Отсюда, применяя теорему, доказанную в предыдущем параграфе, мы найдем, что в круге

$$|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon D},$$

где D — объем области G, справедливы все три теоремы Фредгольма и что в этом круге нет точек накопления собственных значений λ. Так как ε можно взять как угодно малым, то отсюда следует справедливость этих теорем на сколь угодно больших кругах с центром в точке $\lambda = 0$, т. е. справедливость их на всей плоскости λ.

Напомним ход рассуждений, которые привели нас к доказательству теорем Фредгольма для уравнений с равномерно непрерывными ядрами. Сначала (§ 4) мы доказали эти теоремы для интегральных уравнений с вырожденными ядрами. В § 6 эти теоремы были доказаны для уравнений с ядрами, близкими к вырожденным. А в настоящем параграфе было показано, что всякое равномерно непрерывное ядро может быть с какой угодно точностью равномерно аппроксимировано вырожденным ядром. Тем самым получилось доказательство теорем Фредгольма для интегральных уравнений с любыми равномерно непрерывными ядрами.

Метод, которым мы доказали здесь теоремы Фредгольма, принадлежит Е. Шмидту. В своем изложении я использовал записки лекций С. Л. Соболева. Заметим, что можно приближенно решать интегральные уравнения с непрерывными ядрами, заменяя эти ядра близкими к ним вырожденными *).

§ 8. Интегральные уравнения с ядрами вида $\dfrac{\overline{K}(P, Q)}{PQ^\alpha}$

1. Здесь P и Q принадлежат некоторой конечной замкнутой области $\overline{G}$ (ср. примечание на стр. 31), а $\overline{K}(P, Q)$ — некоторая непрерывная по точкам (P, Q) (т. е. по совокупности точек P и Q) функция; PQ — расстояние между точками P и Q. Целью п. 1 настоящего параграфа является доказательство того, что *для интегральных уравнений с ядрами такого*

---

*) Ср. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, изд. 5-е, 1962, гл. II, § 4.

вида при $\alpha < d$, *где* d *есть число измерений области* G, *на всей плоскости* λ *справедливы все три теоремы Фредгольма и что тогда собственные значения* λ *не могут иметь конечных предельных точек.*

Предварительно докажем следующую лемму для ядер $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$, непрерывных по (P, Q), если $P \neq Q$, $P \in \overline{G}$ и $Q \in \overline{G}$.

Если

$$|K_1(P, Q)| < \frac{A_1}{PQ^{\alpha_1}}, \quad 0 \leqslant \alpha_1 < d \tag{1,8}$$

и

$$|K_2(P, Q)| < \frac{A_2}{PQ^{\alpha_2}}, \quad 0 \leqslant \alpha_2 < d, \tag{2,8}$$

то интеграл

$$K_3(P, Q) = \int K_1(P, P_1) K_2(P_1, Q)\, dP_1$$

всегда существует и непрерывен по (P, Q), *если* P *отлично от* Q; *далее,*

$$|K_3(P, Q)| < \frac{A_3}{PQ^{\alpha_1+\alpha_2-d}}, \quad \text{если } \alpha_1+\alpha_2 > d, \tag{3,8}$$

и

$$|K_3(P,Q)| < A_3 |\ln PQ| + A_4, \quad \text{если } \alpha_1+\alpha_2 = d, \tag{4,8}$$

где A_3 *и* A_4 — *некоторые постоянные. Если же* $\alpha_1+\alpha_2 < d$, *то этот интеграл существует всегда и есть равномерно непрерывная функция от* (P, Q) *).

Доказательство. Пусть $P \neq Q$. Тогда

$$|K_3(P, Q)| \leqslant \int |K_1(P, P_1)| \cdot |K_2(P_1, Q)|\, dP_1 \leqslant$$

$$\leqslant \overbrace{\int \cdots \int}^{d}_{r_1 \leqslant D} \frac{A_1 A_2 dx_1^{(1)} \ldots dx_d^{(1)}}{\left[\sum\limits_{i=1}^{d} (x_i - x_i^{(1)})^2\right]^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdot \left[\sum\limits_{i=1}^{d} (x_i^{(1)} - y_i)^2\right]^{\frac{\alpha_2}{2}}} = I. \tag{5,8}$$

Здесь x_i, $x_i^{(1)}$, y_i, $i = 1, \ldots, d$, — соответственно координаты точек P, P_1, Q; D — диаметр области $\overline{G}$, т. е.

*) Ср. С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, изд. 1-е, М.—Л., 1947, стр. 233.

верхняя грань расстояний между двумя ее точками; $r_1=\sqrt{\sum (x_i^{(1)}-x_i)^2}$.

Для простоты вычислений, не ограничивая общности, положим

$$x_1=\ldots=x_d=0;\ y_1=\varrho,\ y_2=\ldots=y_d=0,$$

где $\varrho=PQ$. Положим далее

$$x_i^{(1)}=\varrho\xi_i.$$

Тогда интеграл I, стоящий в правой части (5,8), можно переписать так:

$$I=\overbrace{\int\ldots\int}^{d}_{r_1\leqslant D}\frac{A_1A_2\varrho^d d\xi_1\ldots d\xi_d}{\left(\sum_{i=1}^{d}\xi_i^2\right)^{\frac{\alpha_1}{2}}\cdot\left[(\xi_1-1)^2+\sum_{i=2}^{d}\xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_2}{2}}\varrho^{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

Заметим, что если $\sqrt{\sum_{i=1}^{d}\xi_i^2}\geqslant 2$, то

$$\sqrt{(\xi_1-1)^2+\sum_{i=2}^{d}\xi_i^2}\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{d}\xi_i^2}. \tag{6,8}$$

Действительно, из рис. 2 видно, что $PM+OP\geqslant OM$. Но $OP=1$. Следовательно, $PM\geqslant OM-1=\frac{1}{2}\Big(OM+(OM-2)\Big)$. Но по условию $OM\geqslant 2$. Поэтому $PM\geqslant\frac{OM}{2}$.

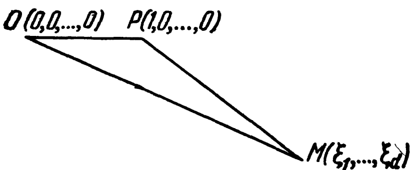

Рис. 2.

Разобьем интеграл I на две части и воспользуемся оценкой (6,8). Тогда получим:

$$I\leqslant\frac{A_1A_2}{\varrho^{\alpha_1+\alpha_2-d}}\int_{\sum\xi_i^2\leqslant 4}\ldots\int\frac{d\xi\ldots d\xi_d}{\left[\sum_{i=1}^{d}\xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_1}{2}}\cdot\left[(\xi_1-1)^2+\sum_{i=2}^{d}\xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_2}{2}}}+$$

$$+\frac{A_1A_2}{\varrho^{\alpha_1+\alpha_2-d}}\int_{4\leqslant\sum\xi_i^2\leqslant\frac{D^2}{\varrho^2}}\ldots\int\frac{2^{\alpha_2}\,d\xi_1\ldots d\xi_d}{\left[\sum_{i=1}^{d}\xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}}.$$

Интеграл в первом слагаемом сходится и дает некоторое постоянное, не зависящее от ϱ число C_1. Для вычисления второго интеграла перейдем к полярным координатам. Получим:

$$I \leqslant C_1 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2} + C_2 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2} \int_2^{\frac{D}{\varrho}} \tau^{d-1-\alpha_1-\alpha_2}\, d\tau, \tag{7,8}$$

где C_2 — некоторая положительная постоянная.

Если $\alpha_1+\alpha_2 > d$, то из последней формулы следует, что

$$I \leqslant C_1 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2} + C_2 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2} \int_2^{\infty} \tau^{d-1-\alpha_1-\alpha_2}\, d\tau = C_3 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2},$$

т. е. оценка (3,8).

Если $\alpha_1+\alpha_2 = d$, то из формулы (7,8) следует

$$I \leqslant C_1 + C_2 \ln \frac{D}{2\varrho},$$

т. е. оценка (4,8) для $K(P, Q)$*).

Если же $\alpha_1+\alpha_2 < d$, то прежде всего ясно, что $K_3(P, Q)$ существует и при $P = Q$. Далее, из оценки (7,8) следует

$$I \leqslant C_1 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2} + \\ + \frac{C_2 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2}}{d-\alpha_1-\alpha_2} \left[\left(\frac{D}{\varrho} \right)^{d-\alpha_1-\alpha_2} - 2^{d-\alpha_1-\alpha_2} \right] \leqslant C_3, \tag{8,8}$$

где C_3 есть некоторая постоянная.

Докажем теперь, что $K_3(P, Q)$ всегда непрерывно зависит от (P, Q), если P не совпадает с Q. Для этого заметим, что

$$|K_3(P, Q) - K_3(P^*, Q^*)| \leqslant \\ \leqslant |K_3(P, Q) - K_3(P, Q^*)| + |K_3(P, Q^*) - K_3(P^*, Q^*)| \leqslant \\ \leqslant \int |K_1(P, P_1)| \cdot |K_2(P_1, Q) - K_2(P_1, Q^*)|\, dP_1 + \\ + \int |K_2(P_1, Q^*)| \cdot |K_1(P, P_1) - K_1(P^*, P_1)|\, dP_1. \tag{9,8}$$

Мы предположили, что функции $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$ заданы для всех точек P и Q (если $P \neq Q$), принадлежа-

*) В дальнейших рассмотрениях случая $\alpha_1+\alpha_2 = d$ всегда можно избежать, увеличивая немного α_1 или a_2.

щих $\overline{G}$, и что $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$ непрерывны всюду, где только $P \neq Q$. Поэтому на любом замкнутом множестве точек (P, Q), не содержащем точек, для которых $P=Q$, функции $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$ равномерно по (P, Q) непрерывны. Отсюда каждая из разностей, стоящих под знаком интеграла, равномерно по P_1 мала, если только точки Q и Q^*, P и P^* достаточно близки, во всей области $\overline{G}$ точек P_1, за исключением некоторых окрестностей G_1, G_2, G_3, G_4 точек $P_1=Q$, $P_1=Q^*$, $P_1=P$, $P_1=P^*$. К G_1, G_2, G_3, G_4 мы относим точки G, отстоящие соответственно от Q, Q^*, P, P^* не дальше некоторого малого, но фиксированного r, не меняющегося при приближении точки P к P^*, Q к Q^*. Поэтому в силу условий (1,8) и (2,8) интегралы, входящие в (9,8) и взятые по областям $\overline{G}-(G_1+G_2)$ и $\overline{G}-(G_3+G_4)$, делаются как угодно малыми при достаточной близости точек (P, Q) и (P^*, Q^*). Части же интегралов (9,8), взятые по окрестностям G_1, G_2, G_3 и G_4, в силу условий (1,8) и (2,8) делаются как угодно малыми, когда $r \to 0$, если $P \neq Q$.

Если же $\alpha_1+\alpha_2<d$, то при достаточной близости точек (P, Q) и (P^*, Q^*) интегралы (9,8) делаются как угодно малыми, если даже точки P и Q (или P^* и Q^*) совпадают между собой, так как в этом случае части этих интегралов по окрестностям G_1, G_2, G_3 и G_4 равномерно по (P, Q) стремятся к 0 при $r \to 0$.

Действительно, первый из интегралов (9,8), взятый по этим окрестностям, не превосходит суммы

$$\int |K_1(P, P_1)|\,|K_2(P_1, Q)|\,dP_1+\int |K_1(P, P_1)|\,|K_2(P_1\, Q^*)|\,dP_1.$$

Каждый из этих интегралов мы оцениваем, пользуясь неравенством (8,8). Аналогично оцениваем второй из интегралов (9,8), взятый по G_1, G_2, G_3, G_4.

Отсюда следует непрерывность функции $K_3(P, Q)$ во всей замкнутой области ее определения и, следовательно, ее равномерная непрерывность.

Переходим теперь к рассмотрению интегральных уравнений

$$y(P)=\lambda \int K(P, Q)\,y(Q)\,dQ+f(P), \qquad (10,8)$$

где $K(P, Q)$ имеет вид, обозначенный в заголовке настоящего параграфа при $\alpha < d$. Функцию $f(P)$ мы будем считать непрерывной на замкнутой области и потому ограниченной; мы будем рассматривать также только непрерывные решения этого уравнения. Заметим, что совершенно так же, как в предыдущем абзаце, легко показать, что при наших предположениях о $K(P, Q)$ *всякое ограниченное решение уравнения* (10,8) *непрерывно, если* $f(P)$ *непрерывна.*

Докажем прежде всего, что при достаточно малом $|\lambda|$ это уравнение, точно так же как и транспонированное к нему, имеет всегда единственное решение в классе ограниченных функций. Так как для транспонированного уравнения все доказательства проводятся так же, как и для данного уравнения (10,8), то мы ограничимся рассмотрением только уравнения (10,8). Доказательство существования и единственности решения уравнения (10,8) проводится совершенно так же, как это делалось в § 5. Мы будем искать решение в виде суммы ряда

$$y(P)=y_0(P)+\lambda y_1(P)+\lambda^2 y_2(P)+\ldots \qquad (11,8)$$

Как и в § 5, мы найдем, что

$$y_0(P)=f(P), \quad y_{k+1}(P)=\int K(P, Q)\, y_k(Q)\, dQ,$$
$$k=0, 1, 2, \ldots$$

Применяя только что доказанную лемму, мы получим отсюда, что все $y_k(P)$ суть непрерывные функции P. Оценим их модули. Пусть

$$|f(P)|<N,$$

где N — некоторое постоянное число. Пусть M есть верхняя грань значений интеграла

$$\int |K(P, Q)|\, dQ$$

(M, очевидно, существует). Тогда легко видеть, что

$$|y_k(P)| \leqslant NM^k.$$

Отсюда видно, что при

$$|\lambda| < \frac{1}{M} - \varepsilon \; (\varepsilon > 0)$$

ряд (11,8) равномерно по λ сходится и дает функцию, голоморфную по λ и равномерно непрерывную по совокупности (P, λ). Совершенно так же, как в § 5, доказывается, что этот ряд дает решение интегрального уравнения (10,8) и что другого решения этого уравнения в классе ограниченных функций нет.

Совершенно так же, как в § 5, мы найдем, что это решение $y(P)$ можно представить в виде

$$y(P) = \lambda \int \Gamma(P, Q, \lambda) f(Q)\, dQ + f(P),$$

где

$$\Gamma(P, Q, \lambda) = K(P, Q) + \lambda K^{(2)}(P, Q) + \lambda^2 K^{(3)}(P, Q) + \ldots \quad (12,8)$$

Первый член этого ряда имеет вид

$$K(P, Q) = \frac{\overline{K}(P, Q)}{PQ^{\alpha}}, \quad \alpha < d, \quad (13,8)$$

где $\overline{K}(P, Q)$ есть равномерно непрерывная по (P, Q) функция. В силу ограниченности G отсюда следует ограниченность $\overline{K}(P, Q)$, и по доказанной в начале этого параграфа лемме

$$|K^{(2)}(P, Q)| < \frac{A}{PQ^{2\alpha - d}},$$

вообще

$$|K^{(m)}(P, Q)| < \frac{A_m}{PQ^{m\alpha - (m-1)d}} \text{ *)},$$

если $m\alpha - (m-1)d > 0$. Здесь через A и A_m обозначены некоторые постоянные. Так как $\alpha < d$, то при достаточно большом m будет

$$m\alpha - (m-1)d < 0.$$

Тогда в силу доказанной леммы $K^{(m)}(P, Q)$ будет равномерно непрерывной по (P, Q) функцией. Все следующие повторения $K^{(p)}(P, Q)$ будут также равномерно непрерывными. При этом для $p \geqslant m$ будет

$$|K^{(p+1)}(P, Q)| \leqslant \left| \int K(P, P_1) K^{(p)}(P_1, Q)\, dP_1 \right| \leqslant$$
$$\leqslant M_p \int |K(P, P_1)|\, dP_1 \leqslant M_p M,$$

*) Ср. примечание на стр. 45.

где M_p есть верхняя грань модуля $K^{(p)}(P, Q)$. Отсюда получается доказательство равномерной по P, Q и λ $\left(\text{при } \lambda < \frac{1}{M} - \varepsilon\right)$ сходимости ряда (12,8), так же как это доказывалось для ряда (16,5). Аналогичные рассуждения можно провести для транспонированного уравнения.

Все формулы, которые мы получили в § 5, сохраняют и теперь свою силу.

После этого все рассуждения § 6 делаются применимыми для интегральных уравнений с ядрами

$$K(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} a_i(P)\, b_i(Q) + K_1(P, Q),$$

где $a_i(P)$ и $b_i(Q)$ непрерывны в $\overline{G}$, а $K_1(P, Q)$ имеет вид (13,8). Таким образом, получается доказательство теорем Фредгольма в круге

$$|\lambda| < \frac{1}{M_1},$$

где M_1 есть наибольшая из верхних граней интегралов:

$$\int |K_1(P, Q)|\, dQ, \quad \int |K_1(P, Q)|\, dP.$$

Кроме того, получается, что в этом круге не может быть точек сгущения для собственных значений λ.

Перейдем теперь к доказательству теорем Фредгольма для интегральных уравнений с ядрами того типа, какой указан в названии настоящего параграфа. Положим

$$\varphi_C(x) = x, \quad \text{если} \quad x \leqslant C,$$
$$\varphi_C(x) = C, \quad \text{если} \quad x > C.$$

Тогда функция

$$K_C(P, Q) = \overline{K}(P, Q)\, \varphi_C\left(\frac{1}{PQ^{\alpha}}\right)$$

будет равномерно непрерывной функцией (P, Q) при всяком C. При достаточно большом C интегралы

$$\int |K(P, Q) - K_C(P, Q)|\, dQ, \int |K(P, Q) - K_C(P, Q)|\, dP$$

будут равномерно по P, соответственно по Q,как угодно малы. Как мы уже говорили в § 6, равномерно непрерывную функцию $K_C(P,Q)$ можно с какой угодно точностью равномерно на области $\overline{G}$ аппроксимировать суммами вида

$$S_m(P,\ Q)=\sum_{i=1}^{m} a_i(P)\, b_i(Q).$$

Тогда будет

$$K(P,\ Q)=S_m(P,\ Q)+\tilde{K}(P,\ Q),$$

причем верхняя грань значений

$$\int|\tilde{K}(P,\ Q)|\,dQ,\ \int|\tilde{K}(P,\ Q)|\,dP$$

может быть сделана меньше любого $\varepsilon>0$. Отсюда получается доказательство всех трех теорем Фредгольма на всей плоскости λ для интегральных уравнений с ядрами вида (13,8). Кроме того, получается доказательство отсутствия конечных точек накопления у собственных значений.

Только что приведенное доказательство теорем Фредгольма для ядер вида (13,8) в основном воспроизводит доказательство этих теорем для ограниченных равномерно непрерывных ядер. Доказательство этих последних теорем в сущности основывалось только на том, что некоторые интегралы были малы; требование малости подинтегральных функций было для этого излишним. Этим мы и воспользовались в настоящем параграфе.

Замечание. Пусть ядро $K(P, Q)$ — непрерывная функция P и Q, когда $P\in G$, $Q\in G$ и $P\neq Q$, и удовлетворяет условию $|K(P,\ Q)|<\frac{A}{PQ^{\alpha}}$, $0\leqslant\alpha<d$. Пусть $\varepsilon>0$ и $\alpha+\varepsilon<d$. Тогда

$$K(P,\ Q)=\frac{K(P,\ Q)\,PQ^{\alpha+\varepsilon}}{PQ^{\alpha+\varepsilon}}=\frac{\overline{K}(P,\ Q)}{PQ^{\alpha+\varepsilon}},$$

где $\overline{K}(P,\ Q)$ — непрерывная функция P и Q. Таким образом, для ядер указанного вида также справедливы все теоремы Фредгольма.

2. Многие задачи математической физики приводят к рассмотрению интегральных уравнений, в которых интегрирование происходит не по области d-мерного евклидова про-

странства, а по линии, поверхности или многообразию*) большей размерности, расположенным в евклидовом пространстве достаточно большого числа измерений.

Для интегральных уравнений такого вида также справедливы теоремы Фредгольма. Ниже мы покажем, как, пользуясь рассуждениями п. 1, можно доказать теоремы Фредгольма в том случае, когда областью интегрирования служит замкнутая гладкая поверхность в трехмерном пространстве. Для других многообразий доказательства аналогичны.

Итак, пусть дано уравнение

$$y(P)=\lambda\int_{S} K(P,\ Q)\,y(Q)\,dS_Q+f(P), \tag{14,8}$$

где S — замкнутая гладкая поверхность в трехмерном пространстве (мы предполагаем, что в некоторой достаточно малой окрестности любой точки $A\in S$ какая-либо одна из координат точек S является непрерывно дифференцируемой функцией двух других координат), dS_Q — элемент площади поверхности S; $P\in S$, $Q\in S$, $f(P)$ — заданная непрерывная функция на S. Пусть $K(P,\ Q)=\frac{\overline{K}(P,\ Q)}{PQ^{\alpha}}$, где $\overline{K}(P,Q)$ — непрерывная функция, когда $P\in S$ и $Q\in S$; $0\leqslant\alpha<2$ и PQ — расстояние между точками P и Q в трехмерном пространстве. Для того, чтобы доказать с помощью рассуждений п. 1 все теоремы Фредгольма для рассматриваемого уравнения (14,8), достаточно показать, что остается справедливой лемма п. 1 и что всякое непрерывное ядро $K_1(P,\ Q)$, заданное на S, можно равномерно приблизить вырожденным ядром с любой степенью точности. Все другие рассуждения §§ 4, 5, 6, 7 и 8 переносятся автоматически на уравнения рассматриваемого вида.

Непрерывное ядро $K_1(P,\ Q)$ можно рассматривать как непрерывную функцию, заданную на некотором замкнутом множестве S^2 в 6-мерном пространстве $(x_P, y_P, z_P, x_Q, y_Q, z_Q)$.

---

*) Под d-мерным непрерывно дифференцируемым многообразием M, лежащим в n-мерном евклидовом пространстве E_n $(0<d<n)$, понимают замкнутое связное ограниченное множество точек M, лежащее в E_n и такое, что в некоторой окрестности любой точки $A\in M$ некоторые $n-d$ координат точек M являются непрерывно дифференцируемыми функциями остальных d координат.

Это множество получается, когда точки $P(x_P, y_P, z_P)$ и $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ независимо друг от друга пробегают множество S. Обозначим через R куб в пространстве $(x_P, y_P, z_P, x_Q, y_Q, z_Q)$, содержащий все точки множества S^2. Непрерывную функцию, заданную на замкнутом множестве S^2, можно продолжить до непрерывной функции, заданной на R*). По теореме Вейерштрасса непрерывную функцию, заданную на R, можно равномерно приблизить многочленом с любой степенью точности. Если теперь рассматривать этот многочлен только на S^2, то он и будет являться вырожденным ядром, приближающим ядро $K_1(P, Q)$ с любой степенью точности.

Убедимся теперь в справедливости леммы п. 1 § 8. Для доказательства непрерывности $K_3(P, Q)$ при $P \neq Q$, подобно доказательству, проведенному в п. 1, достаточно проверить, что интеграл вида

$$\int\limits_{S(Q,\, r)} \frac{dS_{P_1}}{QP_1^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha < 2,$$

взятый по части поверхности S, расположенной в сфере радиуса r с центром в точке Q, будет равномерно по Q, меняющемуся в малой окрестности некоторой точки Q_0, как угодно мал при достаточно малом r.

Пусть в окрестности точки Q_0 поверхность S задается непрерывно дифференцируемой функцией $z = f(x, y)$ и Q' и P_1' — проекции точек Q и P_1 на плоскость $z = 0$. Так как $dS < C\, dx\, dy$, где C есть некоторая постоянная, и кроме того, $Q'P_1' \leqslant QP_1$, то

$$\int\limits_{S(Q,\, r)} \frac{dS_{P_1}}{QP_1^{\alpha}} < \int\limits_{S(Q',\, r)} \frac{C\, dx\, dy}{Q'P_1'^{\alpha}}.$$

Последний интеграл можно сделать как угодно малым, если r достаточно мало.

Для доказательства непрерывности $K_3(P, Q)$ при $P = Q$ и $\alpha_1 + \alpha_2 < d$ достаточно точно так же оценить интеграл вида

$$\int\limits_{S(Q,\, r)+S(P,\, r)} \frac{dS_{P_1}}{PP_1^{\alpha_1} QP_1^{\alpha_2}},$$

*) П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948, гл. 6, § 13, стр. 284.

когда P и Q меняются в малой окрестности точки $P^*=Q^*$ и r стремится к нулю, и воспользоваться неравенством (8,8).

Чтобы доказать справедливость неравенств (3,8) и (4,8), покажем ограниченность функций

$$K_3(P,\ Q)\,PQ^{\alpha_1+\alpha_2-d},\ \text{если}\ \alpha_1+\alpha_2>d,$$

и

$$\frac{K_3(P,\ Q)}{|\ln PQ|+1},\ \text{если}\ \alpha_1+\alpha_2=d$$

при $P\in S,\ Q\in S,\ P\neq Q$.

Для этого допустим, что наше утверждение неверно. Тогда найдутся последовательности точек $P_1\in S,\ P_2\in S,\ldots,$ $Q_1\in S,\ Q_2\in S,\ \ldots$, причем $P_i\neq Q_i$ и

$$|K_3(P_i,\ Q_i)|\,P_iQ_i^{\alpha_1+\alpha_2-d}\longrightarrow\infty\ \text{при}\ i\longrightarrow\infty. \qquad (15,8)$$

Мы можем предполагать, что последовательности P_i и Q_i являются сходящимися, т. е.

$$P_i\longrightarrow P_0\in S,\ Q_i\longrightarrow Q_0\in S.$$

Из доказанной ранее непрерывности функции $K_3(P,\ Q)$ при $P\neq Q$ следует, что $P_0=Q_0$. Положим для определенности, что в некоторой достаточно малой окрестности U точки P_0 координата z точек S является непрерывно дифференцируемой функцией x и y и что в этой окрестности имеет место неравенство $dS\leqslant C\,dx\,dy$ (C — некоторая постоянная). Тогда для всех достаточно больших i

$$|K_3(P_i,\ Q_i)|\leqslant A_1A_2\int\limits_U\frac{dS_{P_1}}{P_iP_1^{\alpha_1}P_1Q_i^{\alpha_2}}+A_1A_2\int\limits_{S-U}\frac{dS_{P_1}}{P_iP_1^{\alpha_1}P_1Q_i^{\alpha_2}}\leqslant$$

$$\leqslant A_1A_2C\int\limits_{U'}\frac{dx\,dy}{P'_iP_1'^{\alpha_1}P'_1Q_i'^{\alpha_2}}+A_1A_2\max_{P_1\in S-U}\frac{1}{P_iP_1^{\alpha_1}P_1Q_i^{\alpha_2}}\int\limits_{S-U}dS_{P_1},$$

где штрихами обозначены проекции на плоскость $z=0$. Так как последнее из полученных слагаемых ограничено, то из (15,8) следует, что

$$P_iQ_i^{\alpha_1+\alpha_2-d}\int\limits_{U'}\frac{dx\,dy}{P'_iP_1'^{\alpha_1}P'_1Q_i'^{\alpha_2}}\longrightarrow\infty\ \text{при}\ i\longrightarrow\infty. \qquad (16,8)$$

Однако для всех достаточно больших i будет $P'_i Q'_i \leqslant C_1 P_i Q_i$, где $C_1 > 0$ (почему?). Поэтому из (16,8) получаем:

$$P'_i Q_i'^{\alpha_1+\alpha_2-d} \int\limits_{U'} \frac{dx\,dy}{P'_i P_1'^{\alpha_1} P'_1 Q_i'^{\alpha_2}} \longrightarrow \infty \text{ при } i \longrightarrow \infty.$$

Но точки P'_i, Q'_i находятся уже в области U' на плоскости. Поэтому в силу леммы, доказанной в п. 1, имеем для всех достаточно больших i

$$\int\limits_{U'} \frac{dx\,dy}{P'_i P_1'^{\alpha_1} P'_1 Q_i'^{\alpha_2}} < \frac{A}{P'_i Q_i'^{\alpha_1+\alpha_2-d}}$$

(A — некоторая постоянная). Это соотношение противоречит предыдущему. Аналогично доказывается ограниченность функции $\dfrac{K_3(P, Q)}{|\ln PQ|+1}$.

§ 9. Примеры особых интегральных уравнений

Особыми интегральными уравнениями мы называем такие, для которых или неверны теоремы Фредгольма, или собственные значения имеют конечные предельные точки. У приводимых в этом параграфе особых интегральных уравнений интервал интегрирования бесконечен. Но, полагая, например,

$$\xi = \operatorname{tg} \eta, \quad x = \operatorname{tg} y,$$

эти интегральные уравнения можно привести к таким уравнениям, у которых интервал интегрирования конечен.

Пример 1. У интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^\infty \sin x\xi \varphi(\xi)\, d\xi$$

при $\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ имеется бесконечное множество линейно независимых решений, так как при таких λ этому уравнению удовлетворяют функции

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ax} \pm \frac{x}{a^2+x^2}$$

при любом $a > 0$.