ДОПОЛНЕНИЕ

§ 19. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием

Мы дадим здесь доказательство возможности такого приведения, соответствующее изложенной в §§ 12 и 13 теории интегральных форм $I(\varphi)$.

1. Отметим предварительно некоторые свойства взаимно ортогональных единичных векторов. Пусть

$$\varphi_k = (\varphi_k^{(1)},\ \varphi_k^{(2)},\ \ldots,\ \varphi_k^{(n)}), \quad k = 1,\ \ldots,\ n,$$

— n взаимно ортогональных единичных векторов, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi_p^{(i)} = \delta_{kp}; \quad k,\ p = 1,\ \ldots,\ n,$$

где $\delta_{kp} = 0$, если $k \neq p$, и $\delta_{pp} = 1$.

а) $D = |\varphi_p^{(i)}| = \pm 1$. Действительно, вычисляя по известным правилам D^2 как произведение двух одинаковых определителей, мы получим определитель, у которого на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны 0.

б) Обозначим через $\Phi_k^{(i)}$ алгебраическое дополнение элемента $\varphi_k^{(i)}$ в детерминанте D. Тогда

$$\Phi_k^{(i)} = D\varphi_k^{(i)}. \tag{1,19}$$

Действительно, при любом k имеют место следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} (\Phi_k^{(i)} - D\varphi_k^{(i)})\, \varphi_p^{(i)} = 0, \quad p = 1,\ \ldots,\ n.$$

Рассматривая их как n линейных однородных уравнений с коэффициентами $\varphi_p^{(i)}$, мы найдем соотношения (1,19), так как $D \neq 0$.

в)
$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi_k^{(j)} = \delta_{ij}. \tag{2,19}$$

В этом можно убедиться, умножая равенство (1,19) на $\varphi_k^{(j)}$ и суммируя по k.

2. Рассмотрим значения квадратичной формы

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} K_{ij} \varphi^{(i)} \varphi^{(j)}, \quad K_{ij} = K_{ji}, \tag{3,19}$$

где все K_{ij} и $\varphi^{(i)}$ действительны, на сфере

$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi^{(i)}]^2 = 1. \tag{4,19}$$

По теореме Вейерштрасса на замкнутом ограниченном множестве точек сферы (4,19) имеется по крайней мере одна точка, где непрерывная функция (3,19) принимает наибольшее значение. Пусть это наибольшее значение равно μ_1 и пусть оно достигается в точке A_1 $(\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(n)})$ *).

Рассмотрим значения формы (3,19) в точках пересечения S_{n-2} сферы (4,19) и гиперплоскости, перпендикулярной к вектору $(\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(n)})$ и проходящей через центр сферы. По той же теореме Вейерштрасса среди точек множества S_{n-2} должна найтись по крайней мере одна такая точка, где форма (3,19) принимает наибольшее значение по сравнению с другими точками S_{n-2}. Пусть это наибольшее значение равно μ_2 и пусть оно достигается в точке A_2 $(\varphi_2^{(1)}, \ldots, \varphi_2^{(n)})$.

---

*) Ср. замечание 2 к п. 3 § 12, где было доказано существование такой функции $\varphi(P)$ на «сфере»

$$\int \varphi^2(P)\, dP = 1,$$

которая дает наибольшее значение интегральной форме

$$\int \int K(P, Q)\, \varphi(P)\, \varphi(Q)\, dP\, dQ,$$

если только это значение отлично от 0.

Рассмотрим далее значения формы (3,19) в точках множества S_{n-3}, являющегося пересечением S_{n-2} и проходящей через начало координат гиперплоскости, перпендикулярной к вектору $(\varphi_2^{(1)}, \ldots, \varphi_2^{(n)})$. Пусть μ_3 есть верхняя грань значений формы (3,19) на S_{n-3}; по теореме Вейерштрасса она достигается по крайней мере в одной точке S_{n-3}; пусть такой точкой будет точка $A_3(\varphi_3^{(1)}, \ldots, \varphi_3^{(n)})$.

Продолжая эти рассуждения, мы найдем n взаимно перпендикулярных единичных векторов $\varphi_k = (\varphi_k^{(1)}, \ldots, \varphi_k^{(n)})$, $k = 1, \ldots, n$. Примем их за направления новых координатных осей $O\psi_1, \ldots, O\psi_n$. Тогда

$$\psi^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi^{(i)}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Каждое из множеств S_{n-k} будет пересечением $(n-k+1)$-мерной плоскости

$$\psi^{(1)} = \psi^{(2)} = \ldots = \psi^{(k-1)} = 0$$

и сферы

$$\sum_{i=1}^{n} [\psi^{(i)}]^2 = 1. \qquad (5,19)$$

Что сфера (4,19) перейдет в сферу (5,19) и потому для всех точек множества S_{n-k} будет удовлетворяться равенство (5,19), следует из того, что

$$\sum_{k=1}^{n} [\psi^{(k)}]^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,\, j=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi^{(i)} \varphi_k^{(j)} \varphi^{(j)} = \sum_{i,\, j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi_k^{(j)} \right) \varphi^{(i)} \varphi^{(j)},$$

а согласно (2,19)

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi_k^{(j)} = \delta_{ij}.$$

Мы утверждаем, что в новых координатах $\psi^{(i)}$ форма (3,19) примет вид

$$F \equiv \sum_{i,\, j=1}^{n} K_{ij} \varphi^{(i)} \varphi^{(j)} \equiv \sum_{i,\, j=1}^{n} K_{ij}^{*} \psi^{(i)} \psi^{(j)} \equiv \sum_{i=1}^{n} \mu_i [\psi^{(i)}]^2. \quad (6,19)$$

Что

$$K_{ii}^{*} = \mu_i,$$

следует из того, что наша форма принимает значение μ_i в точке A_i, у которой все координаты ψ равны 0, кроме $\psi^{(i)}$, которое равно 1. Что $K^*_{1j} = K^*_{j1} = 0$ при $j > 1$, можно доказать так.

Допустим, что $K^*_{1j} \neq 0$ при некотором $j > 1$. Положим все $\psi^{(i)}$, кроме $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(j)}$, равными 0. Тогда

$$F = \mu_1 [\psi^{(1)}]^2 + 2K^*_{1j}\psi^{(1)}\psi^{(j)} + \mu_j [\psi^{(j)}]^2.$$

Пусть $|\psi^{(j)}|$ очень мало по сравнению с $|\psi^{(1)}|$ и

$$[\psi^{(1)}]^2 + [\psi^{(j)}]^2 = 1.$$

Тогда, пренебрегая величинами порядка $[\psi^{(j)}]^2$, получим:

$$F \approx \mu_1 + 2K^*_{1j}\psi^{(j)}. \tag{7,19}$$

Выберем знак $\psi^{(j)}$ так, чтобы было $2K^*_{1j}\psi^{(j)} > 0$. Тогда из соотношения (7,19) будет следовать, что на сфере (5,19) или, что все равно, на сфере (4,19) имеются точки, где $F > \mu_1$, что противоречит определению μ_1. Этим заканчивается доказательство того, что все $K^*_{1j} = 0$ при $j > 1$. Совершенно так же доказывается, что равны 0 и все другие K^*_{ij}, если $i \neq j$.

Из самого нашего построения следует, что

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n.$$

Может быть, что некоторые из чисел μ_i равны 0, а некоторые отрицательны. Перенумеруем все μ_i и соответствующие ψ_i так, чтобы стало

$$\mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_i \geqslant \ldots \geqslant \mu_m;\ \mu_{m+1} = \ldots = \mu_n = 0 \ (\mu_i \neq 0 \text{ при } i \leqslant m).$$

Положим

$$\lambda_i = \frac{1}{\mu_i}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Тогда равенство (6,19) примет вид

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i}.$$

Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ положительны, а $\lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_m$ отрицательны, то $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_\nu}$ называются *действительными* полуосями поверхности

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i} = 1. \qquad (8,19)$$

Легко видеть, что эта поверхность отсекает отрезки $\pm\sqrt{\lambda_i}$ на осях $O\psi^{(i)}$ при $i = 1, 2, \ldots, \nu$; $\sqrt{\lambda_1}$ будет наименьшей из действительных полуосей. Величины $\sqrt{-\lambda_{\nu+1}}, \ldots, \sqrt{-\lambda_m}$ называются *мнимыми* полуосями поверхности (8,19). Эта поверхность не пересекает действительных осей $O\psi^{(\nu+1)}, \ldots, O\psi^{(m)}$.

Если $m < n$, то в пространстве $(\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})$ и в пространстве $(\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(n)})$ уравнение (8,19) представляет цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны плоскости

$$\psi^{(1)} = \ldots = \psi^{(m)} = 0.$$

В этом случае естественно говорить, что полуоси, соответствующие осям $O\psi^{(m+1)}, \ldots, O\psi^{(n)}$, бесконечны.

В следующих пунктах мы возвращаемся к прежней нумерации осей.

3. Покажем, что

$$\mu_1\varphi_1^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\varphi_1^{(j)}, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (9,19)$$

Действительно, по нашему построению при всех действительных $\varphi^{(j)}$ должно быть

$$F \equiv \mu_1 \sum_{i=1}^{n} [\varphi^{(i)}]^2 - \sum_{i,\,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \geqslant 0.$$

Если $\varphi^{(i)} = \varphi_1^{(i)}$ при всех i, то $F = 0$, т. е. принимает минимальное значение. Поэтому частные производные по всем переменным, взятые при этих значениях $\varphi^{(i)}$, обращаются в нуль, что и дает нам равенства (9,19).

4. Вместо того чтобы при нахождении оси $O\psi^{(2)}$ рассматривать значение формы (3,19) на множестве S_{n-2}, являющемся пересечением сферы (4,19) и гиперплоскости $\psi^{(1)} = 0$, можно, если $\mu_2 > 0$, рассматривать значения формы

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} [K_{ij} - \mu_1\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}]\,\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \qquad (10,19)$$

на всей сфере (4,19). Нетрудно показать, что форма (10,19) принимает наибольшее значение μ^* в некоторой точке $A^*(\varphi^{(1)*}, \ldots, \varphi^{(n)*})$, принадлежащей S_{n-2}, и $\mu^* = \mu_2$. Действительно,

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} [K_{ij} - \mu_1\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}]\,\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} =$$

$$= \sum_{i,\ j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} - \mu_1\,[\psi^{(1)}]^2 = \sum_{i=2}^{n} \mu_i\,[\psi^{(i)}]^2. \qquad (11,19)$$

Поэтому чтобы форма (10,19) приняла наибольшее значение в точке A^* на сфере (4,19) или, что все равно, на сфере (5,19), необходимо, если $\mu_2 > 0$, чтобы у этой точки равнялись 0 все ψ_i, кроме тех, которым соответствуют μ_i, равные μ_2; сумма же квадратов этих последних должна равняться 1. При этом мы сохраняем первоначальную нумерацию μ_i, при которой

$$\mu_2 \geqslant \mu_3 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n.$$

Следовательно, μ^* должно быть равным μ_2, точка A^* лежит на S_{n-2} и ее можно принять за A_2. Этот способ нахождения второй полуоси был бы неприменим, если бы было $\mu_2 \leqslant 0$, так как тогда форма (11,19) принимала бы наибольшее значение 0, например при

$$\psi_1 \equiv 1, \quad \psi_2 \equiv \psi_3 \equiv \ldots \equiv \psi_n \equiv 0.$$

Совершенно так же, если $\mu_3 > 0$, можно свести нахождение оси $O\psi_3$ к нахождению максимума формы

$$\sum_{i\ j=1}^{n} \left[K_{ij} - \mu_1\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)} - \mu_2\varphi_2^{(i)}\varphi_2^{(j)}\right]\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \qquad (12,19)$$

на сфере (4,19) и т. д.

Применяя к форме (10,19) такие же рассуждения, как в п. 3, можно показать, если $\mu_2 > 0$, что $\varphi_2^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, должны удовлетворять уравнениям

$$\mu_2\varphi_2^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \left[K_{ij} - \mu_1\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}\right]\varphi_2^{(j)}$$

или

$$\mu_2\varphi_2^{(i)}=\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\varphi_2^{(j)},\quad i=1,\ \ldots,\ n,\qquad (13,19)$$

так как

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_1^{(j)}\varphi_2^{(j)}=0.$$

Пользуясь формой (12,19) и другими аналогично составленными формами, можно доказать, что $\varphi_3^{(i)}, \varphi_4^{(i)}, \ldots$, соответствующие $\mu_3>0$, $\mu_4>0$, ..., также удовлетворяют уравнениям вида (9,19).

Если же $\mu_2=0$, то это значит, что квадратичная форма

$$\sum_{i=1,\ j=1}^{n}\left[K_{ij}-\mu_1\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}\right]\varphi^{(i)}\varphi^{(j)}\leqslant 0$$

при любых $\varphi^{(i)}$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и обращается в нуль, если $\varphi^{(i)}=\varphi_2^{(i)}$ при всех i. Приравняв нулю частные производные этой формы по всем переменным, взятые при значениях $\varphi^{(i)}=\varphi_2^{(i)}$, получим, что $\varphi_2^{(i)}$ удовлетворяют системе уравнений вида (9,19). Эти же рассуждения применимы к другим векторам $\varphi_k^{(i)}$, которым соответствуют $\mu_k=0$.

Если $\mu_2<0$, то числа μ_2, μ_3, ..., μ_n, которые все в этом случае отрицательны, и соответствующие векторы $(\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \ldots, \varphi_n^{(i)})$, $i=2,\ 3,\ \ldots,\ n$, можно найти посредством рассмотрения минимума формы (11,19) (вместо ее максимума). При этом числа μ_2, μ_3, ..., μ_n и соответствующие векторы будут получаться в обратном порядке. Аналогично можно поступать, если $\mu_3<0$ и т. д. Во всех этих случаях сохраняются уравнение (13,19) и аналогичные ему уравнения для других векторов $(\varphi_1^{(i)},\ \varphi_2^{(i)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(i)})$.

Задача. Опираясь на уравнения (9,19), (13,19), ..., разработать невариационный метод приведения квадратичных форм к каноническому виду, использующий решение характеристического уравнения

$$|K_{ij}-\mu\delta_{ij}|=0.$$