ГЛАВА 2
УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

§ 10. Уравнения Вольтерра

Так называются интегральные уравнения

$$y(P)=\lambda\int K(P,\ Q)\,y(Q)\,dQ+f(P),$$

удовлетворяющие следующим условиям:

а) каждая из координат точек P и Q принимает значение от 0 до некоторого $a>0$;

б) $K(P,\ Q)=0$, если хотя бы одна координата точки Q больше соответствующей (т. е. имеющей тот же номер) координаты точки P.

Мы будем рассматривать только одномерный случай. Тогда уравнение Вольтерра будет иметь вид

$$y(x)=\lambda\int_0^x K(x,\ \xi)\,y(\xi)\,d\xi+f(x). \tag{1,10}$$

Покажем, что для этого уравнения при всяком λ будет иметь место первый случай альтернативы Фредгольма в предположении, что $K(x,\ \xi)$ есть непрерывная функция при $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant\xi\leqslant x$, а $f(x)$ непрерывна при $0\leqslant x\leqslant a$.

Иными словами, мы покажем, что *у уравнения Вольтерра нет собственных значений.*

Доказательство. Уравнение (1,10) принадлежит к тому классу интегральных уравнений, для которого мы доказали теоремы Фредгольма. В самом деле,

$$K(x,\ \xi)=\frac{K(x,\ \xi)\,|x-\xi|^{\varepsilon}}{|x-\xi|^{\varepsilon}},\quad 0<\varepsilon<1.$$

Функция $\overline{K}(x, \xi)$, определенная равенствами

$$\overline{K}(x, \xi)=K(x, \xi)\,|x-\xi|^{\varepsilon} \quad \text{при} \quad 0\leqslant\xi\leqslant x_1,$$
$$\overline{K}(x, \xi)=0 \quad \text{при} \quad \xi\geqslant x,$$

равномерно непрерывна на квадрате

$$0\leqslant x\leqslant a, \quad 0\leqslant\xi\leqslant a.$$

Поэтому для интегрального уравнения (1,10) согласно § 8 справедливы все три теоремы Фредгольма. Значит, для доказательства того, что для этого уравнения при всяком λ имеет место первый случай альтернативы Фредгольма, достаточно показать, что соответствующее однородное уравнение

$$y(x)=\lambda\int_0^x K(x, \xi)\,y(\xi)\,d\xi \tag{2,10}$$

может при всяком λ иметь только тривиальное решение в классе непрерывных функций от x при $0\leqslant x\leqslant a$. Для доказательства этого последнего утверждения обозначим через B наибольшее значение $|y(x)|$ при $0\leqslant x\leqslant a$, а через M — наибольшее значение $|K(x, \xi)|$ при $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant\xi\leqslant x$. Тогда из уравнения (2,10) получим:

$$|y(x)|\leqslant|\lambda|\,MBx.$$

Подставляя эту оценку $y(x)$ опять в правую часть (2,10), получим:

$$|y(x)|\leqslant|\lambda|^2 M^2\frac{Bx^2}{2}.$$

Продолжая этот процесс, получим:

$$|y(x)|\leqslant\frac{|\lambda|^k M^k x^k B}{k!}\leqslant\frac{|\lambda|^k M^k a^k B}{k!}, \quad k=1, 2, \ldots$$

А это последнее выражение стремится к 0 при $k\to\infty$. Следовательно, $y(x)\equiv 0$ на интервале $(0, a)$, что и требовалось доказать.

Можно искать решение уравнения (1,10) в виде ряда

$$y(x)=y_0(x)+\lambda y_1(x)+\lambda^2 y_2(x)+\ldots \tag{3,10}$$

Согласно § 8 должно быть

$$y_0(x)=f(x), \quad y_{k+1}(x)=\int_0^x K(x, \xi)\,y_k(\xi)\,d\xi, \quad k=0, 1, 2, \ldots$$

Пусть N есть наибольшее значение $|f(x)|$ на интервале $(0, a)$. Тогда получим:

$$|y_k(x)| \leqslant \frac{M^k x^k N}{k!} \leqslant \frac{M^k a^k N}{k!}.$$

Отсюда видно, что ряд (3,10) равномерно по λ и x сходится, когда λ находится в каком угодно большом круге, а $0 \leqslant x \leqslant a$.

Чтобы наглядно представить себе, почему уравнение Вольтерра не имеет собственных значений, рассмотрим (подобно тому, как это мы делали в § 3) следующую систему линейных алгебраических уравнений, соответствующую уравнению Вольтерра на интервале $0 \leqslant x \leqslant a$:

$$\left.\begin{aligned}
f_1 &= y_1 - \lambda K_{11} y_1 \Delta\xi,\\
f_2 &= \quad -\lambda K_{21} y_1 \Delta\xi + y_2 - \lambda K_{22} y_2 \Delta\xi,\\
f_3 &= \quad -\lambda K_{31} y_1 \Delta\xi \qquad -\lambda K_{32} y_2 \Delta\xi + y_3 - \lambda K_{33} y_3 \Delta\xi,
\end{aligned}\right\} \qquad (4,10)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Мы здесь всюду сохранили обозначения, принятые в § 3. Уравнения (4,10) при любом фиксированном λ можно решать последовательно, если только $|\Delta\xi|$ достаточно мало, что мы будем предполагать. В самом деле, из первого уравнения можно найти y_1, так как при достаточно малом $|\Delta\xi|$ коэффициент при y_1 отличен от 0. Подставим значение y_1 во все последующие уравнения. Тогда из второго уравнения можно найти y_2. Подставим его значение во все последующие уравнения. Тогда из третьего уравнения можно найти y_3 и т. д. Очень легко показать, что при $\Delta x \to 0$ решение системы (4,10) действительно будет приближаться к решению интегрального уравнения (1,10).

Определитель системы (4,10) равен

$$\Pi = (1 - \lambda K_{11} \Delta\xi)(1 - \lambda K_{22} \Delta\xi) \ldots (1 - \lambda K_{nn} \Delta\xi),$$

где $\Delta x = \Delta\xi = \frac{a}{n}$. Отсюда видно, что

$$\Pi \geqslant (1 - |\lambda| M \Delta\xi)^{\frac{a}{\Delta\xi}}. \qquad (5,10)$$

Правая часть этого неравенства при всяком достаточно малом $\Delta\xi$ отлична от 0. При уменьшении $\Delta\xi$ она растет. Например, когда $\Delta\xi$ уменьшается вдвое, то $(1-|\lambda|M\Delta\xi)$ в (5,10) заменяется выражением

$$\left(1-|\lambda|M\frac{\Delta\xi}{2}\right)^2=1-|\lambda|M\Delta\xi+\frac{\lambda^2M^2(\Delta\xi)^2}{4}.$$

Когда $\Delta\xi\to 0$, то правая часть (5,10) стремится к

$$e^{-|\lambda|aM}.$$

Именно в том обстоятельстве, что определитель системы (4,10) всегда отличен от 0 и не стремится к 0, когда $\Delta\xi\to 0$, лежит алгебраическая причина отсутствия собственных значений у уравнения Вольтерра.

Замечание 1. Рассуждениями, совершенно аналогичными тем, какими мы показали отсутствие собственных значений у уравнений Вольтерра с равномерно непрерывными ядрами, можно то же самое показать для уравнений Вольтерра с ядрами вида

$$K(x,\xi)=\frac{\overline{K}(x,\xi)}{|x-\xi|^\alpha},$$

$$0\leqslant\alpha<1,$$

где $\overline{K}(x,\xi)$ — равномерно непрерывная функция.

Замечание 2. Рассмотрим следующее интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода относительно неизвестной функции $y(x)$:

$$\int_0^x K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi=f(x),$$

$$f(0)=0. \tag{6,10}$$

Предположим, что $K(x,\xi)$, $K'_x(x,\xi)$, $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны, когда $0\leqslant x\leqslant a$ и $0\leqslant\xi\leqslant x$. Тогда всякое непрерывное при $0\leqslant x\leqslant a$ решение $y(x)$ уравнения (6,10) удовлетворяет интегральному уравнению

$$K(x, x)y(x)+\int_0^x K_x'(x, \xi)y(\xi)\,d\xi=f'(x), \qquad (7,10)$$

которое получается из (6,10) почленным дифференцированием по x. Легко видеть, что и обратно, всякое непрерывное при $0\leqslant x\leqslant a$ решение уравнения (7,10) удовлетворяет также уравнению (6,10). Если $K(x, x)$ превосходит по абсолютной величине некоторую положительную постоянную, то уравнение (7,10) сводится к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода, рассмотренному в настоящем параграфе. Если $K(x, x)\equiv 0$, иногда бывает полезно еще раз продифференцировать уравнение (7,10) по x и т. д.