Заметим, что если во втором случае альтернативы система (2,3) имеет решение, то это решение не единственное. Действительно, прибавляя к этому решению какое-нибудь решение соответствующей однородной системы, мы опять получим решение системы (2,3).

Когда $\Delta\xi$ стремится к 0, естественно ожидать, что $\sum_q K_{pq}y_q\Delta\xi$ переходит в $\int_a^b K(x, \xi)y(\xi)\,d\xi$, и решение систе-

*) Справедливость этого утверждения можно доказать так. Подставим числа $z_1, z_2, \ldots, z_n$ в j-е уравнение системы (5,3). Если j таково, что в определитель D_{r+1} входят элементы j-го столбца матрицы (7,3), то результат подстановки будет равен 0, так как он будет равен определителю, в котором совпадают два столбца. Если j таково, что элементы j-го столбца не входят в определитель D_{r+1}, то результат подстановки будет равен нулю, так как он будет равен определителю $(r+1)$-го порядка, составленному из элементов матрицы ранга r.

мы уравнений (2,3) переходит в решение интегрального уравнения (1,3). Это действительно имеет место при некоторых предположениях относительно ядра $K(x, \xi)$. Но доказательство этого громоздко, и мы не будем его приводить, хотя для приближенного решения интегрального уравнения (1,3) иногда его заменяют системой (2,3) *). Мы докажем только, что теоремы, сформулированные выше для системы (2,3), переходят в следующие теоремы:

Теорема 1. (Альтернатива). *Или данное неоднородное линейное интегральное уравнение 2-го рода имеет, и притом единственное, решение при всякой функции $f(x)$ (из некоторого достаточно широкого класса), или соответствующее однородное уравнение имеет по крайней мере одно нетривиальное, т. е. не равное нулю тождественно, решение.*

Теорема 2. *Если для данного уравнения* (1,3) *имеет место первый случай альтернативы, то он имеет место и для транспонированного уравнения*

$$z(x) = \int_a^b K(\xi, x) z(\xi) d\xi + f^*(x).$$

Данное однородное интегральное уравнение и транспонированное к нему имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.

Очевидно, если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ удовлетворяют однородному уравнению (1,3), то любая их линейная комбинация $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ с постоянными коэффициентами C_i также удовлетворяет этому уравнению.

Теорема 3. *Во втором случае альтернативы необходимым и достаточным условием существования решения неоднородного уравнения* (1,3) *является условие:*

$$\int_a^b f(x) z(x) dx = 0,$$

где $z(x)$ — любое решение транспонированного к уравнению (1,3) *однородного уравнения.*

---

*) См. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, изд. 5-е, Физматгиз, 1962, гл. II, § 1.

Если это условие выполнено, то уравнение (1,3) имеет бесконечное множество решений, потому что, как легко проверить, тогда этому уравнению будет удовлетворять также любая функция вида

$$y(x)+\varphi(x),$$

где $y(x)$ — какое-нибудь решение уравнения (1,3), а $\varphi(x)$ — любое решение соответствующего однородного уравнения. С другой стороны, ясно, что если уравнению (1,3) удовлетворяют функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то их разность удовлетворяет соответствующему однородному уравнению.

Сформулированные только что теоремы 1, 2, 3 называются *теоремами Фредгольма*, который их впервые доказал для уравнения (1,3) при довольно широких предположениях относительно $K(x, \xi)$ и $f(x)$. Ближайшие параграфы посвящены доказательству этих теорем для некоторых классов уравнений. Число независимых переменных здесь несущественно. Поэтому все доказательства будут проведены для любого числа независимых переменных; вместо x мы будем писать P, вместо ξ будем писать Q, подобно тому как мы это делали в конце § 1. Эти доказательства, как вообще большинство доказательств существования решений уравнений, дают также методы для приближенного решения интегральных уравнений (1,3).

В приложениях особенно важную роль играет первая из теорем Фредгольма — об альтернативе. Вместо того чтобы доказывать, что данное интегральное уравнение (1,3) имеет решение, часто бывает гораздо проще доказать, что соответствующее однородное уравнение или транспонирование к нему имеет только тривиальные решения. А отсюда, по первой теореме Фредгольма, будет следовать, что данное уравнение (1,3) действительно имеет решение.

§ 4. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами

Существует класс интегральных уравнений, которые легко сводятся к линейным алгебраическим уравнениям. Теоремы Фредгольма для этих уравнений непосредственно получаются из теорем, сформулированных в предыдущем параграфе для линейных алгебраических уравнений. Такими интегральными