Таким образом, мы видим, что *в круге* (13,5) *как уравнение* (3,5), *так и транспонированное к нему уравнение* (17,5) *при всякой равномерно непрерывной функции* $f(P)$ *и при сделанных предположениях о ядре имеют единственное решение*, т. е. мы доказали, что в этом случае всегда имеет место первый случай альтернативы Фредгольма.

Отметим следующие две формулы:

$$\Gamma(P, Q, \lambda) = K(P, Q) + \lambda \int K(P, P_1)\, \Gamma(P_1, Q, \lambda)\, dP_1, \qquad (19,5)$$

$$\Gamma(P, Q, \lambda) = K(P, Q) + \lambda \int \Gamma(P, P_1, \lambda)\, K(P_1, Q)\, dP_1. \qquad (20,5)$$

Для проверки этих формул достаточно подставить вместо Γ ряд (16,5), а затем сравнить коэффициенты при одинаковых степенях λ, воспользовавшись формулой (10,5).

Методом последовательных приближений можно пользоваться для приближенного решения интегральных уравнений при достаточно малом $|\lambda|$ *).

§ 6. Интегральные уравнения с ядрами, близкими к вырожденным

Пусть дано интегральное уравнение

$$y(P) = \lambda \int K(P, Q)\, y(Q)\, dQ + f(P), \qquad (1,6)$$

где $f(P)$ — равномерно непрерывная функция, а

$$K(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} a_i(P)\, b_i(Q) + K_1(P, Q) = A(P, Q) + K_1(P, Q).$$

Здесь $a_i(P)$, $b_i(Q)$, $K_1(P, Q)$ — равномерно непрерывные и, следовательно, ограниченные функции, так как их области определения конечны. Нам опять безразлично, принимают ли эти функции комплексные значения или только действительные.

Чтобы последующие довольно громоздкие выкладки не затемняли существа дела, нам будет удобнее записывать интегральные уравнения в символической форме.

*) Ср. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, изд. 5-е, Физматгиз, 1962, гл. II, § 2.

Равенство

$$\psi(P)=\int K(P, Q)\, y(Q)\, dQ \tag{2,6}$$

условимся записывать символически в виде

$$\psi=Ky.$$

Таким образом, через K мы будем обозначать оператор, который функцию $y(P)$ переводит в функцию $\psi(P)=$ $=\int K(P, Q)\, y(Q)\, dQ$. Этот оператор определяется ядром $K(P, Q)$. Через K^* будем обозначать оператор, который определяется транспонированным ядром $K^*(P, Q)=K(Q, P)$. Символом E будем обозначать оператор, который функцию $y(P)$ переводит в эту же функцию, т. е. $Ey=y$ при всякой функции $y(P)$. Оператор $K_1 \pm K_2$ определяем равенством

$$(K_1 \pm K_2)\, y=K_1 y \pm K_2 y$$

при любой функции $y(P)$. Оператор $K_1 K_2$ определяем при помощи следующего равенства:

$$K_1 K_2 y=K_1 (K_2 y)$$

для любой функции $y(P)$.

Легко видеть, что если K_1 и K_2 — операторы вида (2,6) с ядрами $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$, то оператор $K_1 \pm K_2$ определяется ядром $K_1(P, Q) \pm K_2(P, Q)$, а оператор $K_1 K_2$ определяется ядром $K_1 \circ K_2$.

Таким образом, уравнение (1,6) можно записать в виде

$$(E-\lambda K)\, y=f.$$

Прежде чем переходить к доказательству теорем Фредгольма для уравнения (1,6), сформулируем следующие леммы:

Лемма 1. *Если* $A(P, Q)$ — *вырожденное ядро и* $K(P, Q)$ — *произвольное непрерывное ядро, то* $A \circ K$ *и* $K \circ A$ *также суть вырожденные ядра.*

Лемма 2. *Ядро, транспонированное к* $K_1 \circ K_2$, *равно* $K_2^* \circ K_1^*$.

В справедливости этих утверждений легко убедиться, рассматривая соответствующие интегралы.

Докажем теперь, что для уравнения (1,6) при $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$, где M_1 есть верхняя грань значений $|K_1(P, Q)|$, а D — объем области G, справедливы три теоремы Фредгольма.

1. Первая теорема Фредгольма. Покажем, что если однородное уравнение (1,6) имеет только тривиальное решение, то неоднородное уравнение (1,6) имеет решение при всякой функции $f(P)$.

Заменив K на $A + K_1$, перепишем уравнение (1,6) в виде

$$(E - \lambda A - \lambda K_1)\, y = f,$$

где A и K_1 — операторы, соответствующие ядрам $A(P, Q)$ и $K_1(P, Q)$. Тогда

$$(E - \lambda K_1)\, y = \lambda A y + f. \tag{3,6}$$

Положим

$$(E - \lambda K_1)\, y = \eta. \tag{4,6}$$

Так как $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$, то из доказанной в предыдущем параграфе формулы (15,5) следует, что

$$y = \eta + \lambda \Gamma \eta = (E + \lambda \Gamma)\eta, \tag{5,6}$$

где $\mathbf{\Gamma}$ — оператор, соответствующий резольвенте $\mathbf{\Gamma}(P, Q, \lambda)$ ядра $K_1(P, Q)$. Подставляя это выражение $y(P)$ в уравнение (3,6), получим:

$$\eta = \lambda A (E + \lambda \Gamma)\eta + f$$

или

$$[E - \lambda A (E + \lambda \Gamma)]\, \eta = f. \tag{6,6}$$

Ядро $A(P, Q) + A \circ \lambda \Gamma$ этого интегрального уравнения вырожденное, как это следует из леммы 1. Таким образом, мы показали, что каждому решению $y(P)$ уравнения (1,6) соответствует по формуле (4,6) решение $\eta(P)$ уравнения (6,6) с вырожденным ядром.

Обратно, легко проверить, что каждому решению $\eta(P)$ уравнения (6,6) соответствует решение $y(P)$ уравнения (1,6), определенное по формуле (5,6). Далее, если однородное уравнение (6,6) имеет нетривиальное решение, то однородное уравнение (1,6) также имеет нетривиальное решение, которое определяется формулой (5,6).

Так как, по предположению, однородное уравнение (1,6) имеет только тривиальное решение, то, следовательно, однородное уравнение (6,6) также имеет только тривиальное решение.

Для уравнения (6,6) с вырожденным ядром мы доказали в § 4 первую теорему Фредгольма. Поэтому неоднородное уравнение (6,6) имеет решение $\eta(P)$ при всякой функции $f(P)$. По формуле (5,6) мы получим решение $y(P)$ уравнения (1,6) при любой функции $f(P)$. Это решение, очевидно, единственное.

Тем самым первая теорема Фредгольма доказана, так как если однородное уравнение имеет нетривиальное решение, то неоднородное уравнение либо не имеет решения, либо это решение не единственное.

2. Вторая теорема Фредгольма. Покажем, что уравнение $(E-\lambda A-\lambda K_1)y=0$ и транспонированное к нему уравнение

$$(E-\lambda A^*-\lambda K_1^*)z=0 \tag{7,6}$$

имеют одинаковое число линейно независимых решений, если $|\lambda|<\frac{1}{M_1 D}$.

Заметим, что однородные уравнения (1,6) и (6,6) имеют одинаковое число линейно независимых решений, так как каждым p линейно независимым решениям одного уравнения соответствует по формуле (4,6) или (5,6) p линейно независимых решений другого уравнения.

Однородное уравнение, транспонированное к уравнению (6,6), имеет в силу леммы 2 вид

$$[E-\lambda(E+\lambda\Gamma^*)A^*]\zeta=0. \tag{8,6}$$

Так как уравнение (6,6) имеет вырожденное ядро, то по второй теореме Фредгольма, доказанной в § 4 для уравнений с вырожденными ядрами, однородные уравнения (6,6) и (8,6) имеют одинаковое число линейно независимых решений. Покажем теперь, что уравнения (8,6) и (7,6) эквивалентны. Пусть некоторая функция $\zeta(P)$ есть решение уравнения (8,6). Покажем, что она удовлетворяет также уравнению (7,6). Применяя к правой и левой частям равенства (8,6) оператор $E-\lambda K_1^*$, мы получим:

$$(E-\lambda K_1^*)[E-\lambda(E+\lambda\Gamma^*)A^*]\zeta=$$
$$=[E-\lambda K_1^*-\lambda(E-\lambda K_1^*)(E+\lambda\Gamma^*)A^*]\zeta=0. \tag{9,6}$$

Так как из формул (17,5) и (18,5) следует, что

$$(E-\lambda \overset{*}{K}_1)(E+\lambda\Gamma^*)\varphi=\varphi$$

при любой функции $\varphi(P)$, то из равенства (9,6) получаем:

$$(E-\lambda \overset{*}{K}_1-\lambda A^*)\zeta=0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично, применяя оператор $E+\lambda\Gamma^*$ к правой и левой частям равенства (7,6) и пользуясь равенством $(E+ +\lambda\Gamma^*)(E-\lambda \overset{*}{K}_1)=E$, получим, что всякое решение уравнения (7,6) удовлетворяет уравнению (8,6). Итак, мы доказали, что однородные уравнения (1,6), (6,6), (8,6) и (7,6) имеют одинаковое число линейно независимых решений. Тем самым вторая теорема Фредгольма доказана.

Те значения λ, при которых для уравнения (1,6) имеет место второй случай альтернативы Фредгольма, называются *собственными значениями уравнения* (1,6) (или ядра $K(P, Q)$; ср. § 2), а соответствующие нетривиальные решения однородного уравнения — *собственными функциями, отвечающими этому собственному значению.*

Так как в круге $|\lambda|<\frac{1}{M_1D}$ функция $\Gamma(Q, P, \lambda)$ есть голоморфная функция от λ, то определитель (11,4), соответствующий вырожденному уравнению (6,6), также есть голоморфная функция от λ в этом круге. При $\lambda=0$ этот определитель обращается в 1. Следовательно, он не равен 0 тождественно. Поэтому его корни не могут иметь точек накопления в этом круге. Следовательно, *собственные значения λ уравнения* (1,6) *не могут иметь предельных точек в круге* $|\lambda|<\frac{1}{M_1D}$.

3. Третья теорема Фредгольма. Покажем, что решение уравнения (1,6) существует тогда и только тогда, если

$$\int f(P)\,z(P)\,dP=0,$$

где $z(P)$ — любое решение однородного транспонированного к (1,6) уравнения (7,6).

При доказательстве первой теоремы Фредгольма для уравнения (1,6) мы установили, что уравнение (1,6) имеет решение тогда и только тогда, если существует решение уравнения (6,6) с вырожденным ядром. В § 4 мы показали, что уравнение (6,6) с вырожденным ядром имеет решение тогда и только тогда, если

$$\int f(P)\,\zeta(P)\,dP = 0,$$

где $\zeta(P)$ — любое решение уравнения (8,6). Но согласно только что доказанному совокупность таких решений $\zeta(P)$ совпадает с совокупностью решений $z(P)$ уравнения (7,6). Этим теорема доказана.

§ 7. Интегральные уравнения с равномерно непрерывными ядрами

Всякое равномерно непрерывное ядро $K(P, Q)$ можно равномерно аппроксимировать с какой угодно точностью вырожденными ядрами. Действительно, пусть $K(P, Q)$ — какая-нибудь равномерно непрерывная функция (P, Q), заданная на конечной области G. По теореме Вейерштрасса, доказываемой в курсе анализа*), для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $K_0(P, Q)$ достаточно высокой степени относительно координат точек P и Q, что всюду на G

$$|K(P, Q) - K_0(P, Q)| < \varepsilon.$$

Очевидно, что каждый член многочлена $K_0(P, Q)$ можно представить в виде произведения двух множителей, из которых один зависит только от координат точки P, а другой — только от координат точки Q. Поэтому можно написать

$$K(P, Q) = \sum_{i=1}^{N} a_i(P)\,b_i(Q) + K_1(P, Q),$$

причем

$$|K_1(P, Q)| < \varepsilon.$$

*) См., например, Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, гл. II, § 4, изд. 3-е, Гостехиздат, 1951; С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, изд. 1-е, М.—Л., 1947, стр. 229.