Из (3,15) следует, что

$$K_2(Q, Q)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}, \tag{4,15}$$

причем последний ряд сходится, но мы не можем пока утверждать, что он сходится равномерно по Q.

С другой стороны,

$$\int\left[K(P, Q)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]^2 dP=$$

$$=\int K(Q, P)K(P, Q)\,dP-2\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\int K(Q, P)\varphi_i(P)\,dP+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}=K_2(Q, Q)-2\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}=$$

$$=K_2(Q, Q)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}. \tag{5,15}$$

Согласно (4,15) эта последняя разность стремится к 0 при $m\to\infty$. Отсюда следует (2,15), что и требовалось доказать.

§ 16. Классификация ядер

Рассмотрим интегральную форму

$$\int\int K(P, Q)\chi(P)\chi(Q)\,dP\,dQ, \tag{1,16}$$

где $\chi(P)$ — какая-нибудь функция с интегрируемым квадратом. Воспользовавшись неравенством Буняковского, легко показать, что интеграл (1,16) существует, так как существует интеграл от квадрата $K(P, Q)$ [ср. (3,12)]. По теореме Гильберта-Шмидта функция от P

$$\int K(P, Q)\chi(Q)\,dQ$$

разлагается в ряд по собственным функциям $\varphi_i(P)$ ядра $K(P, Q)$, который равномерно по P сходится. Воспользовавшись при этом формулой (2,14), мы получим, таким образом,

$$\int K(P,\ Q)\,\chi(Q)\,dQ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i}{\lambda_i}\,\varphi(P), \tag{2,16}$$

где

$$\chi_i = \int \chi(P)\,\varphi_i(P)\,dP.$$

Помножив обе части (2,16) на $\chi(P)$ и проинтегрировав по P, получим:

$$\int\int K(P,\ Q)\,\chi(P)\,\chi(Q)\,dP\,dQ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_i^2}{\lambda_i}. \tag{3,16}$$

Интегральная форма и ядро $K(P,\ Q)$ *называются неотрицательно, соответственно неположительно, определенными (или дефинитными), если для всякой функции* $\chi(P)$ *с интегрируемым квадратом интегральная форма* (1,16) *неотрицательна, соответственно неположительна* (ср. § 12, п. 1).

Из формулы (3,16) видно, что *необходимым и достаточным условием неотрицательной, соответственно неположительной, определенности формы* (1,16) *является условие, чтобы все* λ_i *были положительными, соответственно отрицательными.*

Будем форму (1,16) и ядро $K(P,\ Q)$ называть *квазиопределенными неотрицательно,* соответственно *неположительно,* если все соответствующие λ_i, кроме, быть может, конечного их числа, положительны, соответственно отрицательны.

§ 17. Теорема Дини и ее приложения

Теорема Дини. *Если монотонная последовательность непрерывных функций*

$$f_1(P),\ f_2(P), \ldots,\ f_k(P), \ldots \tag{1,17}$$

всюду на замкнутом ограниченном множестве F *сходится к непрерывной функции* $f(P)$, *то эта последовательность сходится равномерно.*

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать, что $f(P) \equiv 0$; общий случай сводится