Из неравенства (5,17) следует, что при любых P и Q, $p>0$ и тех же m и ε будет

$$\sum_{i=m}^{m+p}\left|\frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right|<\varepsilon,$$

и потому ряд (1,15) сходится абсолютно и равномерно по $(P,\ Q)$, что и требовалось доказать.

§ 18. Пример

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^l G(x,\ \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{1,18}$$

где $G(x,\ \xi)$ — функция Грина, построенная в § 2. Как там было указано, эта функция симметрична относительно обоих своих аргументов. Поэтому к интегральному уравнению (1,18) применима вся теория, развитая в настоящей главе. Это уравнение имеет, как мы видели в § 2, бесконечное множество собственных функций и собственных значений, которые все были найдены в § 2. Нормируя их и выписывая собственные значения λ под соответствующими собственными функциями, получим ряды

$$\left.\begin{array}{llll}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x, & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x,\ \ldots, & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx,\ \ldots \\ 1, & 4\qquad ,\ \ldots, & k^2\qquad ,\ \ldots\end{array}\right\} \tag{2,18}$$

Для упрощения записи мы положили в уравнениях (1, 2) $l=\pi$, $c=\frac{\varrho}{T_0}=1$. Здесь каждому собственному значению λ соответствует только одна собственная функция. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, как легко проверить, ортогональны между собой, в соответствии с общей теорией (ср. п. 1 § 13).

Применяя теорему Гильберта-Шмидта, мы найдем, что всякая функция $f(x)$ вида

$$f(x)=\int_0^\pi G(x,\ \xi)\,h(\xi)\,d\xi,\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{3,18}$$

где $h(\xi)$ — функция с интегрируемым квадратом, разложима в ряд по собственным функциям (2,18) ядра $G(x, \xi)$. Будем считать, как это мы делали всюду в предыдущем (ср. замечание к § 1), что функция $h(\xi)$ имеет только конечное число точек разрыва. Продифференцируем два раза по x обе части равенства (3,18) так же, как это мы делали в § 2, воспользовавшись при этом формулами (1,2). Получим, что всюду, кроме, быть может, конечного числа точек,

$$f''(x) = -\frac{h(x)}{T_0}.$$

Обратно, пользуясь формулами (1,2), легко проверить, что всякая непрерывная вместе с ее первой производной на замкнутом интервале $[0, \pi]$ функция $f(x)$, обращающаяся в 0 на концах этого интервала и имеющая непрерывную, за исключением конечного числа точек, вторую производную с интегрируемым квадратом, представима в виде (3,18), где $h(x)$ — функция с интегрируемым квадратом; за $h(x)$ надо принять именно $\frac{-f''(x)}{T_0}$. Таким образом, по теореме Гильберта-Шмидта получается, что может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по $\sin kx$ всякая непрерывная вместе с ее первой производной на замкнутом интервале $[0, \pi]$ функция $f(x)$, у которой имеется всюду, за исключением конечного числа точек, непрерывная вторая производная с интегрируемым квадратом и у которой $f(0) = f(\pi) = 0$. Из теории тригонометрических рядов известна возможность такого разложения и при более слабых предположениях относительно $f(x)$. Для этого достаточно, например, чтобы $f(x)$ была непрерывной на замкнутом интервале $[0, \pi]$ вместе с ее первой производной и чтобы было $f(0) = f(\pi) = 0$ *). Из этого последнего класса функций легко выбрать функцию, которая не удовлетворяет условиям теоремы Гильберта-Шмидта; достаточно, например, взять функцию, нигде не имеющую второй производной. Это показывает, что условия теоремы Гильберта-Шмидта, вообще говоря, не являются необходимыми для

*) Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, М.—Л., 1960, гл. XIX, § 2, стр. 435.

возможности разложения функции $f(x)$ в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям.

Покажем, что система (2,18) полна, т. е. что для каждой непрерывной на замкнутом интервале $[0, \pi]$ функции $f(x)$ можно найти такую линейную комбинацию $\sin kx$, что средняя квадратичная ошибка при замене $f(x)$ этой линейной комбинацией будет как угодно мала. Для этого заметим, что для каждой непрерывной на замкнутом интервале $[0, \pi]$ функции $f(x)$ можно найти на этом интервале такую функцию $f_1(x)$, непрерывную вместе с ее первыми двумя производными и обращающуюся в 0 на концах этого интервала, что норма разности $f(x)-f_1(x)$ будет как угодно мала. Функцию же $f_1(x)$ можно разложить в равномерно сходящийся ряд по $\sin kx$, как мы только что видели. Поэтому функцию $f_1(x)$ можно аппроксимировать такой линейной комбинацией $\sin kx$ (именно, частичной суммой равномерно сходящегося к этой функции ряда по $\sin kx$), что средняя квадратичная ошибка будет как угодно мала. Отсюда, применяя неравенство треугольника (ср. п. 5 § 11), легко показать, что система (2,18) полна.

Из полноты системы (2,18) следует ее замкнутость по доказанному в п. 10 § 11.

Все собственные значения ядра $G(x, \xi)$ положительны. Поэтому к нему применима теорема Мерсера. Получим:

$$\frac{\pi}{2} G(x, \xi) = \frac{\sin x \sin \xi}{1} + \frac{\sin 2x \sin 2\xi}{4} + \ldots,$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно по (x, ξ).