в п. 3 § 12 вариационный метод, с той разницей, что теперь допустимые функции удовлетворяют не только условию (8,12), но еще условию (9,13). Использовать этот метод для нахождения остальных собственных функций.

Задача 2. Пусть $K(P, Q) = -K(Q, P)$ и $K(P, Q)$ удовлетворяет условию (3,12). Докажите, что тогда все собственные значения — чисто мнимые, а собственные функции не могут быть вещественными. Любая из собственных функций ортогональна сама себе и всем другим собственным функциям, за исключением, быть может, тех, которые отвечают комплексно сопряженному собственному значению.

§ 14. Теорема Гильберта-Шмидта

Всякая функция $f(P)$, истокообразно представимая при помощи функции $h(P)$ с интегрируемым квадратом, т. е. функция вида

$$f(P) = \int K(P, Q)\, h(Q)\, dQ,$$

может быть разложена в ряд по собственным функциям (6,13) *симметрического ядра $K(P, Q)$, который сходится абсолютно и равномерно.*

Замечание. Конечно, о сходимости этого ряда имеет смысл говорить только в том случае, если интегральное уравнение (7,12) имеет бесконечное множество линейно независимых собственных функций. В противном случае этот ряд обращается в сумму конечного числа слагаемых. Чтобы не удлинять запись, мы здесь, как и в других аналогичных случаях, будем писать всюду бесконечные ряды, помня, что в случае конечного числа собственных функций эти ряды заменятся конечными суммами, сходимость которых не надо доказывать.

Доказательство теоремы будет состоять в том, что мы сначала построим некоторый ряд по собственным функциям (6,13) и докажем, что он сходится равномерно, а потом докажем, что он сходится именно к функции $f(P)$.

Допустим, что функция $f(P)$ разлагается в ряд по собственным функциям (6,13), которые мы считаем ортонормированными. Пусть

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i(P) = f(P), \qquad (1,14)$$

причем ряд, стоящий в левой части, сходится равномерно. Для определения коэффициента C_m помножим обе части равенства (1,14) на $\varphi_m(P)$ и проинтегрируем почленно по всей области G определения функций $f(P)$ и $\varphi_i(P)$. Получим:

$$C_m = \int f(P)\,\varphi_m(P)\,dP = \int\int K(P,\ Q)\,h(Q)\,\varphi_m(P)\,dP\,dQ =$$
$$= \int h(Q)\left(\int K(Q,\ P)\,\varphi_m(P)\,dP\right)dQ =$$
$$= \int \frac{\varphi_m(Q)\,h(Q)\,dQ}{\lambda_m} = \frac{h_m}{\lambda_m}. \qquad (2,14)$$

Мы здесь положили

$$h_m = \int h(Q)\,\varphi_m(Q)\,dQ.$$

Покажем теперь, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i\varphi_i(P)}{\lambda_i} \qquad (3,14)$$

сходится равномерно и абсолютно. Для этого применим признак Коши. Составим отрезок ряда

$$\sum_{i=m}^{m+p} \frac{h_i\varphi_i(P)}{\lambda_i}.$$

Применяя неравенство Коши, получим:

$$\left[\sum_{i=m}^{m+p} |h_i| \left|\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}\right|\right]^2 \leqslant \sum_{i=m}^{m+p} h_i^2 \sum_{i=m}^{m+p} \left|\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}\right|^2. \qquad (4,14)$$

Коэффициенты h_i суть коэффициенты Фурье функции $h(P)$ по отношению к функциям $\varphi_i(P)$. Поэтому, применяя неравенство Бесселя, мы найдем, что числовой ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2$$

сходится. Следовательно, по признаку Коши величина

$$\sum_{i=m}^{m+p} h_i^2$$

будет меньше любого положительного ε_1, если только m будет достаточно велико.

С другой стороны, величины $\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}$ можно рассматривать как коэффициенты Фурье при разложении ядра $K(P, Q)$, рассматриваемого как функция только от Q, в ряд по функциям $\varphi_i(Q)$. Применяя опять к этим коэффициентам неравенство Бесселя, мы найдем:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}\right)^2 \leqslant \int K^2(P, Q)\,dQ.$$

Последний интеграл существует в силу условия (3,12) и ограничен постоянной, не зависящей от P. Поэтому при любых m и p сумма

$$\sum_{i=m}^{m+p}\left|\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}\right|^2$$

ограничена.

Таким образом, из неравенства (4,14) мы находим, что для любого постоянного $\varepsilon > 0$ можно указать такое m_0, зависящее только от ε, что при любом $m > m_0$ и любом $p > 0$ будет:

$$\sum_{i=m}^{m+p}\left|\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P)\right| < \varepsilon.$$

Отсюда по признаку Коши следует, что ряд (3,14) сходится абсолютно и равномерно.

Перейдем теперь к доказательству того, что ряд (3,14) сходится именно к функции $f(P)$.

Заметим прежде всего, что из теоремы, доказанной в п. 2 § 12, следует, что функция $f(P)$ и все собственные функции $\varphi_i(P)$ равномерно непрерывны. Кроме того, мы только что доказали, что ряд (3,14) сходится равномерно. Поэтому для доказательства сходимости этого ряда к $f(P)$ достаточно доказать, что этот ряд сходится к $f(P)$ в среднем, т. е. что

$$\int\left[f(P) - \sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P)\right]^2 dP \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (5,14)$$

Для доказательства же этого последнего утверждения заметим, что

$$f(P)-\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P)=\int\left[K(P,\ Q)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]h(Q)\,dQ,$$

откуда, полагая для сокращения записи

$$K_m(P,\ Q)=K(P,\ Q)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i},$$

$$g_m(P)=f(P)-\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P),$$

получим:

$$\int\left[f(P)-\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P)\right]^2 dP=\iint\left[K(P,\ Q)-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]h(Q)\left[f(P)-\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P)\right]dP\,dQ=$$
$$=\frac{1}{2}\iint K_m(P,Q)\,[h(Q)+g_m(Q)]\,[h(P)+g_m(P)]\,dP\,dQ-$$
$$-\frac{1}{2}\iint K_m(P,\ Q)\,h(Q)\,h(P)\,dP\,dQ-$$
$$-\frac{1}{2}\iint K_m(P,\ Q)\,g_m(Q)\,g_m(P)\,dP\,dQ. \tag{6,14}$$

Мы здесь воспользовались тем, что в силу симметричности ядра $K(P,\ Q)$

$$\iint K_m(P,\ Q)\,h(P)\,g_m(Q)\,dP\,dQ=$$
$$=\iint K_m(P,\ Q)\,h(Q)\,g_m(P)\,dP\,dQ.$$

Так как

$$\int g_m^2(P)\,dP=\int f^2(P)\,dP-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{h_i}{\lambda_i}\right)^2\leqslant\int f^2(P)\,dP,$$

то существует такое не зависящее от m число M, что при всяком m

$$\int g_m^2(P)\,dP<M,\quad \int h^2(P)\,dP<M,\quad \int[h(P)+g_m(P)]^2dP<M.$$

Согласно замечанию 2 к п. 3 § 12 и п. 5 § 13

$$\left|\int K_m(P, Q)\psi(P)\psi(Q)\,dP\,dQ\right| \leqslant \frac{M}{|\lambda_{m+1}|},$$

если

$$\int \psi^2(P)\,dP \leqslant M.$$

Значит, все три интеграла, стоящие в правой части (6,14), стремятся к 0 при $m \to \infty$, и потому справедливо соотношение (5,14).

Следствие. Формула Шмидта для решения интегральных уравнений с симметрическим ядром.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(P) = \lambda \int K(P, Q)\varphi(Q)\,dQ + f(P), \tag{7,14}$$

где $K(P, Q)$ — симметрическое ядро вида, описанного в начале п. 2 § 12, $f(P)$ — известная равномерно непрерывная функция, $\varphi(P)$ — искомая функция, λ — параметр. По первой теореме Фредгольма (§ 8) интегральное уравнение (7,14) имеет равномерно непрерывное решение $\varphi(P)$, если λ не является собственным значением. Тогда по теореме Гильберта-Шмидта функция $\varphi(P) - f(P)$ разлагается в ряд по собственным функциям ядра $K(P, Q)$, который сходится абсолютно и равномерно. Пусть

$$\varphi(P) - f(P) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i\varphi_i(P).$$

Отсюда

$$\varphi(P) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i\varphi_i(P) + f(P). \tag{8,14}$$

Подставляя вместо $\varphi(P)$ в уравнение (7,14) правую часть равенства (8,14), получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i\varphi_i(P) + f(P) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} C_i \int K(P, Q)\varphi_i(Q)\,dQ +$$

$$+ \lambda \int K(P, Q) f(Q)\,dQ + f(P) =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i\varphi_i(P)}{\lambda_i} + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i\varphi_i(P)}{\lambda_i} + f(P). \tag{9,14}$$

Воспользовавшись опять теоремой Гильберта-Шмидта, мы заменили здесь

$$\int K(P, Q) f(Q)\, dQ$$

абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i}, \quad \text{где} \quad f_i = \int f(P)\, \varphi_i(P)\, dP.$$

Легко видеть, что и первый из рядов, стоящих в правой части (9,14), равномерно сходится. Сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях $\varphi_i(P)$ в правой и левой частях равенства (9,14), получим:

$$C_i = \frac{\lambda C_i}{\lambda_i} + \frac{\lambda f_i}{\lambda_i}.$$

Отсюда

$$C_i = \frac{\lambda f_i}{\lambda_i - \lambda}$$

и, следовательно,

$$\varphi(P) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda} + f(P), \tag{10,14}$$

где ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно. Эта формула называется формулой Е. Шмидта.

В том случае, когда λ совпадает с одним из собственных значений λ_i, можно аналогичным образом получить решение уравнения (7,14). При этом $f_i = 0$ для всех i, которым соответствуют собственные значения, равные λ, в силу третьей теоремы Фредгольма. Решение $\varphi(P)$ будет представляться в виде ряда (8,14), в котором $C_i = \frac{\lambda f_i}{\lambda_i - \lambda}$, если $\lambda_i \neq \lambda$, и $C_i = \alpha_i$, где α_i — произвольная постоянная, если $\lambda_i = \lambda$.

Задача. Доказать теорему Гильберта-Шмидта для вырожденных ядер непосредственно, воспользовавшись формулой (11,13).