§ 12. Доказательство существования собственных функций у интегральных уравнений с симметрическими ядрами

1. Предварительные замечания. Если существуют интегралы от квадратов $\varphi(P)$, $\psi(P)$ и $K(P, Q)$ по областям их определения, что мы предположили, то интеграл

$$\iint K(P, Q)\varphi(P)\psi(Q)\,dP\,dQ$$

также существует. Действительно,

$$|K(P, Q)\varphi(P)\psi(Q)| \leqslant \frac{1}{2}K^2(P, Q)+\frac{1}{2}\varphi^2(P)\varphi^2(Q).$$

Поэтому

$$\iint |K(P, Q)\varphi(P)\psi(Q)|\,dP\,dQ \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\iint K^2(P, Q)\,dP\,dQ+\frac{1}{2}\int\varphi^2(P)\,dP\cdot\int\psi^2(Q)\,dQ.$$

Символ $\iint$ всюду в дальнейшем будет означать интегрирование по всей области определения $K(P, Q)$, т. е. по всей той области, где $P\in G$ и $Q\in G$ (ср. § 4, где аналогично определялся символ $\int$).

В §§ 12—18 мы будем рассматривать ядра $K(P, Q)$, описанные в п. 2 настоящего параграфа. Для таких $K(P, Q)$ все двойные интегралы, т. е. интегралы по совокупности (P,Q), вида

$$\int K(P, Q)\varphi(P)\psi(Q)\,dP\,dQ$$

можно рассматривать как повторные интегралы, взятые сначала по Q, а потом по P*).

Положим

$$B\varphi(P)=\int K(P, Q)\varphi(Q)\,dQ+c\varphi(P)$$

и

$$(\chi, \psi)=\int\chi(P)\psi(P)\,dP.$$

*) Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, М., 1960, т. III, гл. XVI, § 5, стр. 214—273.

Функция $B\varphi(P)$ интегрируема с квадратом по G, так как в силу неравенства Буняковского

$$\left(\int K(P, Q)\varphi(Q)\,dQ\right)^2 \leqslant \int [K(P, Q)]^2\,dQ \cdot \int \varphi^2(Q)\,dQ$$

и потому

$$\int\left(\int K(P, Q)\varphi(Q)\,dQ\right)^2 dP \leqslant \iint [K(P,Q)]^2\,dP\,dQ \cdot \int \varphi^2(Q)\,dQ.$$

Обобщение неравенства Буняковского. Пусть сумма интегралов

$$\iint K(P, Q)\varphi(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ + c\int \varphi^2(P)\,dP \equiv (B\varphi, \varphi), \quad (1,12)$$

где c — некоторая постоянная, *неотрицательно определенна.* Это значит, что при всякой действительной функции $\varphi(P)$ эта сумма не отрицательна. Как и всюду в дальнейшем, мы будем предполагать, что $K(P, Q) = K(Q, P)$. Тогда для любых функций $\varphi(P)$ и $\psi(P)$

$$(B\varphi, \psi)^2 \leqslant (B\varphi, \varphi)\cdot(B\psi, \psi). \quad (2,12)$$

Доказательство неравенства (2,12). В силу предполагаемой неотрицательной определенности суммы (1,12) при всяком действительном μ

$$\iint K(P, Q)\,[\varphi(P) + \mu\psi(P)]\,[\varphi(Q) + \mu\psi(Q)]\,dP\,dQ + \\ + c\int [\varphi(P) + \mu\psi(P)]^2\,dP \geqslant 0.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$\iint K(P, Q)\varphi(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ + \\ + \mu\iint K(P, Q)\varphi(P)\psi(Q)\,dP\,dQ + \\ + \mu\iint K(P, Q)\varphi(Q)\psi(P)\,dP\,dQ + \\ + \mu^2\iint K(P, Q)\psi(P)\psi(Q)\,dP\,dQ + \\ + c\int \varphi^2(P)\,dP + 2\mu c\int \varphi(P)\psi(P)\,dP + c\mu^2\int \psi^2(P)\,dP \geqslant 0.$$

Так как в силу симметричности $K(P, Q)$ второй и третий интегралы равны между собой, то это неравенство можно переписать так:

$$(B\varphi, \varphi)+2\mu(B\varphi, \psi)+\mu^2(B\psi, \psi)\geqslant 0.$$

Это последнее неравенство может выполняться при всяком действительном μ только в том случае, если

$$(B\varphi, \psi)^2\leqslant(B\varphi, \varphi)\cdot(B\psi, \psi),$$

что и требовалось доказать.

Если $K(P, Q)\equiv 0$, а $c=1$, неравенство (2,12) переходит в неравенство Буняковского

$$\left(\int\varphi(P)\psi(P)\,dP\right)^2\leqslant\int\varphi^2(P)\,dP\cdot\int\psi^2(P)\,dP.$$

2. *В дальнейшем до § 18 включительно мы будем рассматривать интегральные уравнения с действительным симметрическим ядром вида*

$$K(P, Q)=\frac{\overline{K}(P, Q)}{PQ^{\alpha}}, \quad 0\leqslant\alpha<\frac{d}{2}, \tag{3,12}$$

где $\overline{K}(P, Q)$ — равномерно непрерывная функция по (P,Q), когда $P\in G$ и $Q\in G$. Мы будем считать область G конечной. Поэтому функция $\overline{K}(P, Q)$ ограничена.

Теорема. *Пусть дано семейство функций $h(P)$, для которых*

$$\int h^2(P)\,dP\leqslant M^2, \tag{4,12}$$

где M — некоторая постоянная, одна и та же для всех функций $h(P)$. Тогда семейство функций $\psi(P)$, определяемых равенством

$$\psi(P)=\int K(P, Q)\,h(Q)\,dQ,$$

равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на G.

Равностепенная непрерывность семейства означает, что для любых двух точек P_1 и P_2, принадлежащих G, $|\psi(P_2)-\psi(P_1)|$ делается меньше произвольного числа $\varepsilon>0$, если только расстояние P_1P_2 меньше некоторого $\eta>0$, зависящего только от ε, но не зависящего ни от функции $\psi(P)$ рассматриваемого семейства, ни от положения точек P_1 и P_2 на области G.

Доказательство.

$$|\psi(P_2)-\psi(P_1)|^2=\left|\int [K(P_2,\ Q)-K(P_1,\ Q)]\,h(Q)\,dQ\right|^2\leqslant$$
$$\leqslant\int [K(P_2,\ Q)-K(P_1,\ Q)]^2\,dQ\cdot\int h^2(Q)\,dQ\leqslant$$
$$\leqslant M\int [K(P_2,\ Q)-K(P_1,\ Q)]^2\,dQ. \qquad (5,12)$$

Делая предпоследний переход, мы воспользовались неравенством Буняковского, а делая последний — неравенством (4,12). Оценим интеграл, стоящий в правой части неравенства (5,12). Разобьем для этого область G на две части G_1 и G_2. К G_1 мы отнесем точки G, отстоящие от одной из точек P_1 или P_2 не дальше ϱ. В силу равенства (3,12) и ограниченности $\overline{K}(P,\ Q)$

$$\int\limits_{G_1} [K(P_2,\ Q)-K(P_1,\ Q)]^2\,dQ$$

будет меньше любого положительного ε, если ϱ будет меньше некоторого числа $\varrho(\varepsilon)$, зависящего только от ε и стремящегося к 0 при $\varepsilon\longrightarrow 0$. При этом $\varrho(\varepsilon)$ не зависит от точек P_1 и P_2. С другой стороны, при фиксированном ϱ

$$\int\limits_{G_2} [K(P_2,\ Q)-K(P_1,\ Q)]^2\,dQ \qquad (6,12)$$

можно сделать как угодно малым, если только точки P_1 и P_2 становятся достаточно близкими друг к другу в силу равномерной непрерывности $\overline{K}(P,\ Q)$ в области G. При этом гарантируемая степень малости интеграла (6,12) зависит только от расстояния между точками P_1 и P_2, но не от их положения.

Равномерную ограниченность семейства функций $\psi(P)$ легко получить, пользуясь неравенством Буняковского. Действительно,

$$\left|\int K(P,\ Q)\,h(Q)\,dQ\right|\leqslant\sqrt{\int K(P,\ Q)^2\,dQ}\,\sqrt{\int h^2(Q)\,dQ}.$$

Первый из интегралов, стоящих в правой части этого неравенства, ограничен согласно (3,12), второй меньше M согласно условию (4,12).

3. Теорема. *Интегральное уравнение.*

$$\varphi(P)=\lambda \int K(P, Q)\,\varphi(Q)\,dQ \tag{7,12}$$

имеет по крайней мере одно конечное собственное значение, если ядро обладает свойствами, описанными в начале предыдущего пункта, и не равно 0 тождественно. Вообще, во всем дальнейшем мы будем рассматривать только ядра, описанные в начале предыдущего пункта, не оговаривая это особо каждый раз.

Идея приводимого ниже доказательства этой теоремы изложена на правой стороне в п. 13 § 11. Впервые почти одновременно доказали таким методом эту теорему независимо один от другого Гильберт и Гольмгрен. Наибольшая из встречающихся при этом трудностей состоит в доказательстве существования в рассматриваемом классе функций $\varphi(P)$, удовлетворяющих условию (12,11), такой функции, которая дает максимум или минимум интегральной форме (10,11)*). Излагаемое нами доказательство существования такой функции принадлежит И. М. Гельфанду.

Доказательство. Рассмотрим множество S функций $\varphi(P)$, для которых

$$\int \varphi^2(P)\,dP=1. \tag{8,12}$$

Пусть

$$I(\varphi)=\iint K(P, Q)\,\varphi(P)\,\varphi(Q)\,dP\,dQ.$$

Значения $I(\varphi)$ на множестве S ограничены. Действительно, по неравенству Буняковского

$$|I(\varphi)|^2 \leqslant \iint K^2(P, Q)\,dP\,dQ\cdot\iint \varphi^2(P)\,\varphi^2(Q)\,dP\,dQ=$$
$$=\iint K^2(P, Q)\,dP\,dQ\cdot\int \varphi^2(P)\,dP\cdot\int \varphi^2(Q)\,dQ.$$

Первый из последних трех интегралов конечен по условию (3,12), а последние два интеграла равны 1 согласно (8,12).

*) Справедливость аналогичного утверждения о существовании минимума и максимума квадратичной формы (6,11) на множестве единичных векторов $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(n)})$ прямо вытекает из теоремы Вейерштрасса о существовании максимума и минимума любой непрерывной функции на любом замкнутом ограниченном множестве точек, в частности — функции (6,11) на сфере $\Sigma\,[\varphi^{(i)}]^2=1$,

Пусть μ_m, соответственно μ_M, есть нижняя, соответственно верхняя, грань значений $I(\varphi)$ на семействе S. Предполагая, что $K(P, Q)$ не равно нулю тождественно, докажем, что по крайней мере одно из чисел μ_M и μ_m отлично от нуля. В самом деле, в противном случае интеграл $I(\varphi)$ равнялся бы 0 для всех функций $\varphi(P)$ семейства S. В частности, это было бы для всякой функции $\varphi_{P_0}(P)$, равной 0 всюду, кроме некоторой произвольно малой окрестности одной какой-нибудь точки P_0, где $\varphi_{P_0}(P) > 0$. Но, с другой стороны, так как $K(P, Q)$ не тождественно равно 0, то непременно найдется точка (P_0, Q_0), где $K(P_0, Q_0) \neq 0$. При этом мы можем считать, что Q_0 не совпадает с P_0, так как если бы $K(P, Q)$ равнялось 0 для всех точек (P, Q), у которых P не совпадает с Q, то оно равнялось бы тождественно 0 в силу предполагаемой равномерной непрерывности по (P, Q) функции $\overline{K}(P, Q)$, написанной в соотношении (3,12). Но

$$I(\varphi_{P_0} + \varphi_{Q_0}) =$$
$$= I(\varphi_{P_0}) + I(\varphi_{Q_0}) + \iint K(P, Q)\, \varphi_{P_0}(P)\, \varphi_{Q_0}(Q)\, dP\, dQ +$$
$$+ \iint K(P, Q)\, \varphi_{P_0}(Q)\, \varphi_{Q_0}(P)\, dP\, dQ.$$

Последние два из написанных здесь интегралов берутся по малым окрестностям точек (P_0, Q_0) и (Q_0, P_0); в силу предполагаемой симметричности $K(P, Q)$ интегралы по этим двум окрестностям совпадают и в силу того, что $K(P_0, Q_0) \neq 0$ и в некоторой окрестности точки (P_0, Q_0) сохраняет знак, они отличаются от 0. Интегралы же $I(\varphi_{P_0})$ и $I(\varphi_{Q_0})$ мы предположили равными 0. Поэтому

$$I(\varphi_{P_0} + \varphi_{Q_0}) \neq 0,$$

что невозможно. Итак, при наших предположениях μ_m и μ_M не могут быть одновременно равными 0. Пусть для определенности $\mu_M \neq 0$.

Рассмотрим бесконечную последовательность нормированных функций

$$\varphi_1(P),\ \varphi_2(P),\ \ldots,\ \varphi_k(P),\ \ldots$$

для которых

$$I(\varphi_k) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \mu_M. \tag{9,12}$$

Разность

$$-I(\varphi)+\mu_M\int\varphi^2(P)\,dP,$$

как легко проверить, неотрицательно определенна в смысле, описанном в п. 1 настоящего параграфа. Поэтому в неравенстве (2,12) можно считать

$$B\varphi(P)=\int(-K(P,\ Q))\,\varphi(Q)\,dQ+\mu_M\varphi(P).$$

Положим в этом неравенстве

$$\varphi(P)=\varphi_k(P),$$

$$\psi(P)=B\varphi_k(P).$$

Получим:

$$(B\varphi_k,\ B\varphi_k)^2\leqslant(B\varphi_k,\ \varphi_k)\cdot(BB\varphi_k,\ B\varphi_k). \qquad (10,12)$$

В силу (9,12)

$$(B\varphi_k,\ \varphi_k)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0. \qquad (11,12)$$

С другой стороны,

$$|B\varphi_k(P)|\leqslant\frac{1}{2}\int K^2(P,\ Q)\,dQ+\frac{1}{2}\int\varphi_k^2(Q)\,dQ+|\mu_M|\cdot|\varphi_k(P)|.$$

Согласно (3,12) первый из интегралов в правой части ограничен, а второй по условию (8,12) равен 1. Поэтому

$$|B\varphi_k(P)|\leqslant M+|\mu_M|\cdot|\varphi_k(P)|,$$

где M — некоторая не зависящая от φ_k постоянная. Точно так же аналогичную оценку можно получить для $BB\varphi_k$. Применяя неравенство Буняковского, легко показать, что выражение $(BB\varphi_k,\ B\varphi_k)$ также ограничено. Поэтому из соотношений (10,12) и (11,12) следует, что

$$(B\varphi_k,\ B\varphi_k)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0. \qquad (12,12)$$

Согласно п. 2 семейство функций

$$K\varphi_k(P)=\int K(P,\ Q)\,\varphi_k(Q)\,dQ$$

равностепенно непрерывно и равномерно ограничено. Поэтому по теореме Арцеля (см., например, мои «Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям», § 11) из последовательности функций $K\varphi_k(P)$ можно выбрать *равномерно сходящуюся* подпоследовательность. Пусть это будет

$$K\varphi_{k_1}(P),\ K\varphi_{k_2}(P),\ \ldots,\ K\varphi_{k_m}(P),\ \ldots$$

Пусть

$$K\varphi_{k_m}(P) \xrightarrow[m\to\infty]{} \varphi^*(P).$$

Мы утверждаем тогда, что функция $\varphi^*(P)$ будет решением интегрального уравнения (7,12) при $\lambda = \dfrac{1}{\mu_M}$. Действительно,

$$\begin{aligned} |BK\varphi_k(P)| &= |-KK\varphi_k(P) + \mu_M K\varphi_k(P)| = \\ &= |K[-K\varphi_k(P) + \mu_M\varphi_k(P)]| = |KB\varphi_k(P)| = \\ &= \left|\int K(P,\ Q)\cdot B\varphi_k(Q)\,dQ\right| \leqslant \\ &\leqslant \left\{\int [K(P,\ Q)]^2\,dQ\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\int [B\varphi_k(Q)]^2\,dQ\right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Поэтому, пользуясь (12,12), получим:

$$BK\varphi_{k_m}(P) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Отсюда в силу равномерной сходимости $K\varphi_{k_m}(P)$

$$B\varphi^*(P) = 0,$$

что и требовалось доказать. При этом $\varphi^*(P)$ не равно 0 тождественно, так как в противном случае в силу соотношения (12,12) последовательность $\mu_M\varphi_{k_m}(P)$ при $m \longrightarrow \infty$ также стремилась бы в среднем к 0; а это невозможно, так как

$$\int [\mu_M\varphi_{k_m}(P)]^2\,dP = \mu_M^2 > 0.$$

Замечания. 1. Случай $\mu_m \neq 0$ сводится к разобранному случаю $\mu_M \neq 0$ изменением знака у $K(P,\ Q)$.

2. Мы показали, что нижняя, соответственно верхняя, грань значений интеграла $I(\varphi)$ на множестве нормированных функций $\varphi(P)$ равна обратной величине некоторого собственного значения λ интегрального уравнения (7,12), если только эта грань не равна 0. С другой стороны, обратная величина каждого собственного значения λ_i уравнения (7,12) есть одно из значений интеграла $I(\varphi)$ при некоторой функции из класса (8,12). Действительно, значение интеграла $I(\varphi)$ при $\varphi(P)=\varphi_i(P)$, где $\varphi_i(P)$ есть нормированная собственная функция, соответствующая собственному значению λ_i, равно:

$$\int \varphi_i(P)\,dP \int K(P, Q)\,\varphi_i(Q)\,dQ = \frac{1}{\lambda_i}\int \varphi_i^2(P)\,dP = \frac{1}{\lambda_i}.$$

Можно также сказать, что верхняя, соответственно нижняя, грань значений интеграла $I(\varphi)$ на множестве функций $\varphi(P)$, удовлетворяющих условию

$$\int \varphi^2(P)\,dP \leqslant 1, \tag{13,12}$$

равна обратной величине наименьшего положительного, соответственно наибольшего отрицательного, собственного значения λ уравнения (7,12), если только эта грань не равна 0. Отсюда следует, что при всех функциях $\varphi(P)$, удовлетворяющих условию (13,12), значения интеграла $I(\varphi)$ по абсолютной величине не превосходят обратной величины наименьшего по абсолютному значению собственного значения λ уравнения (7,12). Кроме того, из предыдущих рассуждений видно, что верхняя, соответственно нижняя, грань $I(\varphi)$ на (13,12) *достигается* при φ, равном какой-нибудь нормированной собственной функции, соответствующей наименьшему по абсолютной величине положительному, соответственно отрицательному, собственному значению λ, если только эта грань не равна 0.

Задача. Доказать, что множество значений $I(\varphi)$ на (8,12) может быть любой точкой, либо замкнутым отрезком, либо полузамкнутым отрезком, к которому не принадлежит точка $I=0$, являющаяся одним из концов этого отрезка. Множество значений $I(\varphi)$ на (13,12) всегда содержит значение $I=0$ и является либо точкой, либо отрезком. Какие случаи возможны, если ядро вырожденное?