ГЛАВА 3
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ СИММЕТРИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ

§ 11. Геометрические аналоги некоторых соотношений между функциями (пространство функций)

Некоторое представление о функции $f(P)$, равномерно непрерывной на заданной конечной области G, например на конечном интервале (a, b), дают значения этой функции на достаточно густом множестве точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$. В одномерном случае за эти точки можно принять точки

$$x = a + \Delta x,\ a + 2\Delta x,\ \ldots,\ a + (n-1)\Delta x,\ a + n\Delta x,$$

где $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ при достаточно большом n. Будем обозначать значения f в этих точках соответственно через

$$f^{(1)},\ f^{(2)},\ \ldots,\ f^{(n)}.$$

Эти последние будем рассматривать как компоненты в n-мерном евклидовом пространстве вектора $(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)})$, начало которого находится в начале координат. Таким образом, функции f соответствует некоторый вектор $(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)})$.

Длина этого вектора, или *норма* его, равна

$$\sqrt{[f^{(2)}]^2 + [f^{(2)}]^2 + \ldots + [f^{(n)}]^2}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, естественно называть «длиной», или *нормой, функции* $f(P)$ число

$$\sqrt{\int\limits_G f^2(P)\, dP}.$$

В следующей таблице перечислены, с одной стороны, основные величины и соотношения, связанные с векторами в n-мерном евклидовом пространстве, с другой стороны,— соответствующие величины и соотношения для функций (в «пространстве функций»). В этом параграфе *все рассматриваемые функции предполагаются действительными, заданными на конечной области G и имеющими интегрируемый квадрат* (ср. замечание к § 1). Символ $\int f(P)\,dP$ всегда будет означать интегрирование по области G.

1. Вектор $(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)})$.	1. Функция $f(P)$.
2. Длина вектора $(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)})$ $$\|f\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[f^{(i)}]^2}.$$	2. Норма функции $f(P)$: $$\|f\|=\sqrt{\int f^2(P)\,dP}.$$
3. Расстояние между точками $(f_1^{(1)}, \ldots, f_1^{(n)})$ и $(f_2^{(1)}, \ldots, f_2^{(n)})$ $$\sqrt{\sum_i [f_2^{(i)}-f_1^{(i)}]^2}.$$	3. Норма разности двух функций $f_2(P)-f_1(P)$ $$\sqrt{\int [f_2(P)-f_1(P)]^2\,dP}.$$

Определенная только что норма разности $f_2(P)-f_1(P)$ характеризует *среднее квадратичное уклонение* функции $f_2(P)$ от $f_1(P)$. Характеризовать отличие функции $f_2(P)$ от $f_1(P)$ можно многими разными способами, а не только при помощи определенной только что нормы разности $f_2(P)-f_1(P)$. Это отличие, можно, например, характеризовать при помощи числа B, равного верхней грани выражения

$$|f_2(P)-f_1(P)|.$$

Если B мало, это значит, что разность $f_2(P)-f_1(P)$ равномерно мала по всей рассматриваемой области G. Так как область G конечна, из малости B следует малость определенной выше нормы разности $f_2(P)-f_1(P)$. Обратное утверждение неверно.

Если имеется бесконечная последовательность функций

$$f_1(P),\ f_2(P),\ \ldots,\ f_k(P),\ \ldots$$

и функция $f(P)$, для которых

$$\sup_G |f(P)-f_k(P)| \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \longrightarrow \infty,$$

то, как известно, говорят, что последовательность функций $f_k(P)$ равномерно сходится к $f(P)$.

Если же

$$\int [f(P)-f_k(P)]^2\, dP \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \longrightarrow \infty,$$

то говорят, что последовательность функций $f_k(P)$ *сходится в среднем к* $f(P)$. Из равномерной сходимости на конечной области следует сходимость в среднем. Обратное неверно, как показывает следующий пример.

Последовательность функций

$$f_k(x) = e^{-kx}$$

на открытом интервале $(0, 1)$ сходится в среднем к $f(x) \equiv 0$, когда $k \longrightarrow \infty$. Но, очевидно, эта сходимость неравномерная.

Приведем еще пример последовательности, которая сходится в среднем, но нигде не сходится в обычном смысле. Такой будет последовательность функций $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, определенных на замкнутом отрезке $[0, 1]$ следующим образом:

$$f_{2^k+p}(x) = 1 \quad \text{при} \quad \frac{p}{2^k} \leqslant x \leqslant \frac{p+1}{2^k},$$

$$f_{2^k+p}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < \frac{p}{2^k} \quad \text{и при} \quad x > \frac{p+1}{2^k};$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$

$$p = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2^k - 1.$$

При $i = 2^k + p \longrightarrow \infty$ эта последовательность в среднем сходится к 0. Но ни в какой точке отрезка $[0, 1]$ эта последовательность не сходится в обычном смысле, так как для каждого значения x из этого отрезка можно указать сколь угодно большие значения i, при которых $f_i(x) = 1$, и сколь угодно большие i, при которых $f_i(x) = 0$.

Задача. Показать, что при соответствующем выборе чисел a_k и b_k функции

$$|\sin(x-b_k)|^{a_k}, \quad \frac{1}{1+a_k(x-b_k)^2}, \quad e^{a_k(x-b_k)^2}$$

при $k \longrightarrow \infty$ сходятся к 0 в среднем на отрезке $[0, 1]$ и не сходятся ни в одной точке.

4. Скалярное произведение векторов

$$(f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, \ldots, f_1^{(n)}),$$

и

$$(f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, \ldots, f_2^{(n)})$$

дается формулой

$$\sum_{i=1}^{n} f_1^{(i)} f_2^{(i)}.$$

Будем обозначать это скалярное произведение символом (f_1, f_2).

5. Неравенство треугольника (сумма двух сторон треугольника не меньше третьей):

$$\sqrt{\sum (a_i - b_i)^2} + \sqrt{\sum (b_i - c_i)^2} \geqslant \sqrt{\sum (a_i - c_i)^2}.$$

4. *Скалярным произведением функций* $f_1(P)$ и $f_2(P)$ назовем

$$\int f_1(P) f_2(P)\, dP.$$

Будем обозначать это скалярное произведение символом (f_1, f_2). Существование этого интеграла при наших предположениях следует из того, что

$$|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

5. Неравенство треугольника:

$$\sqrt{\int [f_1(P) - f_2(P)]^2\, dP} + \sqrt{\int [f_2(P) - f_3(P)]^2\, dP} \geqslant \sqrt{\int [f_1(P) - f_3(P)]^2\, dP}.$$

Оба эти неравенства доказываются совершенно одинаково. Поэтому приведем доказательство только первого из них. Легко видеть, что, совершенно не ограничивая общности, можно считать все b_i равными 0. Возведя тогда в квадрат обе части доказываемого неравенства и делая приведение подобных, мы найдем, что оно эквивалентно неравенству $-\sum a_i c_i \leqslant \sqrt{\sum a_i^2 \sum c_i^2}$, так как все квадратные корни мы считаем неотрицательными. Последнее неравенство непосредственно следует из неравенства

$$\left(\sum a_i c_i\right)^2 \leqslant \sum a_i^2 \sum c_i^2, \tag{1,11}$$

которое называется *неравенством Коши*. Для доказательства его заметим, что при всяких действительных a_i, c_i и λ

$$\sum (a_i \lambda + c_i)^2 \geqslant 0.$$

Поэтому квадратное уравнение относительно λ

$$\lambda^2 \sum a_i^2 + 2\lambda \sum a_i c_i + \sum c_i^2 = 0$$

не имеет действительных различных корней. А это возможно только при соблюдении неравенства (1,11).

Совершенно так же можно доказать неравенство

$$\left[\int f(P)\,\varphi(P)\,dP\right]^2 \leqslant \int f^2(P)\,dP\cdot\int \varphi^2(P)\,dP. \quad (2,11)$$

Это неравенство мы будем называть неравенством Буняковского *).

6. Косинус угла между векторами $(f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, \ldots, f_1^{(n)})$ и $(f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, \ldots, f_2^{(n)}$ равен

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_1^{(i)} f_2^{(i)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[f_1^{(i)}]^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[f_2^{(i)}]^2}}.$$

Согласно (1,11) это выражение по абсолютной величине не превосходит 1.

Единичным мы называем вектор, длина которого равна 1.

Косинус угла между единичными векторами $(f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, \ldots, f_1^{(n)})$ и $(f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, \ldots, f_2^{(n)})$ равен

$$\sum_{i=1}^{n} f_1^{(i)} f_2^{(i)}.$$

6. Косинусом угла между функциями $f_1(P)$ и $f_2(P)$ назовем

$$\frac{\int f_1(P)\cdot f_2(P)\,dP}{\sqrt{\int f_1^2(P)\,dP}\cdot\sqrt{\int f_2^2(P)\,dP}}.$$

Согласно (2,11) это выражение по абсолютной величине не превосходит 1.

Функция $f(P)$ называется *нормированной*, если ее норма равна 1.

Косинус угла между нормированными функциями $f_1(P)$ и $f_2(P)$ равен

$$\int f_1(P) f_2(P)\,dP.$$

---

*) Неравенство (1,11) впервые встречается в курсе анализа Коши (1821): Oeuvres, II^s, т. III (1897), 373. Сам Коши выводил его из тождества

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j-a_j b_i)^2,$$

отбрасывая его неотрицательную правую часть. Неравенство (2,11) впервые доказал и систематически использовал Буняковский (Sur

7. Условие ортогональности векторов $(f_1^{(1)}, \ldots, f_1^{(n)})$ и $(f_2^{(1)}, \ldots, f_2^{(n)})$

$$\sum_{i=1}^{n} f_1^{(i)} f_2^{(i)} = 0.$$

7. Условие *«ортогональности»* функций $f_1(P)$ и $f_2(P)$

$$\int f_1(P) f_2(P)\, dP = 0.$$

8. Условие линейной зависимости (компланарности) векторов $f_k = (f_k^{(1)}, \ldots, f_k^{(n)})$, $k = 1, 2, \ldots, m$, состоит в том, что существуют такие постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_m$, среди которых есть отличные от 0, что

$$\sum_{k=1}^{m} C_k f_k^{(i)} = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

8. Условие линейной зависимости функций $f_1(P), \ldots, f_m(P)$ состоит в существовании таких постоянных $C_1, \ldots, C_m$, среди которых есть отличные от 0, что

$$\sum_{k=1}^{m} C_k f_k(P) = 0$$

для всех точек P.

9. Пусть дано m единичных взаимно ортогональных векторов

$$\varphi_k = (\varphi_k^{(1)}, \ldots, \varphi_k^{(n)}),$$
$$k = 1, 2, \ldots, m.$$

Пусть $\varphi_k(f)$ есть проекция вектора $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ на направление вектора $(\varphi_k^{(1)}, \ldots, \varphi_k^{(n)})$. Тогда

$$\varphi_k(f) = \sum_{i=1}^{n} f^{(i)} \varphi_k^{(i)}.$$

9. Пусть дано m взаимно ортогональных нормированных функций

$$\varphi_1(P), \ldots, \varphi_m(P).$$

Коэффициентом Фурье функции $f(P)$ по отношению к функции $\varphi_k(P)$ называется

$$f_k = \int f(P) \varphi_k(P)\, dP.$$

Теорема. *Пусть дана интегрируемая вместе со своим квадратом функция $f(P)$. Будем искать постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_m$ так, чтобы среднее квадратичное уклоне-*

---

quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires... Memoires de l'Acad. de St. Petersbourg (VII) 1 (1859), № 9). Но в литературе это неравенство часто называется неравенством Шварца, хотя у Шварца оно впервые встречается только в 1885 г. (Werke, I (1890), 251).

ние I_m линейной комбинации $C_1\varphi_1(P)+\ldots+C_m\varphi_m(P)$ от $f(P)$ было наименьшим. Мы утверждаем, что искомые значения будут равны коэффициентам Фурье f_k *).

Действительно,

$$I_m=\int[f(P)-C_1\varphi_1(P)-\ldots-C_m\varphi_m(P)]^2\,dP=$$

$$=\int f^2(P)\,dP-2\sum_{k=2}^{m}C_k\int f(P)\,\varphi_k(P)\,dP+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{m}C_iC_j\int\varphi_i(P)\,\varphi_j(P)\,dP=$$

$$=\int f^2(P)\,dP-2\sum_{k=1}^{m}C_kf_k+\sum_{k=1}^{m}C_k^2=$$

$$=\int f^2(P)\,dP+\sum_{i=1}^{m}(f_k-C_k)^2-\sum_{k=1}^{m}f_k^2.$$

Отсюда видно, что I_m достигает своего минимума

$$\int f^2(P)\,dP-\sum_{k=1}^{m}f_k^2,\quad\text{если } f_k=C_k,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

10. Для всякого вектора $(f^{(1)},\ldots,f^{(n)})$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{m}[\varphi_k(f)]^2\leqslant\sum_{k=1}^{m}[f^{(k)}]^2.$$

В случае равенства это соотношение соответствует теореме Пифагора.

10. Для всякой функции $f(P)$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{m}f_k^2\leqslant\int f^2(P)\,dP.$$

(Неравенство Бесселя.)

Доказательство неравенства Бесселя. Очевидно, $I_m\geqslant 0$ при любых C_i. Если $C_i=f_i$ при $i=1,2,\ldots,m$, то $I_m=\int f^2(P)\,dP-\sum_{k=1}^{m}f_k^2$, т. е. $\int f^2(P)\,dP\geqslant\sum_{i=1}^{m}f_k^2$, что и требовалось доказать.

Последовательность попарно ортогональных нормированных функций (короче, *ортонормальная система*)

$$\varphi_1(P),\ \varphi_2(P),\ \ldots,\ \varphi_k(P),\ \ldots \qquad (3,11)$$

*) Дайте этой теореме геометрическое толкование.

называется *полной*, если для всякой непрерывной (и потому ограниченной) функции $f(P)$, заданной на замкнутой области, имеет место следующее равенство (*равенство Парсеваля*):

$$\int f^2(P)\,dP = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2.$$

Замечание. Из утверждения, доказанного в п. 9, следует возможность заменить данное только что определение полноты системы функций следующим эквивалентным ему: *ортонормальная система функций* (3,11) *называется полной, если для любой непрерывной на замкнутой области функции* $f(P)$ *можно найти такую линейную комбинацию этих функций*

$$\sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_k(P),$$

что средняя квадратичная ошибка при замене $f(P)$ *этой комбинацией, т. е.*

$$\int \Big[f(P) - \sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_k(P)\Big]^2 dP,$$

будет как угодно мала. А отсюда следует, что если бы мы назвали полной системой такую ортонормальную систему, у которой равенство Парсеваля выполняется для всякой функции $f(P)$ с интегрируемым квадратом, непрерывной всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек, гладких линий и поверхностей до $(d-1)$-го измерения, то это определение было бы также эквивалентно предыдущему (d — число измерений области G, на которой заданы рассматриваемые функции). Это происходит потому, что всякая функция $f(P)$ этого класса может быть аппроксимирована такой непрерывной на $\overline{G}$ функцией $f^*(P)$, что норма разности $f(P) - f^*(P)$ как угодно мала. Доказательство этого утверждения при помощи неравенства треугольника (см. п. 5) мы предоставляем читателю.

Ортонормальная система (3,11) называется *замкнутой*, если не существует такой функции рассматриваемого класса*),

---

*) См. замечание к § 1.

интеграл от квадрата которой существует, положителен и которая была бы ортогональна ко всем функциям (3,11).

Теорема. *Всякая полная система замкнута.*

Доказательство. Допустим, что полная система (3,11) не замкнута, т. е. что существует функция $f(P)$, у которой интеграл от квадрата существует, положителен и которая ортогональна ко всем функциям (3,11). У такой функции все коэффициенты Фурье по отношению к функциям (3,11) равны 0. Следовательно, для функции $f(P)$ не выполняется равенство Парсеваля.

Обратное утверждение неверно в рассматриваемом классе функций, имеющих разрывы только на конечном числе точек, линий, ..., $(d-1)$-мерных поверхностей. Оно становится верным в классе функций, интегрируемых вместе с их квадратами по Лебегу (см. § 20, п. 1).

11. Нормальное уравнение плоскости в n-мерном пространстве $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(n)})$:

$$\sum_{i=1}^{n} a^{(i)}\varphi^{(i)} = p,$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} [a^{(i)}]^2 = 1.$$

11. Аналог в пространстве функций:

$$\int a(P)\,\varphi(P)\,dP = p,$$

где

$$\int a^2(P)\,dP = 1.$$

12. Уравнение поверхности 2-го порядка с центром в начале координат

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} = 1, \qquad (4,11)$$

где

$$K_{ij} = K_{ji}.$$

12. Аналог в пространстве функций

$$\int\int K(P, Q)\,\varphi(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ = 1, \qquad (5,11)$$

где

$$K(P,\ Q) \equiv K(Q,\ P), \quad P \in G,\ Q \in G.$$

13. Основным фактом в теории квадратичной формы

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)},$$

$$K_{ij} = K_{ji} \qquad (6,11)$$

13. При широких предположениях относительно не равного нулю тождественно действительного симметрического ядра $K(P,\ Q)$, т. е. такого, для которого

является возможность линейным неособым преобразованием

$$\psi^{(i)}=\sum_{j=1}^{n}\varphi_i^{(j)}\varphi^{(j)}, \quad (7,11)$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

привести эту форму к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i}, \text{ где } m\leqslant n. \quad (8,11)$$

В дальнейшем нас будут интересовать только квадратичные формы с действительными коэффициентами K_{ij}; в этом случае все $\varphi_i^{(j)}$ можно выбрать также действительными. Тогда и все λ_i будут действительными. Существует очень много линейных преобразований (7,11) с действительными коэффициентами, приводящих квадратичную форму (6,11) к каноническому виду (8,11). Среди них особую роль играют ортогональные преобразования, т. е. такие преобразования (7,11), для которых

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_i^{(j)}\varphi_k^{(j)}=\delta_{ik},$$

где $\delta_{ik}=0$, при $i\neq k$ и $\delta_{ik}=1$ при $i=k$. В алгебре $K(P,Q)\equiv K(Q,P)$, будет показано, что интегральная форма

$$\int\int K(P,\ Q)\,\varphi(P)\,\varphi(Q)\,dP\,dQ \quad (10,11)$$

может быть представлена в виде конечной или бесконечной суммы вида

$$\sum_{i=1}\frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i}\,{}^{*)},$$

где

$$\psi^{(i)}=\int\varphi(P)\,\varphi_i(P)\,dP,$$

а функции $\varphi_i(P)$, $i=1, 2, \ldots,$ образуют непустое конечное или счетное множество взаимно ортогональных и нормированных функций, т. е.

$$\int\varphi_i(P)\,\varphi_k(P)\,dP=\delta_{ik}.$$

Эти функции $\varphi_i(P)$ соответствуют единичным векторам, направленным по конечным главным осям поверхности (5,11). Каждая из функций $\varphi_i(P)$ удовлетворяет однородному интегральному уравнению

$$\varphi_i(P)=\lambda_i\int K(P,\ Q)\,\varphi_i(Q)\,dQ. \quad (11,11)$$

Все λ_i — действительны. Та-

---

*) Мы не написали верхнего предела значений для i, который может быть конечным или бесконечным.

показывается, что коэффициенты такого преобразования удовлетворяют уравнениям

$$\varphi_i^{(k)}=\lambda_i \sum_{j=1}^{n} K_{kj}\varphi_i^{(j)}, \quad (9{,}11)$$

$i=1, 2, \ldots, m$ (ср. § 19) *).

Геометрически преобразованию квадратичной формы (6,11) ортогональным преобразованием (7,11) к каноническому виду (8,11) соответствует переход к такой координатной системе, когда осями координат служат главные оси поверхности (4,11). Векторы $(\varphi_i^{(1)}, \varphi_i^{(2)}, \ldots, \varphi_i^{(n)})$, $i=1, \ldots, m$, суть единичные векторы, направленные по конечным главным полуосям поверхности (4,11). Если $m<n$, то поверхность (4,11) вырождается в цилиндрическую поверхность. Тогда у нее, кроме m конечных осей, имеется еще $n-m$ бесконечных осей. Те полуоси, которым соответствуют положительные λ_i, называются действительными, а те полуоси, которым соответствуют отрицательные λ_i, называются мнимыми.

Задача о нахождении единичного вектора $(\varphi_1^{(1)}, \varphi_1^{(2)}, \ldots$

ким образом, интегральные уравнения с симметричным ядром весьма общего вида всегда имеют собственные значения (в противоположность уравнениям Вольтерра) и притом действительные.

Основная идея доказательства существования у инте-

*) § 19 предназначен для читателя, который хочет возобновить в памяти теорию квадратичных форм. Эта теория изложена там в форме, удобной для наших дальнейших приложений. Мы рекомендуем сейчас же прочитать этот параграф.

$\ldots, \varphi_1^{(n)})$, направленного по главной полуоси поверхности (4,11), соответствующей λ_1, которое мы будем считать наименьшим по абсолютной величине из всех λ_i, эквивалентна следующей задаче (ср. § 19). Найти максимум, если $\lambda_1 > 0$, или минимум, если $\lambda_1 < 0$ формы $\sum K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)}$ при условии, что

$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi^{(i)}]^2 = 1.$$

Нахождение единичного вектора, направленного по полуоси, соответствующей λ_2, поверхности (4,11) или, что все равно, нахождение решения системы

$$\varphi^{(i)} = \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(j)},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

ортогонального к решению $(\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(n)})$ легко сводится к нахождению максимума или минимума формы

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(K_{ij} - \frac{\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}}{\lambda_1}\right) \varphi_i \varphi_j$$

в классе единичных векторов $(\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})$. Аналогично находятся единичные векторы, грального уравнения (11,11) по крайней мере одного собственного значения состоит в следующем (ср. §12). Мы докажем существование в классе функций $\varphi(P)$, у которых

$$\int \varphi^2(P)\,dP = 1, \quad (12,11)$$

такой функции, которая дает отличный от 0 максимум или минимум λ_1 интегральной форме (10,11). Эта функция $\varphi_1(P)$ будет удовлетворять интегральному уравнению (11,11) при $i = 1$. Нахождение нормированной функции, направленной по главной полуоси, соответствующей λ_2, поверхности (5,11) и нахождение соответствующей собственной функции интегрального уравнения (11,11) легко сводится к нахождению максимума или минимума интегральной формы

$$\iint \left[K(P, Q) - \frac{\varphi_1(P)\varphi_1(Q)}{\lambda_1}\right] \times \\ \times \varphi(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ$$

в классе функций, нормированных условием (12,11). Аналогично находятся нормированные функции, направленные по другим главным полуосям поверхности (5,11) или, что все равно, другие нормированные решения интегрального уравнения (11,11), направленные по другим полуосям (ср. § 19).

14. Подставляя в тождество

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i}$$

вместо $\psi^{(i)}$ его выражение через $\varphi^{(j)}$, даваемое формулами (7, 11), получим:

$$\sum_{s,\, t}^{n} K_{st}\varphi^{(s)}\varphi^{(t)} \equiv \sum_{i,\, j} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{s,\, t} \frac{\varphi_i^{(s)}\varphi^{(s)}\varphi_i^{(t)}\varphi^{(t)}}{\lambda_i} \equiv$$

$$\equiv \sum_{s,\, t} \left(\sum_{i} \frac{\varphi_i^{(s)}\varphi_i^{(t)}}{\lambda_i} \right) \varphi^{(s)}\varphi^{(t)}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых произведениях в крайних членах этой цепи тождеств, получим:

$$K_{st} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^{(s)}\varphi_i^{(t)}}{\lambda_i}.$$

15. Необходимым и достаточным условием возможности разложения заданного вектора $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ по направлению конечных главных полуосей поверхности (4,11) является условие, чтобы вектор $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ был ортогонален ко всем бесконечным полуосям поверхности (4,11). Но из равенства (9,11), как легко видеть, следует, что

ортогональные предыдущим решениям (ср. п. 4 § 13).

14. При некоторых предположениях относительно $K(P, Q)$ будет показано (§ 15), что

$$K(P, Q) = \sum_i \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}.$$

15. В § 14 будет показано, что всякая функция $f(P)$, *истокообразно представимая* при помощи ядра $K(P, Q)$ и некоторой функции $h(Q)$ с интегрируемым квадратом, т. е. функция, представимая в виде

$$f(P) = \int K(P, Q)\, h(Q)\, dQ,$$

может быть разложена в равномерно и абсолютно сходякомпоненты $(\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(n)})$ векторов, направленных по бесконечным полуосям поверхности (4,11), должны удовлетворять уравнениям

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\,\chi^{(j)} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{13,11}$$

Условие же, что вектор $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ должен быть ортогональным ко всем $(\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(n)})$, удовлетворяющим уравнениям (13,11), есть условие того, что система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ji} h^{(j)} = f^{(i)},$$

$$i = 1, \ldots, n,$$

относительно неизвестных $h^{(1)}, \ldots, h^{(n)}$ или, что все равно, в силу условия $K_{ij} = K_{ji}$ система

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij} h^{(j)} = f^{(i)},$$

$$i = 1, \ldots, n,$$

должна иметь решение (ср. § 3).

щийся ряд по собственным функциям $\varphi_i(P)$ ядра $K(P,Q)$ (теорема Гильберта-Шмидта).

В §§ 12—18 *мы будем предполагать, что все рассматриваемые функции принадлежат к классу, описанному в замечании к* § 1, *и кроме того, что все они действительны и их квадраты интегрируемы по всей конечной области их определения.*