решение тогда и только тогда, если существует решение уравнения (6,6) с вырожденным ядром. В § 4 мы показали, что уравнение (6,6) с вырожденным ядром имеет решение тогда и только тогда, если

$$\int f(P)\,\zeta(P)\,dP=0,$$

где $\zeta(P)$ — любое решение уравнения (8,6). Но согласно только что доказанному совокупность таких решений $\zeta(P)$ совпадает с совокупностью решений $z(P)$ уравнения (7,6). Этим теорема доказана.

§ 7. Интегральные уравнения с равномерно непрерывными ядрами

Всякое равномерно непрерывное ядро $K(P, Q)$ можно равномерно аппроксимировать с какой угодно точностью вырожденными ядрами. Действительно, пусть $K(P, Q)$ — какая-нибудь равномерно непрерывная функция (P, Q), заданная на конечной области G. По теореме Вейерштрасса, доказываемой в курсе анализа*), для каждого $\varepsilon>0$ существует такой многочлен $K_0(P, Q)$ достаточно высокой степени относительно координат точек P и Q, что всюду на G

$$|K(P, Q)-K_0(P, Q)|<\varepsilon.$$

Очевидно, что каждый член многочлена $K_0(P, Q)$ можно представить в виде произведения двух множителей, из которых один зависит только от координат точки P, а другой — только от координат точки Q. Поэтому можно написать

$$K(P, Q)=\sum_{i=1}^{N} a_i(P)\,b_i(Q)+K_1(P, Q),$$

причем

$$|K_1(P, Q)|<\varepsilon.$$

*) См., например, Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, гл. II, § 4, изд. 3-е, Гостехиздат, 1951; С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, изд. 1-е, М.—Л., 1947, стр. 229.

Отсюда, применяя теорему, доказанную в предыдущем параграфе, мы найдем, что в круге

$$|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon D},$$

где D — объем области G, справедливы все три теоремы Фредгольма и что в этом круге нет точек накопления собственных значений λ. Так как ε можно взять как угодно малым, то отсюда следует справедливость этих теорем на сколь угодно больших кругах с центром в точке $\lambda=0$, т. е. справедливость их на всей плоскости λ.

Напомним ход рассуждений, которые привели нас к доказательству теорем Фредгольма для уравнений с равномерно непрерывными ядрами. Сначала (§ 4) мы доказали эти теоремы для интегральных уравнений с вырожденными ядрами. В § 6 эти теоремы были доказаны для уравнений с ядрами, близкими к вырожденным. А в настоящем параграфе было показано, что всякое равномерно непрерывное ядро может быть с какой угодно точностью равномерно аппроксимировано вырожденным ядром. Тем самым получилось доказательство теорем Фредгольма для интегральных уравнений с любыми равномерно непрерывными ядрами.

Метод, которым мы доказали здесь теоремы Фредгольма, принадлежит Е. Шмидту. В своем изложении я использовал записки лекций С. Л. Соболева. Заметим, что можно приближенно решать интегральные уравнения с непрерывными ядрами, заменяя эти ядра близкими к ним вырожденными *).

§ 8. Интегральные уравнения с ядрами вида $\dfrac{\overline{K}(P, Q)}{PQ^{\alpha}}$

1. Здесь P и Q принадлежат некоторой конечной замкнутой области $\overline{G}$ (ср. примечание на стр. 31), а $\overline{K}(P, Q)$ — некоторая непрерывная по точкам (P, Q) (т. е. по совокупности точек P и Q) функция; PQ — расстояние между точками P и Q. Целью п. 1 настоящего параграфа является доказательство того, что *для интегральных уравнений с ядрами такого*

*) Ср. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, изд. 5-е, 1962, гл. II, § 4.