§ 15. Теорема о разложении ядер

Теорема. *Ядро $K(P, Q)$ рассматриваемого в настоящей главе вида разлагается в ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}, \tag{1,15}$$

который сходится к $K(P, Q)$ в среднем по P, т. е. при всяком фиксированном Q

$$\int \left[K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]^2 dP \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2,15}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$K_2(P,Q) = \int K(P, S)K(S, Q)\,dS$$

как функцию только P, считая Q фиксированным. Тогда эту функцию можно по теореме Гильберта-Шмидта разложить в ряд по собственным функциям $\varphi_i(P)$, который сходится равномерно и абсолютно по P. Пусть

$$K_2(P, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i(P).$$

Согласно формуле (2,14)

$$c_i = \frac{\int K(P, Q)\varphi_i(P)\,dP}{\lambda_i} = \frac{\varphi_i(Q)}{\lambda_i^2},$$

Следовательно,

$$K_2(P, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i^2}. \tag{3,15}$$

По теореме Гильберта-Шмидта этот ряд сходится абсолютно и равномерно по P при всяком фиксированном Q. Из соображений симметрии отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость этого ряда также и по Q при всяком фиксированном P. Но нет никаких оснований заключить отсюда о равномерной сходимости этого ряда по совокупности P и Q. Такая сходимость будет доказана в § 17.

Из (3,15) следует, что

$$K_2(Q,\ Q)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}, \tag{4,15}$$

причем последний ряд сходится, но мы не можем пока утверждать, что он сходится равномерно по Q.

С другой стороны,

$$\int\left[K(P,\ Q)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]^2 dP=$$

$$=\int K(Q,\ P)\,K(P,\ Q)\,dP-2\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\int K(Q,\ P)\,\varphi_i(P)\,dP+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}=K_2(Q,\ Q)-2\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}=$$

$$=K_2(Q,\ Q)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}. \tag{5,15}$$

Согласно (4,15) эта последняя разность стремится к 0 при $m\to\infty$. Отсюда следует (2,15), что и требовалось доказать.

§ 16. Классификация ядер

Рассмотрим интегральную форму

$$\int\int K(P,\ Q)\,\chi(P)\,\chi(Q)\,dP\,dQ, \tag{1,16}$$

где $\chi(P)$ — какая-нибудь функция с интегрируемым квадратом. Воспользовавшись неравенством Буняковского, легко показать, что интеграл (1,16) существует, так как существует интеграл от квадрата $K(P,\ Q)$ [ср. (3,12)]. По теореме Гильберта-Шмидта функция от P

$$\int K(P,\ Q)\,\chi(Q)\,dQ$$

разлагается в ряд по собственным функциям $\varphi_i(P)$ ядра $K(P,\ Q)$, который равномерно по P сходится. Воспользовавшись при этом формулой (2,14), мы получим, таким