образом,

$$\int K(P,\ Q)\,\chi(Q)\,dQ=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\chi_i}{\lambda_i}\varphi(P), \tag{2,16}$$

где

$$\chi_i=\int \chi(P)\,\varphi_i(P)\,dP.$$

Помножив обе части (2,16) на $\chi(P)$ и проинтегрировав по P, получим:

$$\int\int K(P,\ Q)\,\chi(P)\,\chi(Q)\,dP\,dQ=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\chi_i^2}{\lambda_i}. \tag{3,16}$$

Интегральная форма и ядро $K(P,\ Q)$ *называются неотрицательно, соответственно неположительно, определенными (или дефинитными), если для всякой функции* $\chi(P)$ *с интегрируемым квадратом интегральная форма* (1,16) *неотрицательна, соответственно неположительна* (ср. § 12, п. 1).

Из формулы (3,16) видно, что *необходимым и достаточным условием неотрицательной, соответственно неположительной, определенности формы* (1,16) *является условие, чтобы все* λ_i *были положительными, соответственно отрицательными.*

Будем форму (1,16) и ядро $K(P,\ Q)$ называть *квазиопределенными неотрицательно,* соответственно *неположительно,* если все соответствующие λ_i, кроме, быть может, конечного их числа, положительны, соответственно отрицательны.

§ 17. Теорема Дини и ее приложения

Теорема Дини. *Если монотонная последовательность непрерывных функций*

$$f_1(P),\ f_2(P),\ldots,\ f_k(P),\ldots \tag{1,17}$$

всюду на замкнутом ограниченном множестве F *сходится к непрерывной функции* $f(P)$, *то эта последовательность сходится равномерно.*

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать, что $f(P)\equiv 0$; общий случай сводится к этому вычитанием $f(P)$ из каждой функции $f_k(P)$. Мы можем далее считать, что последовательность (1,17) монотонно убывает в каждой точке P*), так как противоположный случай сводится к этому переменой знака у всех $f_k(P)$.

Итак, пусть имеется монотонно убывающая в каждой точке последовательность непрерывных функций $f_k(P)$, сходящаяся к 0 в каждой точке ограниченного замкнутого множества F. Докажем, что эта сходимость равномерная. Для этого заметим следующее. Для каждого $\varepsilon > 0$ и каждой точки P множества F можно указать такое m, что

$$0 \leqslant f_m(P) < \varepsilon.$$

В силу непрерывности $f_m(P)$ то же неравенство будет иметь место и в некоторой окрестности O_P точки P. В силу монотонного убывания рассматриваемой последовательности функций в окрестности O_P будет

$$0 \leqslant f_k(P) < \varepsilon \quad \text{при всех } k \geqslant m. \tag{2,17}$$

Таким образом, при выбранном ε для каждой точки P множества F можно указать такую ее окрестность O_P, что, начиная с некоторого k, в ней будет справедливо неравенство (2,17). По лемме Гейне-Бореля из всей совокупности окрестностей O_P можно выбрать такое их конечное множество, которое покрывает все множество F. Пусть M будет максимальным из всех чисел m, соответствующих этим окрестностям. Тогда очевидно, что при всех $k \geqslant M$ на всем множестве F будет

$$f_k(P) < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Приложения теоремы Дини.

1. В § 15 мы доказали, что

$$K_2(Q, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}. \tag{4,15}$$

Оставался нерешенным вопрос о том, равномерно ли по Q сходится ряд в правой части. Теперь, после доказательства

---

*) То есть

$$f_k(P) \geqslant f_{k+1}(P), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

теоремы Дини, мы легко сможем решить этот вопрос. Действительно, согласно лемме, доказанной в § 8, функция $K_2(Q, Q)$ равномерно непрерывна по Q. Следовательно, ее можно считать непрерывной на $\overline{G}$ (ср. примечание на стр. 31). Значит, последовательность

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}$$

есть монотонная в каждой точке Q последовательность непрерывных функций, которая сходится при $m \longrightarrow \infty$ к непрерывной же функции. Следовательно, по теореме Дини эта сходимость *равномерна* на $\overline{G}$.

2. Из того, что ряд, стоящий в правой части (4,15), сходится равномерно по Q, следует, что последовательность (2,15) сходится к 0 равномерно по Q [см. (5,15)]. *Поэтому*

$$\iint \left[K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]^2 dP\,dQ \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Из равномерной по Q сходимости ряда (4,15) следует *равномерная по* (P, Q) *и абсолютная сходимость ряда* (3,15), так как

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i^2} \right| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}.$$

4. Интегрируя по Q обе части (4,15), найдем:

$$\int K_2(Q, Q)\,dQ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2},$$

так как функции $\varphi_i(Q)$ нормированы. Значит, *ряд, составленный из квадратов обратных величин* λ_i, *сходится.*

5. Теорема Мерсера. *Если ядро* $K(P, Q)$ *квазиопределенно и равномерно непрерывно по* (P, Q), *то ряд* (1,15) *сходится к нему не только в среднем, но абсолютно и равномерно по* (P, Q).

Доказательство. Для определенности будем предполагать, что ядро $K(P, Q)$ квазиопределенно неотрицательно.

Заметим далее, что если ядро $K_m(P, Q)$ неотрицательно определенно и непрерывно, то всегда $K_m(P, P) \geqslant 0$. Действительно, если бы в некоторой точке P_0 было $K_m(P_0, P_0) < 0$, то в силу непрерывности оно было бы отрицательным и в некоторой окрестности точки (P_0, P_0) в пространстве (P, Q). Построим тогда непрерывную функцию $\varphi_{P_0}(P)$, которая равняется 0 всюду на области G, кроме некоторой малой окрестности G_0 точки P_0, где эта функция положительна. Тогда, если область G_0 достаточно мала, будет

$$\iint K_m(P, Q) \, \varphi_{P_0}(P) \varphi_{P_0}(Q) \, dP dQ < 0,$$

что противоречит предположению о неотрицательной определенности ядра $K_m(P, Q)$.

В силу предполагаемой неотрицательной квазиопределенности ядра $K(P, Q)$ при достаточно большом m ядро

$$K_m(P, Q) = K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P) \varphi_i(Q)}{\lambda_i}$$

будет неотрицательно определенным (ср. § 16). Поэтому согласно только что доказанному утверждению о неотрицательно определенных непрерывных ядрах должно быть при всех достаточно больших m

$$K(P, P) \geqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i}.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i} \tag{3,17}$$

при всех P сходится. Поэтому ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i} \tag{4,17}$$

также сходится при всех Q. Так как $K(P, P)$ ограничено, то все частичные суммы рядов (3,17) и (4,17) при всех P и Q по абсолютной величине ограничены некоторой постоянной

$$M_0 > 0.$$

Применяя неравенство Коши и считая m настолько большим, что все $\lambda_i > 0$ при $i > m$, получим:

$$\left[\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \right| \right]^2 \leqslant \sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i} \cdot \sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i}. \tag{5,17}$$

Применяя необходимый признак сходимости Коши к ряду (4,17), мы найдем, что для каждого постоянного $\varepsilon > 0$ при любом фиксированном Q можно указать такое большое m_0, зависящее только от ε и Q, что будет:

$$\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(Q)}{|\lambda_i|} = \sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i} < \frac{\varepsilon^2}{2M_0}, \text{ если } m > m_0(\varepsilon, Q).$$

Поэтому из неравенства (5,17) получим, что при любом $p > 0$ и при $m > m_0(\varepsilon, Q)$ будет:

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \right| < \varepsilon.$$

Отсюда, применяя достаточный признак сходимости Коши, мы найдем, что ряд (1,15) сходится абсолютно и равномерно по P при каждом фиксированном Q.

В силу доказанного прежде соотношения (2,15) мы получим отсюда, что ряд (1,15) сходится именно к $K(P, Q)$. В частности,

$$K(P, P) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i}. \tag{6,17}$$

Так как $K(P, P)$, по предположению, непрерывно на замкнутой области $\overline{G}$ и так как все функции $\varphi_i(P)$ также непрерывны на этой области (см. лемму п. 2 § 12), а все λ_i, начиная с некоторого, положительны, то по теореме Дини ряд в правой части (6,17) сходится равномерно по P. Поэтому для каждого постоянного $\varepsilon > 0$ можно указать такое m_0, зависящее только от ε, что будет при любом $p > 0$

$$\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i} < \varepsilon, \text{ если } m > m_0(\varepsilon).$$

Из неравенства (5,17) следует, что при любых P и Q, $p > 0$ и тех же m и ε будет

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \right| < \varepsilon,$$

и потому ряд (1,15) сходится абсолютно и равномерно по (P, Q), что и требовалось доказать.

§ 18. Пример

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^l G(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1,18}$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина, построенная в § 2. Как там было указано, эта функция симметрична относительно обоих своих аргументов. Поэтому к интегральному уравнению (1,18) применима вся теория, развитая в настоящей главе. Это уравнение имеет, как мы видели в § 2, бесконечное множество собственных функций и собственных значений, которые все были найдены в § 2. Нормируя их и выписывая собственные значения λ под соответствующими собственными функциями, получим ряды

$$\left.\begin{array}{llll} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x, & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x, \ \ldots, & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx, & \ldots \\ 1, & 4 \qquad\quad , \ \ldots, & k^2 & , \ \ldots \end{array}\right\} \tag{2,18}$$

Для упрощения записи мы положили в уравнениях (1, 2) $l = \pi$, $c = \frac{\varrho}{T_0} = 1$. Здесь каждому собственному значению λ соответствует только одна собственная функция. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, как легко проверить, ортогональны между собой, в соответствии с общей теорией (ср. п. 1 § 13).

Применяя теорему Гильберта-Шмидта, мы найдем, что всякая функция $f(x)$ вида

$$f(x) = \int_0^\pi G(x, \xi)\,h(\xi)\,d\xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3,18}$$