Однако для всех достаточно больших i будет $P'_i Q'_i \leqslant C_1 P_i Q_i$, где $C_1 > 0$ (почему?). Поэтому из (16,8) получаем:

$$P'_i Q_i'^{\alpha_1+\alpha_2-d} \int\limits_{U'} \frac{dx\,dy}{P'_i P_1'^{\alpha_1} P'_1 Q_i'^{\alpha_2}} \longrightarrow \infty \text{ при } i \longrightarrow \infty.$$

Но точки P'_i, Q'_i находятся уже в области U' на плоскости. Поэтому в силу леммы, доказанной в п. 1, имеем для всех достаточно больших i

$$\int\limits_{U'} \frac{dx\,dy}{P'_i P_1'^{\alpha_1} P'_1 Q_i'^{\alpha_2}} < \frac{A}{P'_i Q_i'^{\alpha_1+\alpha_2-d}}$$

(A — некоторая постоянная). Это соотношение противоречит предыдущему. Аналогично доказывается ограниченность функции $\frac{K_3(P,\ Q)}{|\ln PQ| + 1}$.

§ 9. Примеры особых интегральных уравнений

Особыми интегральными уравнениями мы называем такие, для которых или неверны теоремы Фредгольма, или собственные значения имеют конечные предельные точки. У приводимых в этом параграфе особых интегральных уравнений интервал интегрирования бесконечен. Но, полагая, например,

$$\xi = \operatorname{tg} \eta, \quad x = \operatorname{tg} y,$$

эти интегральные уравнения можно привести к таким уравнениям, у которых интервал интегрирования конечен.

Пример 1. У интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^\infty \sin x\xi\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

при $\lambda = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ имеется бесконечное множество линейно независимых решений, так как при таких λ этому уравнению удовлетворяют функции

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ax} \pm \frac{x}{a^2+x^2}$$

при любом $a > 0$.

Пример 2. Уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\xi|}\varphi(\xi)\,d\xi$$

имеет решение $e^{i\alpha x}$ при $\lambda=\frac{1+\alpha^2}{2}$. Таким образом, всякое действительное $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$ является собственным значением. Мы рассматриваем здесь только действительные значения α, так как в противном случае $e^{i\alpha x}$ делается неограниченным на бесконечном интервале $-\infty<x<+\infty$.

Существуют примеры интегральных уравнений, для которых не имеют места и другие теоремы Фредгольма.

Важную роль в теории дифференциальных уравнений с частными производными и математической физике играют так называемые *сингулярные интегральные уравнения*. Такие уравнения имеют вид (10,8), но ядра таких уравнений имеют сильную особенность ($\alpha=d$) и неинтегрируемы в обычном смысле, а соответствующий интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Построена полная теория сингулярных интегральных уравнений. Эта теория существенно отличается от теории интегральных уравнений Фредгольма. Сингулярным интегральным уравнениям посвящена обширная литература. См., например, Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, 1962; С. Г. Михлин, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Физматгиз, 1962.