Если это условие выполнено, то уравнение (1,3) имеет бесконечное множество решений, потому что, как легко проверить, тогда этому уравнению будет удовлетворять также любая функция вида

$$y(x) + \varphi(x),$$

где $y(x)$ — какое-нибудь решение уравнения (1,3), а $\varphi(x)$ — любое решение соответствующего однородного уравнения. С другой стороны, ясно, что если уравнению (1,3) удовлетворяют функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то их разность удовлетворяет соответствующему однородному уравнению.

Сформулированные только что теоремы 1, 2, 3 называются *теоремами Фредгольма*, который их впервые доказал для уравнения (1,3) при довольно широких предположениях относительно $K(x, \xi)$ и $f(x)$. Ближайшие параграфы посвящены доказательству этих теорем для некоторых классов уравнений. Число независимых переменных здесь несущественно. Поэтому все доказательства будут проведены для любого числа независимых переменных; вместо x мы будем писать P, вместо ξ будем писать Q, подобно тому как мы это делали в конце § 1. Эти доказательства, как вообще большинство доказательств существования решений уравнений, дают также методы для приближенного решения интегральных уравнений (1,3).

В приложениях особенно важную роль играет первая из теорем Фредгольма — об альтернативе. Вместо того чтобы доказывать, что данное интегральное уравнение (1,3) имеет решение, часто бывает гораздо проще доказать, что соответствующее однородное уравнение или транспонирование к нему имеет только тривиальные решения. А отсюда, по первой теореме Фредгольма, будет следовать, что данное уравнение (1,3) действительно имеет решение.

§ 4. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами

Существует класс интегральных уравнений, которые легко сводятся к линейным алгебраическим уравнениям. Теоремы Фредгольма для этих уравнений непосредственно получаются из теорем, сформулированных в предыдущем параграфе для линейных алгебраических уравнений. Такими интегральными уравнениями являются интегральные уравнения с так называемыми *вырожденными ядрами*.

Мы докажем сейчас теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденными ядрами и используем этот частный случай в дальнейшем при доказательстве теорем Фредгольма для интегральных уравнений с произвольными непрерывными ядрами.

Ядро называется *вырожденным*, если оно имеет вид

$$K(P,\ Q)=\sum_{i=1}^{m} a_i(P)\, b_i(Q). \tag{1,4}$$

Мы будем предполагать, что $a_i(P)$, $b_i(Q)$, $y(P)$ и $f(P)$ равномерно непрерывны на некоторой конечной области G и что все $a_i(P)$ и все $b_i(Q)$ линейно независимы между собой.

Докажем, что последнее предположение не ограничивает общности. Для этого допустим, что существуют такие постоянные $C_1, \ldots, C_m$, что

$$C_1 a_1(P)+\ldots+C_m a_m(P)\equiv 0,$$

причем хотя бы одно из чисел $C_1, \ldots, C_m$ отлично от 0. Пусть $C_m \neq 0$. Тогда это равенство можно разрешить относительно $a_m(P)$. Получим:

$$a_m(P)=C_1^* a_1(P)+\ldots+C_{m-1}^* a_{m-1}(P).$$

Подставляя это выражение в правую часть (1,4), получим:

$$K(P,\ Q)\equiv \sum_{i=1}^{m-1} a_i(P)\, b_i(Q)+\sum_{i=1}^{m-1} C_i^* a_i(P)\, b_m(Q)\equiv$$
$$\equiv \sum_{i=1}^{m-1} a_i(P)\,[b_i(Q)+C_i^*\, b_m(Q)]\equiv \sum_{i=1}^{m-1} a_i(P)\, b_i^*(Q).$$

Таким образом, ядро $K(P,\ Q)$ оказалось возможным представить в виде суммы меньшего чем m числа произведений функций от P на функции от Q. Если бы функции $a_i(P)$ или $b_i^*(Q)$, $i=1, \ldots, m-1$, опять оказались линейно зависимыми, мы могли бы еще уменьшить это число и т. д.

Как мы уже отмечали, интегральные уравнения с вырожденными ядрами легко сводятся к линейным алгебраическим уравнениям, и для них легко доказываются теоремы Фредгольма. Действительно, допустим, что интегральное уравнение

$$y(P)=\int_G K(P, Q)\,y(Q)\,dQ+f(P), \tag{2,4}$$

где $K(P, Q)$ дается формулой (1,4), имеет решение. Тогда должно быть

$$y(P)=\int\sum_{i=1}^{m} a_i(P)\,b_i(Q)\,y(Q)\,dQ+f(P)$$

или

$$y(P)=\sum_{i=1}^{m} a_i(P)\int b_i(Q)\,y(Q)\,dQ+f(P). \tag{3,4}$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, мы опускаем букву G под знаком интеграла. Символ $\int$ будет всюду означать интеграл, взятый по области G.

Положим

$$\int b_i(Q)\,y(Q)\,dQ=C_i. \tag{4,4}$$

Тогда из уравнения (3,4) получается, что

$$y(P)=\sum_{i=1}^{m} C_i a_i(P)+f(P). \tag{5,4}$$

Чтобы определить постоянные C_i, подставим значение y, даваемое этой формулой, в уравнение (4,4). Получим:

$$\int b_i(Q)\Big[\sum_{j=1}^{m} C_j a_j(Q)+f(Q)\Big]\,dQ=C_i.$$

Полагая

$$\int b_i(Q)\,a_j(Q)\,dQ=K_{ij}, \qquad \int b_i(Q)\,f(Q)\,dQ=f_i, \tag{6,4}$$

из последнего уравнения получим:

$$C_i=\sum_{j=1}^{m} K_{ij}C_j+f_i, \quad i=1, 2, \ldots, m. \tag{7,4}$$

Итак, всякому решению интегрального уравнения (2,4) соответствует решение $(C_1, \ldots, C_m)$ системы (7,4), причем в силу линейной независимости функций $a_i(P)$ только одно. Обратно, если эта система линейных алгебраических уравнений имеет какое-нибудь решение $(C_1, \ldots, C_m)$, то, подставляя его в правую часть (5,4), мы получим решение заданного интегрального уравнения (2,4), так как каждый шаг, сделанный при переходе от (2,4) к (7,4), обратим. Таким образом, задача свелась к исследованию системы (7,4).

Совершенно так же интегральное уравнение

$$z(P) = \int K(Q, P) z(Q)\, dQ + f^*(P), \tag{8,4}$$

транспонированное к уравнению (2,4), сводится к системе

$$C_i^* = \sum_{j=1}^{m} K_{ji} C_j^* + f_i^*, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{9,4}$$

транспонированной к системе (7,4).

В силу предположенной линейной независимости функций $a_i(P)$ и $b_i(Q)$ каждым p линейно независимым решениям однородной системы (7,4) или (9,4) отвечают p линейно независимых решений однородного уравнения (2,4) или соответственно уравнения (8,4), и обратно. (Почему?) Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между решениями интегральных уравнений (2,4) и (8,4), с одной стороны, и решениями линейных алгебраических уравнений (7,4) и (9,4), с другой стороны. При этом решениям транспонированных одно по отношению к другому уравнений (2,4) и (8,4) соответствуют решения транспонированных уравнений (7,4) и (9,4).

Отсюда прямо вытекают первые две теоремы Фредгольма для интегрального уравнения (2,4), так как они справедливы для алгебраической линейной системы (7,4). (Проверьте!)

Чтобы доказать третью из этих теорем, заметим следующее. Если имеет место второй случай альтернативы для системы (7,4), то необходимым и достаточным условием существования решения системы (7,4) является условие

$$\sum_{i=1}^{m} f_i C_i^* = 0,$$

где $(C_1^*, \ldots, C_m^*)$ — любое решение транспонированной однородной системы. Пользуясь равенствами (6,4), это условие перепишем так:

$$\sum_{i=1}^{m} C_i^* \int f(Q)\, b_i(Q)\, dQ = 0,$$

или:

$$\int f(Q)\left(\sum_{i=1}^{m} C_i^* b_i(Q)\right) dQ = 0. \tag{10,4}$$

Если $(C_1^*, \ldots, C_m^*)$ есть решение однородной системы (9,4), то $\sum C_i^* b_i(Q)$ есть решение однородного уравнения (8,4), транспонированного к уравнению (2,4). Поэтому условие (10,4) эквивалентно условию, чтобы

$$\int f(Q)\, z(Q)\, dQ = 0$$

для всякого решения $z(Q)$ однородного уравнения (8,4). Отсюда прямо следует третья теорема Фредгольма для уравнения (2,4).

Замечания. 1. Часто бывает, что ядро $K(P, Q)$ и функция $f(P)$ суть комплексные функции от действительных точек P и Q. Тогда и решения $y(P)$ интегрального уравнения (2,4) будут, вообще говоря, комплексными функциями действительной точки P. При этом сохраняются все доказанные в этом параграфе теоремы. Напомним, что если

$$\varphi(P) = \varphi_1(P) + i\varphi_2(P),$$

где $\varphi_1(P)$ и $\varphi_2(P)$ — действительные функции действительной точки P, то по определению

$$\int \varphi(P)\, dP = \int \varphi_1(P)\, dP + i \int \varphi_2(P)\, dP.$$

2. Часто бывает, что $a_i(P)$ и $b_i(Q)$ являются функциями от некоторого комплексного параметра λ. Рассуждения настоящего параграфа показывают, что для уравнения (2,4) имеет место первый или второй случай альтернативы Фредгольма в зависимости от того, равняется ли 0 или не равняется 0 определитель, составленный из коэффициентов системы (7,4), т. е. определитель

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-K_{11} & -K_{12} \ldots & -K_{1m} \\ -K_{21} & 1-K_{22} \ldots & -K_{2m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -K_{m1} & -K_{m2} \ldots & 1-K_{mm} \end{vmatrix}, \tag{11,4}$$

где
$$K_{ij}=\int b_i(Q, \lambda)\, a_j(Q, \lambda)\, dQ.$$

Пусть $a_j(Q, \lambda)$ и $b_i(Q, \lambda)$ при каждом Q из G суть голоморфные функции от λ в некоторой конечной области Λ комплексной плоскости. Мы будем предполагать, что $a_j(Q, \lambda)$ и $b_i(Q, \lambda)$ равномерно непрерывны по совокупности (Q, λ). Тогда K_{ij} и определитель (11,4) также суть голоморфные функции от λ*). Поэтому те значения λ, при которых определитель (11,4) равен 0 и потому имеет место второй случай альтернативы для (2,4), не могут иметь конечных предельных точек внутри Λ, если только определитель (11,4) отличен от 0 хотя бы при одном $\lambda \in \Lambda$.

3. Пусть K_{ij} и f_i — голоморфные функции $\lambda \in \Lambda$. Так будет, в частности, если $a_j(Q, \lambda)$ и $b_i(Q, \lambda)$ обладают перечисленными в замечании 2 свойствами, а $f(Q)$ — равномерно непрерывная функция Q, что мы и будем предполагать для простоты.

По известным правилам теории определителей коэффициенты C_i находятся из уравнений (7,4) в виде дробей, у которых знаменателем при всех i является один и тот же определитель (11,4), а в числителе стоит определитель D_i, получающийся из определителя (11,4) заменой его i-й колонки колонкой $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Раскрывая D_i по элементам этой последней колонки, получим:
$$C_i=\frac{\sum\limits_j M_{ij} f_j}{D(\lambda)},$$
где M_{ij} суть многочлены от K_{ij}. Подставляя только что найденные значения C_i в правую часть (5,4) и пользуясь формулами (6,4) для f_i, найдем:
$$y(P)=\frac{\int \sum\limits_{ij} M_{ij} b_j(Q, \lambda)\, a_i(P, \lambda)\, f(Q)\, dQ}{D(\lambda)}+f(P). \qquad (12,4)$$

---

*) Это нетрудно показать, представляя интеграл в виде предела интегральной суммы и пользуясь известной теоремой Вейерштрасса о том, что если последовательность голоморфных функций равномерно сходится в некоторой области, то предельная функция будет голоморфной в той же области (И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, изд. 10-е, Физматгиз, 1960, гл. 5, § 1).

Числитель (при каждом фиксированном P) и знаменатель дроби, стоящей в правой части последнего равенства, суть голоморфные функции λ в области Λ.

Часто бывает полезным писать равенство (12,4) в следующем виде:

$$y(P)=\int \overline{\Gamma}(P,\ Q,\ \lambda)f(Q)\,dQ+f(P), \tag{13,4}$$

где

$$\overline{\Gamma}(P,\ Q,\ \lambda)=\frac{\sum\limits_{ij} M_{ij}b_j(Q,\ \lambda)\,a_i(P,\ \lambda)}{D(\lambda)}\,. \tag{14,4}$$

Функция $\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda)$ не зависит от $f(P)$ и, как показывает формула (14,4), представляется в виде частного от двух голоморфных во всей области Λ функций λ. $\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda)$ может не быть голоморфной функцией λ только при тех значениях λ, где $D(\lambda)=0$, т. е. при которых для интегрального уравнения (2,4) имеет место второй случай альтернативы Фредгольма. В предыдущем пункте было показано, что такие значения λ не имеют предельных точек внутри Λ, если только $D(\lambda)$ не равно 0 тождественно, что мы будем предполагать. Легко показать, что каждое такое значение $\lambda=\lambda_0$, где $D(\lambda_0)=0$, действительно является особым для $\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda)$ в следующем смысле: $\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda)$ не является равномерно непрерывной функцией (P, Q, λ), когда λ находится в произвольно малой окрестности точки λ_0, а P и Q меняются в G.

В самом деле, допустим противное. Пусть функция $y(P, \lambda)$, определенная формулой (13,4), будет равномерно непрерывна, если $P\in G$, а λ меняется в некоторой окрестности точки λ_0. Подставим тогда правую часть (13,4) или, что все равно, (12,4) в обе части уравнения (2,4). Результаты подстановок будут при всякой равномерно непрерывной функции $f(Q)$ равномерно непрерывными функциями при той же области изменения P и λ. Мы знаем, что эти результаты совпадают, когда $\lambda\neq\lambda_0$ и $|\lambda-\lambda_0|$ достаточно мало, так как тогда $D(\lambda)\neq 0$. Значит, по непрерывности эти результаты совпадают и при $\lambda=\lambda_0$. Следовательно, при всякой функции $f(P)$ рассматриваемого класса интегральное уравнение (2,4) имеет решение при $\lambda=\lambda_0$: оно дается формулой (13,4) при $\lambda=\lambda_0$, где $\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda)$ определено при

$\lambda=\lambda_0$ по непрерывности. Но тогда при этом значении λ для уравнения (2,4) имеет место первый случай альтернативы Фредгольма, а не второй, и потому $D(\lambda_0)\neq 0$*).

Пример.

$$y(x)=-\lambda\int_0^1(x^2\xi+x\xi^2)\,y(\xi)\,d\xi+f(x).$$

Отсюда

$$y(x)=-\lambda\left[x^2\int_0^1\xi y(\xi)\,d\xi+x\int_0^1\xi^2 y(\xi)\,d\xi\right]+f(x).$$

Полагая

$$\int_0^1\xi y(\xi)\,d\xi=C_2 \quad\text{и}\quad \int_0^1\xi^2 y(\xi)\,d\xi=C_1, \tag{15,4}$$

получим:

$$y(x)=f(x)-C_1\lambda x-C_2\lambda x^2. \tag{16,4}$$

Подставляя это выражение y в равенства (15,4), получим

$$\int_0^1\xi[f(\xi)-C_1\lambda\xi-C_2\lambda\xi^2]\,d\xi=C_2,\quad \int_0^1\xi^2[f(\xi)-C_1\lambda\xi-C_2\lambda\xi^2]\,d\xi=C_1$$

или

$$b_1-\frac{C_1\lambda}{3}-\frac{C_2\lambda}{4}=C_2,\qquad b_2-\frac{C_1\lambda}{4}-\frac{C_2\lambda}{5}=C_1, \tag{17,4}$$

где

$$b_1=\int_0^1\xi f(\xi)\,d\xi \quad\text{и}\quad b_2=\int_0^1\xi^2 f(\xi)\,d\xi.$$

Перепишем уравнения (17,4) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} C_1\frac{\lambda}{3}+C_2\left(1+\frac{\lambda}{4}\right)&=b_1,\\ C_1\left(1+\frac{\lambda}{4}\right)+C_2\frac{\lambda}{5}&=b_2.\end{aligned}\right\} \tag{18,4}$$

---

*) Предыдущие рассуждения легко переносятся на случай, когда $a_i(Q,\lambda)$, $b_i(Q,\lambda)$, $f(Q)$ имеют разрывы по Q на некоторых точках, достаточно гладких линиях и поверхностях до $(d-1)$-го измерения включительно, независимых от λ, если при подходе точки Q к местам разрыва $|a_i(Q,\lambda)|$, $|b_i(Q,\lambda)|$, $|f(Q)|$ не очень быстро растут. Решения будут неопределенными в тех точках P, где $a_i(P,\lambda)$ и $f(P)$ не определены.

Определитель этой системы равен

$$1+\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda^2}{240}.$$

Он имеет только два корня

$$\lambda=60\pm 16\sqrt{15}.$$

Только при этих двух значениях λ имеет место второй случай альтернативы Фредгольма. В этих случаях все решения однородного интегрального уравнения

$$y(x)+\lambda\int_0^1 (x^2\xi+x\xi^2)\,y(\xi)\,d\xi=0$$

даются формулами

$$y(x)=C\left(x\mp\frac{5}{\sqrt{15}}x^2\right),$$

где C — произвольное постоянное. При других же значениях λ наше интегральное уравнение имеет единственное решение, даваемое формулой (16,4), где C_1 и C_2 определяются единственным образом из системы (18,4). Это решение можно представить в виде (13,4), где

$$\bar{\Gamma}(x,\xi,\lambda)=\lambda\,\frac{\dfrac{\xi x}{5}\lambda-\left(1+\dfrac{\lambda}{4}\right)\xi^2x-\xi x^2\left(1+\dfrac{\lambda}{4}\right)+\xi^2x^2\dfrac{\lambda}{3}}{1+\dfrac{\lambda}{2}-\dfrac{\lambda^2}{240}}.$$

Задачи. Найти $u(x)$ из уравнений

1. $u(x)=e^x+\lambda\int_0^{10} xt\,u(t)\,dt.$

2. $u(x)=\lambda\int_0^{\pi}\sin x\,u(t)\,dt.$

3. $u(x)=\lambda\int_0^{\pi}\cos x\,u(t)\,dt.$

4. $u(x)=x+\lambda\int_0^{1}(x-t)\,u(t)\,dt.$

5. $u(x)=\lambda\int_0^{2\pi}\sin x\sin t\,u(t)\,dt+f(x).$