§ 5. Интегральные уравнения с достаточно малыми по абсолютной величине непрерывными ядрами

Для таких уравнений всегда имеет место первый случай альтернативы, т. е. такие уравнения всегда имеют единственное решение. Доказывается это методом последовательных приближений, как в теории обыкновенных дифференциальных уравнений доказываются существование и единственность решения одного интегрального уравнения, эквивалентного заданному дифференциальному уравнению и начальным условиям. По существу, это — применение принципа сжатых отображений, изложенного, например, в моей книге по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Я мог бы здесь только проверить возможность применения этого общего принципа, но я предпочту провести доказательство для данного конкретного случая, так как при этом мы получим некоторые формулы, полезные для дальнейшего.

Введем символические обозначения, которыми мы иногда будем пользоваться в дальнейшем. Пусть $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$ — равномерно непрерывные функции P и Q, когда $P \in G$ и $Q \in G$. Положим

$$K_2 \circ K_1 = \int K_2(P, S) K_1(S, Q)\, dS. \qquad (1,5)$$

Назовем ядро $K(P, Q) = K_2 \circ K_1$ символическим произведением ядра $K_2(P, Q)$ на $K_1(P, Q)$ *). Легко показать, что

*) Введенное таким образом символическое умножение ядер аналогично умножению матриц.

Пусть функция $\varphi_1(P)$ преобразуется с помощью ядра $K_1(P, Q)$ в функцию $\varphi_2(P) = \int K_1(P, Q)\, \varphi_1(Q)\, dQ$, а функция $\varphi_2(P)$ преобразуется с помощью ядра $K_2(P, Q)$ в функцию $\varphi_3(P) = \int K_2(P, Q) \varphi_2(Q) dQ$. Тогда ядро $K_2 \circ K_1$ задает преобразование функции $\varphi_1(P)$ в $\varphi_3(P)$, т. е. $\varphi_3 = \int (K_2 \circ K_1)\, \varphi_1(Q)\, dQ$. Точно так же последовательное применение в n-мерном пространстве двух линейных преобразований дает линейное преобразование с матрицей, равной произведению матриц этих преобразований.

$K_2 \circ K_1$ есть равномерно непрерывная функция P и Q. Действительно,

$$\left|\int K_2(P_1, S) K_1(S, Q_1)\, dS - \int K_2(P_2, S) K_1(S, Q_2)\, dS\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int K_2(P_1, S)[K_1(S, Q_1) - K_1(S, Q_2)]\, dS\right| +$$
$$+ \left|\int K_1(S, Q_2)[K_2(P_1, S) - K_2(P_2, S)]\, dS\right|. \tag{2,5}$$

Пусть верхняя граница абсолютных значений $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$, когда $P \in G$ и $Q \in G$, не превосходит M, и D — объем области G. В силу равномерной непрерывности $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$ для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что

$$|K_2(P_1, S) - K_2(P_2, S)| < \frac{\varepsilon}{2DM}$$

и

$$|K_1(S, Q_1) - K_1(S, Q_2)| < \frac{\varepsilon}{2DM},$$

если расстояние между точками P_1 и P_2 и между точками Q_1 и Q_2 меньше η. Легко видеть, что при этом условии левая часть неравенства (2,5) будет меньше ε, что и требовалось доказать. Заметим, что, вообще говоря, $K_2 \circ K_1 \neq K_1 \circ K_2$. Если $K_3(P, Q)$ — равномерно непрерывная функция P и Q, то легко проверить, что

$$K_1 \circ (K_2 \circ K_3) = (K_1 \circ K_2) \circ K_3.$$

Переходим теперь к доказательству того, что интегральные уравнения с достаточно малыми по абсолютной величине непрерывными ядрами всегда имеют единственное решение. Этим мы воспользуемся в дальнейшем для доказательства теорем Фредгольма в случае интегрального уравнения с любым непрерывным ядром.

Пусть дано интегральное уравнение

$$y(P) = \lambda \int K(P, Q)\, y(Q)\, dQ + f(P). \tag{3,5}$$

Пусть $K(P, Q)$ и $f(P)$ — некоторые равномерно непрерывные функции, когда $P \in G$ и $Q \in G$, где G — некоторая конечная область *). Здесь λ — некоторый параметр. Обычно он входит в уравнение именно так, как указано в (3,5).

Все дальнейшие рассуждения этого параграфа одинаково применимы как в том случае, когда рассматриваемые функции принимают комплексные значения, так и в том случае, если они принимают только действительные значения. Параметр λ тоже может принимать комплексные значения. Но очень существенно, что точки P и Q действительны, т. е. что все координаты этих точек действительны, иначе возникла бы необходимость определить, что такое интеграл по многим комплексным переменным.

Следуя в точности тому определению ядра, которое было дано прежде, нам следовало бы теперь называть ядром $\lambda K(P, Q)$. Но, пользуясь обычной терминологией, мы будем функцию $K(P, Q)$ также называть ядром интегрального уравнения (3,5). Говоря в заголовке настоящего параграфа о малости ядра, мы имели в виду малость $\lambda K(P, Q)$.

Мы будем искать решение интегрального уравнения (3,5) в виде бесконечного степенного ряда по λ

$$y(P) = y_0(P) + \lambda y_1(P) + \lambda^2 y_2(P) + \ldots \tag{4,5}$$

Подставляя формально этот ряд в (3,5), получим:

$$y_0(P) + \lambda y_1(P) + \lambda^2 y_2(P) + \lambda^3 y_3(P) + \ldots = \\ = \lambda \int K(P, Q)\,[y_0(Q) + \lambda y_1(Q) + \ldots]\,dQ + f(P). \tag{5,5}$$

---

*) Вместо того чтобы каждый раз подчеркивать равномерную непрерывность рассматриваемых на открытой области G функций, можно было бы рассматривать эти функции на конечной замкнутой области $\bar{G}$ (т. е. на G вместе с ее границей) и требовать только их непрерывность; тогда отсюда прямо следовала бы и равномерная непрерывность этих функций. Если задана какая-нибудь равномерно непрерывная на открытой области G функция φ, то ее можно продолжить по непрерывности и на границу области G. Тогда получится функция, равномерно непрерывная на замкнутой области $\bar{G}$. Для тех простых областей, которые мы будем рассматривать (ср. замечание к § 1), d-мерный объем границы равен 0. Тогда интеграл от функции φ по области G совпадает с интегралом от ее продолжения по $\bar{G}$.

Отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим:

$$y_0(P)=f(P),$$
$$y_{k+1}(P)=\int K(P, Q)\, y_k(Q)\, dQ, \quad k=0, 1, 2, \ldots \tag{6,5}$$

или

$$y_0(P)=f(P),$$
$$y_1(P)=\int K(P, P_1) f(P_1)\, dP_1,$$
$$y_2(P)=\int\int K(P, P_1) K(P_1, P_2) f(P_2)\, dP_1\, dP_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_k(P)=\overbrace{\int\ldots\int}^{k \text{ раз}} K(P, P_1)\, K(P_1, P_2)\ldots K(P_{k-1}, P_k) f(P_k)\times$$
$$\times\, dP_1\ldots dP_k. \tag{7,5}$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$y_k(P)=\int K^{(k)}(P, Q) f(Q)\, dQ, \quad k=1, 2, 3, \ldots, \tag{8,5}$$

где

$$K^{(k)}(P, Q)=\overbrace{\int\ldots\int}^{(k-1) \text{ раз}} K(P, P_1)\ldots K(P_{k-1}, Q)\, dP_1\ldots dP_{k-1}$$
$$\text{при } k=2, 3, \ldots, \tag{9,5}$$
$$K^1(P, Q)=K(P, Q).$$

Пользуясь символическими обозначениями, мы можем ядро $K^{(k)}(P, Q)$ представить в виде

$$K^{(k)}(P, Q)=\underbrace{K\circ K\circ K\circ\ldots\circ K.}_{k \text{ раз}} \tag{10,5}$$

По доказанному в начале этого параграфа все ядра $K^{(k)}(P, Q)$ равномерно непрерывны. Функция $K^{(k)}(P, Q)$ называется *k-м повторением ядра* или *k-й итерацией ядра* $K(P, Q)$. Все функции $y_k(P)$, как легко видеть, также равномерно непрерывны.

Оценим ядра $K^{(k)}(P, Q)$. В силу равномерной непрерывности ядро $K(P, Q)$ ограничено. Пусть

$$|K(P, Q)|<M. \tag{11,5}$$

Подставляя эту оценку в правую часть (9,5), получим:

$$|K^{(k)}(P, Q)| \leqslant M^k \cdot D^{k-1}, \tag{12,5}$$

где D означает объем области G. Пользуясь формулой (8,5), мы получим отсюда

$$|y_k(P)| \leqslant M^k D^k F,$$

где F есть верхняя грань $|f(P)|$. Поэтому ряд (4,5) сходится абсолютно и равномерно по P в области G, если

$$|\lambda| < \frac{1}{MD}. \tag{13,5}$$

Сумма этого ряда будет непрерывной функцией P, так как каждое слагаемое непрерывно. В силу равномерной сходимости ряда (4,5) интегрирование в ранее формально написанном равенстве (5,5) можно производить почленно. Поэтому благодаря определению $y_k(P)$ по формулам (6,5) равенство (5,5) действительно имеет место, т. е. функция $y(P)$, определенная рядом (4,5), является решением интегрального уравнения (3,5).

Покажем, что это решение единственное в классе ограниченных функций при условии (13,5). Действительно, допустим, что существуют два таких решения уравнения (3,5) $y_1(P)$ и $y_2(P)$. Подставляя их в уравнение (3,5) и вычитая почленно полученные тождества, найдем:

$$y_2(P) - y_1(P) = \lambda \int K(P, Q)[y_2(Q) - y_1(Q)]\, dQ. \tag{14,5}$$

Обозначим через Y верхнюю грань $|y_2(P) - y_1(P)|$; тогда из (14,5), пользуясь неравенством (11,5), найдем:

$$Y \leqslant |\lambda| MDY.$$

Отсюда на основании (13,5) получим:

$$Y \leqslant cY, \text{ где } c < 1.$$

Это возможно, только если $Y = 0$, что и требовалось доказать.

Часто бывает удобно представить решение интегрального уравнения (3,5) в следующем виде:

$$y(P) = \lambda \int \Gamma(P, Q, \lambda) f(Q)\, dQ + f(P), \tag{15,5}$$

где

$$\Gamma(P, Q, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} K^{(k)}(P, Q). \tag{16,5}$$

Из оценок (12,5) следует что ряд (16,5) сходится равномерно по (P, Q, λ), если $P \in G$, $Q \in G$ и $|\lambda| < \frac{1}{MD} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Отсюда функция $\Gamma(P, Q, \lambda)$ есть равномерно непрерывная функция по совокупности (P, Q) при фиксированном λ и голоморфная функция от λ в круге (13,5), если $P \in G$ и $Q \in G$. Поэтому интеграл (15,5) существует. Что он действительно дает решение интегрального уравнения (3,5) представленное рядом (4,5), легко увидеть, если подставить вместо $\Gamma(P, Q, \lambda)$ ряд (16,5) в правую часть (15,5) и интегрирование по Q выполнить почленно.

Функция $\Gamma(P, Q, \lambda)$ называется *резольвентой* интегрального уравнения (3,5) *). Как видно из предыдущего, она определяется ядром интегрального уравнения и не зависит от $f(P)$. Так как функция $y(P)$, даваемая формулой (15,5), представляет единственное решение уравнения (3,5), то отсюда следует, что уравнения (3,5) и (15,5) эквивалентны. Поэтому,

---

*) Сравним (15,5) с (13,4). Покажем, что для интегральных уравнений (3,5) с вырожденными ядрами, для которых $a_i(P)$ и $b_i(P)$ равномерно непрерывны и достаточно малы по абсолютной величине, т. е. для тех интегральных уравнений, которые принадлежат одновременно к типам, рассмотренным в §§ 4 и 5, будет

$$\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda) = \lambda\Gamma(P, Q, \lambda).$$

Так как при этом имеет место первый случай альтернативы, то $D(\lambda) \neq 0$.

Допустим, что в некоторой точке (P_0, Q_0, λ_0)

$$\overline{\Gamma}(P_0, Q_0, \lambda_0) \neq \lambda_0\Gamma(P_0, Q_0, \lambda_0), \quad D(\lambda_0) \neq 0.$$

Так как для уравнений с рассматриваемыми ядрами $\overline{\Gamma}(P_0, Q, \lambda_0)$ и $\Gamma(P_0, Q, \lambda_0)$ непрерывны по Q, то всегда можно найти такую окрестность G_0 точки Q_0, в которой всюду

$$\operatorname{Re}\{\overline{\Gamma}(P_0, Q, \lambda_0)\} \neq \operatorname{Re}\{\lambda_0\Gamma(P_0, Q, \lambda_0)\}$$

или

$$\operatorname{Im}\{\overline{\Gamma}(P_0, Q, \lambda_0)\} \neq \operatorname{Im}\{\lambda_0\Gamma(P_0, Q, \lambda_0)\}.$$

С другой стороны, в силу единственности решения интегральных уравнений рассматриваемого типа при любой равномерно непрерывной функции $f(P)$ должно иметь место следующее равенство:

$$\int \overline{\Gamma}(P_0, Q, \lambda_0) f(Q)\, dQ = \lambda_0 \int \Gamma(P_0, Q, \lambda_0) f(Q)\, dQ.$$

В частности, это равенство должно выполняться при функции $f(Q)$, равной нулю всюду вне окрестности G_0 точки Q_0 и положительной внутри этой окрестности, что невозможно. (Почему?)

если в уравнении (15,5) считать $y(P)$ известной функцией, а $f(P)$ неизвестной функцией, то единственное решение $f(P)$ этого уравнения дается формулой (3,5). Функция $K(P, Q)$ в этой формуле играет роль резольвенты для уравнения (15,5) с ядром $\Gamma(P, Q, \lambda)$.

Применяя к уравнению

$$z(P) = \lambda \int K(Q, P) z(Q)\, dQ + f(P), \tag{17,5}$$

транспонированному к уравнению (3,5), те же рассуждения, какие мы только что провели для уравнения (3,5), мы найдем, что в круге (13,5) оно имеет единственное в классе ограниченных функций решение, которое дается рядом

$$z(P) = z_0(P) + \lambda z_1(P) + \lambda^2 z_2(P) + \lambda^3 z_3(P) + \ldots$$

Здесь

$$z_0(P) = f(P),$$
$$z_k(P) = \int K(Q, P) z_{k-1}(Q)\, dQ$$

или, обозначая через $K^*(P, Q)$ ядро $K(Q, P)$, получим:

$$z_1(P) = \int K^*(P, P_1) f(P_1)\, dP_1,$$

$$z_k(P) = \overbrace{\int \cdots \int}^{k \text{ раз}} K^*(P, P_1) K^*(P_1, P_2) \ldots K^*(P_{k-1}, P_k) \times \\ \times f(P_k)\, dP_1 \ldots dP_k$$

или

$$z_k(P) = \int K^{*(k)}(P, Q) f(Q)\, dQ, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где

$$K^{*(k)}(P, Q) = \\ = \overbrace{\int \cdots \int}^{k-1 \text{ раз}} K^*(P, P_1) \ldots K^*(P_{k-1}, Q)\, dP_1 \ldots dP_{k-1}.$$

Легко видеть, выписывая соответствующие интегралы, что $K^{*(k)}(P, Q) = K^{(k)}(Q, P)$. Отсюда следует, что решение уравнения (17,5) можно представить в виде

$$z(P) = \lambda \int \Gamma^*(P, Q, \lambda) f(Q)\, dQ + f(P), \tag{18,5}$$

где

$$\Gamma^*(P, Q, \lambda) = \Gamma(Q, P, \lambda).$$

Таким образом, мы видим, что *в круге* (13,5) *как уравнение* (3,5), *так и транспонированное к нему уравнение* (17,5) *при всякой равномерно непрерывной функции* $f(P)$ *и при сделанных предположениях о ядре имеют единственное решение*, т. е. мы доказали, что в этом случае всегда имеет место первый случай альтернативы Фредгольма.

Отметим следующие две формулы:

$$\Gamma(P, Q, \lambda) = K(P, Q) + \lambda \int K(P, P_1)\,\Gamma(P_1, Q, \lambda)\,dP_1, \qquad (19,5)$$

$$\Gamma(P, Q, \lambda) = K(P, Q) + \lambda \int \Gamma(P, P_1, \lambda)\,K(P_1, Q)\,dP_1. \qquad (20,5)$$

Для проверки этих формул достаточно подставить вместо Γ ряд (16,5), а затем сравнить коэффициенты при одинаковых степенях λ, воспользовавшись формулой (10,5).

Методом последовательных приближений можно пользоваться для приближенного решения интегральных уравнений при достаточно малом $|\lambda|$ *).

§ 6. Интегральные уравнения с ядрами, близкими к вырожденным

Пусть дано интегральное уравнение

$$y(P) = \lambda \int K(P, Q)\,y(Q)\,dQ + f(P), \qquad (1,6)$$

где $f(P)$ — равномерно непрерывная функция, а

$$K(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} a_i(P)\,b_i(Q) + K_1(P, Q) = A(P, Q) + K_1(P, Q).$$

Здесь $a_i(P)$, $b_i(Q)$, $K_1(P, Q)$ — равномерно непрерывные и, следовательно, ограниченные функции, так как их области определения конечны. Нам опять безразлично, принимают ли эти функции комплексные значения или только действительные.

Чтобы последующие довольно громоздкие выкладки не затемняли существа дела, нам будет удобнее записывать интегральные уравнения в символической форме.

---

*) Ср. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, изд. 5-е, Физматгиз, 1962, гл. II, § 2.