§ 13. Некоторые свойства собственных функций и собственных значений интегральных уравнений с симметрическими ядрами

1. Теорема. *Собственные функции уравнения* (7,12), *соответствующие различным собственным значениям* λ, *ортогональны между собой.*

Доказательство. Пусть

$$\varphi_1(P)=\lambda_1\int K(P,\ Q)\,\varphi_1(Q)\,dQ, \tag{1,13}$$

$$\varphi_2(P)=\lambda_2\int K(P,\ Q)\,\varphi_2(Q)\,dQ, \tag{2,13}$$

причем $\lambda_1\neq\lambda_2$. Умножим (1,13) на $\lambda_2\varphi_2(P)$, а (2,13) — на $\lambda_1\varphi_1(P)$. Вычитая почленно полученные равенства и интегрируя разность по P, получим:

$$\begin{aligned}(\lambda_2-\lambda_1)\int\varphi_1(P)\,\varphi_2(P)\,dP&=\\ =\lambda_1\lambda_2\iint K(P,\ Q)\,\varphi_1(P)\,\varphi_2(Q)\,dQ\,dP&-\\ -\lambda_1\lambda_2\iint K(P,\ Q)\,\varphi_2(P)\,\varphi_1(Q)\,dQ\,dP&.\end{aligned} \tag{3,13}$$

Меняя обозначения переменных интеграции во втором члене правой части, получим:

$$\iint K(P,\ Q)\,\varphi_2(P)\,\varphi_1(Q)\,dP\,dQ=\iint K(Q,\ P)\varphi_2(Q)\,\varphi_1(P)dQdP.$$

Так как $K(P,\ Q)=K(Q,\ P)$, то отсюда следует, что правая часть (3,13) равна 0. А так как, по предположению, $\lambda_2\neq\lambda_1$, то

$$\int\varphi_1(P)\,\varphi_2(P)\,dP=0,$$

что и требовалось доказать.

2. Теорема. *Все собственные значения интегральных уравнений с симметрическими ядрами действительны.*

Докажем сначала лемму. *Все собственные функции уравнений рассматриваемого вида непрерывны.*

Действительно, согласно сказанному в конце § 11 мы считаем все такие функции интегрируемыми с квадратом. Наша лемма сразу следует из п. 2 § 12.

Доказательство теоремы. Допустим, что у интегрального уравнения (7,12) имеется комплексное собственное значение $\lambda = a + bi$, где $b \neq 0$. Пусть ему соответствует собственная функция $\varphi(P)$. Тогда

$$\varphi(P) = (a + bi) \int K(P, Q) \varphi(Q) \, dQ. \tag{4,13}$$

Обозначая через $\overline{\varphi(P)}$ функцию, комплексно сопряженную с $\varphi(P)$, из тождества (4,13) получим:

$$\overline{\varphi(P)} = (a - bi) \int K(P, Q) \overline{\varphi(Q)} \, dQ.$$

Согласно теореме 1 должно быть:

$$\int \varphi(P) \overline{\varphi(P)} \, dP = 0.$$

Отсюда и из только что доказанной леммы следует, что

$$\varphi(P) \equiv 0,$$

и потому $(a + bi)$ при $b \neq 0$ не может быть собственным значением λ.

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что как действительная, так и мнимая часть комплексной собственной функции является также собственной функцией, соответствующей тому же собственному значению.

3. Ортогонализация собственных функций. Подобно тому как у поверхности второго порядка может быть несколько главных полуосей одинаковой длины, точно так же одному и тому же собственному значению λ интегрального уравнения с симметрическим ядром могут соответствовать несколько линейно независимых между собой собственных функций. По второй теореме Фредгольма множество линейно независимых между собой собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению, всегда конечно. Пусть это будут функции

$$\varphi_1(P), \ \varphi_2(P), \ \ldots, \ \varphi_m(P). \tag{5,13}$$

Из того, что соответствующее этим функциям собственное значение λ действительно, легко вывести, что все эти функции мы можем выбрать действительными. Согласно теореме 1 все эти функции ортогональны собственным функциям того же интегрального уравнения, но соответствующим другим значениям λ. Любая линейная комбинация с постоянными коэффициентами функций (5,13) есть также собственная функция уравнения (7,12). Покажем, что, составляя такие линейные с действительными коэффициентами комбинации функций (5,13), мы можем получить m нормированных, взаимно ортогональных и потому линейно независимых между собой собственных функций

$$\psi_1(P),\ \psi_2(P),\ \ldots,\ \psi_m(P)$$

уравнения (7,12). Положим

$$\psi_1(P)=a\varphi_1(P).$$

Подберем постоянную $a\neq 0$ так, чтобы

$$\int \psi_1^2(P)\,dP=1.$$

Положим

$$\psi_2(P)=b\left[\varphi_2(P)+b_1\psi_1(P)\right],$$

где $b\neq 0$ и b_1 — некоторые постоянные. Выберем постоянную b_1 так, чтобы было

$$\int \psi_1\psi_2\,dP=b\left[\int \psi_1\varphi_2\,dP+b_1\int \psi_1^2\,dP\right]=0.$$

Так как $\int \psi_1^2\,dP=1$, то это неравенство единственным образом определяет b_1. Постоянную b подберем так, чтобы норма ψ_2 равнялась 1. Это возможно сделать, потому что в силу предполагаемой линейной независимости функций (5,13) $\varphi_2(P)+b_1\psi_1(P)$ не равно 0 тождественно. А так как все собственные функции уравнения (7,12) непрерывны, то интеграл от квадрата $\varphi_2+b_1\psi$ не может быть равным 0.

Положим далее

$$\psi_3(P)=c\left[\varphi_3(P)+c_2\psi_2(P)+c_1\psi_1(P)\right],\quad c\neq 0.$$

Подберем постоянную c_1 так, чтобы

$$\int \psi_1\psi_3\,dP=c\left[\int \varphi_3\psi_1\,dP+c_2\int \psi_2\psi_1\,dP+c_1\int \psi_1^2\,dP\right]=0.$$

Так как

$$\int \psi_1\psi_2\,dP=0 \quad \text{и} \quad \int \psi_1^2\,dP=1,$$

то это условие однозначно определяет c_1:

$$c_1 = -\int \varphi_3 \psi_1 \, dP.$$

Совершенно так же постоянные c_2 и $c \neq 0$ можно выбрать так, чтобы

$$\int \psi_2 \psi_3 \, dP = 0 \quad \text{и} \quad \int \psi_3^2 \, dP = 1.$$

Продолжая этот процесс, получим $\psi_4(P), \ldots, \psi_m(P)$.

Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением лишь таких линейно независимых между собой собственных функций рассматриваемого интегрального уравнения, которые образуют ортонормальную систему. Возьмем одну какую-нибудь ортонормальную систему собственных функций этого уравнения, *максимальную* в том смысле, что всякая собственная функция этого интегрального уравнения выражается линейно через функции этой системы. Для дальнейшего нам будет удобно занумеровать их так, чтобы их номера возрастали по мере увеличения абсолютных величин соответствующих собственных значений λ (множество которых согласно § 8 не имеет конечных предельных точек). Если одному и тому же λ соответствуют несколько линейно независимых между собой собственных функций, то все эти собственные функции мы поставим рядом. Таким образом, мы получим ряды

$$\varphi_1(P),\ \varphi_2(P),\ \ldots,\ \varphi_i(P),\ \ldots \tag{6,13}$$

$$\lambda_1,\qquad \lambda_2,\ \ldots,\qquad \lambda_i,\ \ldots \tag{7,13}$$

Здесь под каждой собственной функцией подписано соответствующее собственное значение λ. Ряды (6,13) и (7,13) могут быть конечными или бесконечными. В ряду (7,13) некоторые рядом стоящие λ_i могут быть равными. Это будет тогда, если при соответствующем значении λ_i уравнение (7,12) имеет несколько линейно независимых между собой собственных функций. Но согласно второй теореме Фредгольма для каждого λ_i имеется только конечное число собственных функций, ортогональных между собой и потому линейно независимых. Из этой же теоремы следует, что если ряды (6,13) и (7,13) бесконечные, то

$$|\lambda_i| \to \infty \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

Система (6,13) будет максимальной в указанном выше смысле, если в ряду (7,13) будут находиться все собственные значения рассматриваемого интегрального уравнения и если каждому такому собственному значению в ряду (6,13) будет соответствовать максимальное число линейно независимых между собой собственных функций, отвечающих этому собственному значению.

4. Теорема. *Пусть* $\varphi_1(P)$ — *собственная функция интегрального уравнения* (7,12), *соответствующая собственному значению* λ_1. *Тогда для ядра*

$$K_1(P, Q) = K(P, Q) - \frac{\varphi_1(P) \cdot \varphi_1(Q)}{\lambda_1}$$

ряды собственных функций и собственных значений, аналогичные рядам (6,13) *и* (7,13) *для* $K(P, Q)$, *можно получить из рядов* (6,13) *и* (7,13), *соответствующих ядру* $K(P, Q)$, *зачеркиванием* $\varphi_1(P)$ *и* λ_1.

Доказательство. Покажем сначала, что всякая собственная функция $\varphi(P)$ ядра $K_1(P, Q)$, соответствующая собственному значению λ, есть собственная функция ядра $K(P, Q)$, соответствующая тому же собственному значению. Действительно, пусть

$$\varphi(P) = \lambda \int K_1(P, Q)\, \varphi(Q)\, dQ. \tag{8,13}$$

Тогда

$$\int \varphi(P)\, \varphi_1(P)\, dP = 0, \tag{9,13}$$

потому что

$$\begin{aligned}
\int \varphi(P)\, \varphi_1(P)\, dP &= \lambda \iint K_1(P, Q)\, \varphi(Q)\, \varphi_1(P)\, dP\, dQ = \\
&= \lambda \iint \left[K(P, Q) - \frac{\varphi_1(P)\, \varphi_1(Q)}{\lambda_1} \right] \varphi_1(P)\, \varphi(Q)\, dP\, dQ = \\
&= \lambda \iint K(P, Q)\, \varphi_1(P)\, \varphi(Q)\, dP\, dQ - \\
&- \frac{\lambda}{\lambda_1} \int \varphi_1(Q)\, \varphi(Q)\, dQ \int \varphi_1^2(P)\, dP = \\
&= \frac{\lambda}{\lambda_1} \int \varphi_1(Q)\, \varphi(Q)\, dQ - \frac{\lambda}{\lambda_1} \int \varphi_1(Q)\, \varphi(Q)\, dQ = 0.
\end{aligned}$$

В силу соотношения (9,13) равенство (8,13) можно переписать в следующем виде:

$$\varphi(P)=\lambda\int\left[K(P, Q)-\frac{\varphi_1(P)\varphi_1(Q)}{\lambda_1}\right]\varphi(Q)\,dQ=$$
$$=\lambda\int K(P, Q)\,\varphi(Q)\,dQ.$$

Таким образом, доказано, что $\varphi(P)$ есть собственная функция интегрального уравнения (7,12), отвечающая тому же λ.

Покажем теперь обратно, что всякая собственная функция $\varphi_i(P)$ из ряда (6,13), соответствующая собственному значению λ_i из ряда (7,13) при $i>1$, есть собственная функция, отвечающая тому же собственному значению λ_i для ядра $K_1(P, Q)$. Действительно, пусть

$$\varphi_i(P)=\lambda_i\int K(P, Q)\,\varphi_i(Q)\,dQ, \quad i>1. \tag{10,13}$$

Тогда

$$\int\varphi_1(P)\,\varphi_i(P)\,dP=0.$$

Поэтому из равенства (10,13) следует:

$$\varphi_i(P)=\lambda_i\int\left[K_1(P, Q)+\frac{\varphi_1(P)\varphi_1(Q)}{\lambda_1}\right]\varphi_i(Q)\,dQ=$$
$$=\lambda_i\int K_1(P, Q)\,\varphi_i(Q)\,dQ.$$

Функция же $\varphi_1(Q)$ не является собственной функцией уравнения (8,13), так как в противном случае из условия (9,13) следовало бы, что $\int\varphi_1^2(P)\,dP=0$, что невозможно.

Из доказанных утверждений легко следует наша теорема.

5. Применяя последовательно теорему 4 к ядрам

$$K_1(P, Q)=K(P, Q)-\frac{\varphi_1(P)\varphi_1(Q)}{\lambda_1},$$
$$K_2(P, Q)=K_1(P, Q)-\frac{\varphi_2(P)\varphi_2(Q)}{\lambda_2}, \ \ldots,$$

мы найдем, что все собственные функции $\varphi_i(P)$ из ряда (6,13), соответствующие собственным значениям λ_i из ряда (7,13) для ядра $K(P, Q)$, суть собственные функции, соответствующие тем же собственным значениям, для ядра

$$K_m(P, Q) = K(P, Q) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi_k(P)\varphi_k(Q)}{\lambda_k},$$

если $i > m$. Эти собственные функции $\varphi_i(P)$, $i > m$ образуют для интегрального уравнения с ядром $K_m(P, Q)$ максимальную систему собственных функций в том смысле, что всякая другая собственная функция этого ядра выражается линейно через них.

Таким образом, *ряды* (6, 13) *и* (7, 13) *для симметрического ядра* $K(P, Q)$ *можно получить, применяя последовательно вариационный метод к ядрам* $K(P, Q)$, $K_1(P, Q)$, $K_2(P, Q)$, ...

6. Допустим, что ядро $K(P, Q)$ имеет только конечное число линейно независимых собственных функций (так будет у всякого вырожденного ядра). Тогда при достаточно большом m ядро $K_m(P, Q)$ не будет иметь ни одного собственного значения. С другой стороны, так как функции $\varphi_k(P)$ согласно лемме п. 2 непрерывны, то ядро $K_m(P, Q)$ будет точно так же, как и $K(P, Q)$, обладать всеми свойствами, описанными в п. 2 § 12. Поэтому согласно п. 3 § 12 должно быть $K_m(P, Q) \equiv 0$, т. е. должно быть

$$K(P, Q) \equiv \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi_k(P)\varphi_k(Q)}{\lambda_k}. \tag{11,13}$$

Из этой формулы следует, что всякое ядро рассматриваемого вида с конечным числом собственных значений (или, что равносильно, с конечным числом линейно независимых собственных функций) есть вырожденное ядро.

Замечание. Пусть $K(P,Q) = \dfrac{\overline{K}(P, Q)}{PQ^\alpha}$, где $0 \leqslant \alpha < d$, $\overline{K}(P, Q)$ — равномерно непрерывная функция P и Q и $\overline{K}(P, Q) = \overline{K}(Q, P)$. Легко видеть, что для непрерывных собственных функций интегрального уравнения с ядром $K(P, Q)$ указанного вида справедливы теоремы 1 и 2 настоящего параграфа. Воспользовавшись этим, мы покажем, что интегральное уравнение с ядром указанного вида имеет по крайней мере одно собственное значение.

Из леммы § 8 следует, что существует такое m, что ядро $K^{(m)}(P, Q)=\underbrace{K\circ K\circ\ldots\circ K}_{m\text{ раз}}$ непрерывно. Так как $K^{(m)}(P, Q)$ — непрерывное симметрическое ядро, то по доказанному в § 12 существуют такое действительное число μ_1 и непрерывная функция $\varphi_1(P)$, что

$$\varphi_1=\mu_1 K^{(m)}\varphi_1$$

($K^{(m)}$ означает оператор, соответствующий ядру $K^{(m)}(P, Q)$, см. стр. 37). Будем предполагать, что m нечетно, и положим $\mu_1=\lambda_1^m$, где λ_1 — действительное число. Пусть e — какой-нибудь первообразный корень степени m из единицы. Имеет место равенство

$$(E-\lambda_1 K)(E-\lambda_1 eK)(E-\lambda_1 e^2 K)\ldots(E-\lambda_1 e^{m-1}K)=$$
$$=(E-\lambda_1^m K^{(m)}).$$

Справедливость этого равенства вытекает из алгебраического тождества

$$(a^m-b^m)\equiv(a-b)(a-eb)(a-e^2 b)\ldots(a-e^{m-1}b).$$

Таким образом,

$$(E-\lambda_1^m K^{(m)})\varphi_1=(E-\lambda_1 K)(E-\lambda_1 eK)\ldots(E-\lambda_1 e^{m-1}K)\varphi_1.$$

Положим

$$(E-\lambda_1 eK)(E-\lambda_1 e^2 K)\ldots(E-\lambda_1 e^{m-1}K)\varphi_1=\psi_1.$$

Тогда

$$(E-\lambda_1 K)\psi_1=0 \text{ и } \psi_1\not\equiv 0,$$

т. е. ψ_1 есть собственная функция интегрального уравнения с ядром $K(P, Q)$. Действительно, так как m нечетно, то $\lambda_1 e^p$ — комплексные числа при $1\leqslant p\leqslant m-1$. Далее, $(E-\lambda_1 e^p K)\varphi\not\equiv 0$ при любой функции $\varphi(P)\not\equiv 0$ и $1\leqslant p\leqslant m-1$, так как уравнение с симметрическим ядром не имеет комплексных собственных значений в силу теоремы 2 настоящего параграфа. Поэтому $\psi_1\not\equiv 0$, так как в противном случае мы получили бы, что для некоторого $1\leqslant p\leqslant m-1$ и некоторой функции $\varphi(P)$, нетождественно равной нулю, $(E-\lambda_1 e^p K)\varphi=0$.

Этим наше утверждение доказано.

Задача 1. Доказать, что для симметрического ядра $K(P, Q)$, рассматриваемого в п. 2 § 12, можно найти вторую собственную функцию из ряда (6,13), применяя описанный в п. 3 § 12 вариационный метод, с той разницей, что теперь допустимые функции удовлетворяют не только условию (8,12), но еще условию (9,13). Использовать этот метод для нахождения остальных собственных функций.

Задача 2. Пусть $K(P, Q) = -K(Q, P)$ и $K(P, Q)$ удовлетворяет условию (3,12). Докажите, что тогда все собственные значения — чисто мнимые, а собственные функции не могут быть вещественными. Любая из собственных функций ортогональна сама себе и всем другим собственным функциям, за исключением, быть может, тех, которые отвечают комплексно сопряженному собственному значению.

§ 14. Теорема Гильберта-Шмидта

Всякая функция $f(P)$, истокообразно представимая при помощи функции $h(P)$ с интегрируемым квадратом, т. е. функция вида

$$f(P) = \int K(P, Q)\, h(Q)\, dQ,$$

может быть разложена в ряд по собственным функциям (6,13) *симметрического ядра $K(P, Q)$, который сходится абсолютно и равномерно.*

Замечание. Конечно, о сходимости этого ряда имеет смысл говорить только в том случае, если интегральное уравнение (7,12) имеет бесконечное множество линейно независимых собственных функций. В противном случае этот ряд обращается в сумму конечного числа слагаемых. Чтобы не удлинять запись, мы здесь, как и в других аналогичных случаях, будем писать всюду бесконечные ряды, помня, что в случае конечного числа собственных функций эти ряды заменятся конечными суммами, сходимость которых не надо доказывать.

Доказательство теоремы будет состоять в том, что мы сначала построим некоторый ряд по собственным функциям (6,13) и докажем, что он сходится равномерно, а потом докажем, что он сходится именно к функции $f(P)$.

Допустим, что функция $f(P)$ разлагается в ряд по собственным функциям (6,13), которые мы считаем ортонормированными. Пусть

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i(P) = f(P), \qquad (1,14)$$