§ 20. Теория интегральных уравнений с симметрическими ядрами в классе функций, интегрируемых вместе с их квадратами по Лебегу

Построенная прежде теория интегральных уравнений с симметрическим ядром легко переносится на интегральные уравнения, у которых ядра симметричны и интегрируемы по Лебегу вместе с их квадратами; при этом она становится более стройной.

Построение новой теории во многом сходно с построениями §§ 11—16 и проводится в точности по тому же плану. Поэтому мы ограничимся изложением только тех мест этой теории, которые существенно отличаются от соответствующих мест прежде изложенной теории.

1. Мы будем предполагать известной теорию интеграла Лебега *). Отметим только некоторые свойства функций, интегрируемых по Лебегу (суммируемых).

а) Теорема Фубини. Допустим, что функция $f(P, Q)$ интегрируема по топологическому произведению измеримых множеств G_1 и G_2, причем $P \in G_1$, а $Q \in G_2$. Запишем этот интеграл в виде

$$I = \int_{G_1} \int_{G_2} f(P, Q)\, dP\, dQ.$$

Тогда почти для всех точек Q, принадлежащих G_2, существует интеграл

$$I(Q) = \int_{G_1} f(P, Q)\, dP,$$

функция $I(Q)$ суммируема и

$$I = \int_{G_2} I(Q)\, dQ. \tag{1,20}$$

---

*) См., например, И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, изд. 2-е, Физматгиз, М., 1957. См. также Г. Е. Шилов, Математический анализ (специальный курс), изд. 2-е, Физматгиз, 1961.

Обратно, если почти для всех точек $Q \in G_2$ существует интеграл

$$I^*(Q) = \int_{G_1} |f(P, Q)|\, dP,$$

причем функция $I^*(Q)$ суммируема на G_2, и если $f(P, Q)$ измерима на G_1G_2, то существует также интеграл I и справедливо равенство (1,20).

Напомним, что топологическим произведением G_1G_2 множеств G_1 и G_2 называется совокупность таких «точек» (P, Q), что $P \in G_1$, $Q \in G_2$. Мы считаем, что множества G_1, G_2, G_1G_2 находятся, соответственно, в евклидовых пространствах $(x_1, \ldots, x_{d_1})$, $(y_1, \ldots, y_{d_2})$, $(x_1, \ldots, x_{d_1}, y_1, \ldots, y_{d_2})$. Если точки P, Q определялись, соответственно, координатами $(x_1, \ldots, x_{d_1})$, $(y_1, \ldots, y_{d_2})$, то точка (P, Q) определяется координатами $(x_1, \ldots, x_{d_1}, y_1, \ldots, y_{d_2})$. Меры множеств G_1, G_2, G_1G_2 определяются как меры Лебега в евклидовых пространствах, соответственно, d_1, d_2, $d_1 + d_2$ измерений.

б) Пусть функция $f(S)$ определена на d-мерной области G. Пусть интеграл от $f(S)$ по всякому d-мерному кубу, лежащему внутри G, с ребрами, параллельными координатным осям, равен 0. Тогда $f(S) = 0$ почти всюду на G.

в) Теорема Фишера-Рисса. Пусть дана бесконечная последовательность функций с суммируемыми квадратами на некотором измеримом множестве G:

$$f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P), \ldots$$

Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число N, что

$$\int_G (f_n - f_m)^2\, dP < \varepsilon, \tag{2,20}$$

если только $n > N$ и $m > N$. Тогда на области G существует такая функция $f(P)$ с суммируемым квадратом, что

$$\int_G (f_n - f)^2\, dP \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3,20}$$

Обратное утверждение, что из (3,20) следует (2,20), очевидно.

Во всем дальнейшем сходимость последовательности функций понимается только в среднем. Теорема Фишера-Рисса является аналогом хорошо известного, необходимого и достаточного признака сходимости Коши. Пространство функций, в котором выполнение критерия Коши обеспечивает сходимость последовательности функций, называется *полным*. Значит, *пространство функций с суммируемыми квадратами, где сходимость понимается в среднем, полно.*

г) В классе функций с суммируемыми квадратами можно провести все те построения и доказать все те утверждения, какие были проведены в пп. 1—10 § 11 для функций, имеющих только конечное число точек, линий, k-мерных поверхностей разрыва ($k=2, 3, \ldots, d-1$), когда интегрирование понималось по Коши. Кроме того, можно показать, что в этом классе понятия полноты и замкнутости системы ортогональных нормированных функций полностью совпадают. Приведенное в п. 10 § 11 доказательство того, что из полноты системы следует ее замкнутость, полностью переносится и на рассматриваемый нами класс функций с суммируемыми квадратами. Что *в этом классе из замкнутости системы ортогональных нормированных функций следует ее полнота,* доказывается следующим образом.

Допустим, что система ортогональных нормированных функций

$$\varphi_1(P),\ \varphi_2(P),\ \ldots,\ \varphi_k(P),\ \ldots \tag{4,20}$$

не полна. Тогда существует такая функция $f(P)$ с суммируемым квадратом, что

$$\int f^2(P)\,dP-\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2>0, \tag{5,20}$$

где

$$a_k=\int f(P)\,\varphi_k(P)\,dP.$$

Рассмотрим последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_k a_k\varphi_k(P). \tag{6,20}$$

Для нее выполняется критерий сходимости Коши, так как

$$\int\left[\sum_{k=m+1}^{m+n} a_k\varphi_k(P)\right]^2 dP=\sum_{k=m+1}^{m+n} a_k^2,$$

а бесконечный числовой ряд $\sum a_k^2$ сходится, и потому для него выполняется признак Коши. Поэтому по теореме Фишера-Рисса существует такая функция $\varphi(P)$ с суммируемым квадратом, к которой ряд (6,20) сходится в среднем. Тогда функция

$$f(P)-\varphi(P)$$

ортогональна ко всем функциям $\varphi_k(P)$, а интеграл от ее квадрата, равный левой части (5,20), положителен. Следовательно, система (4,20) не замкнута.

д) Отметим еще одно важное свойство функций, суммируемых с квадратом, которое мы используем в дальнейшем.

Для всякой функции $F(P)$, суммируемой с квадратом на некотором измеримом множестве G, и любого $\varepsilon>0$ существует такая непрерывная функция $f(P)$, что

$$\int[F(P)-f(P)]^2\,dP<\varepsilon\,^{*)}.$$

2. При интегрировании функций по Лебегу на величину этого интеграла совершенно не влияют значения подинтегральной функции на множестве меры 0. Можно считать эту функцию даже неопределенной на некотором множестве меры 0. Поэтому все функции, совпадающие на множестве полной меры, т. е. отличающиеся только на множестве меры 0, где некоторые из этих функций могут быть даже неопределенными, естественно считать эквивалентными и не различать друг от друга. Поэтому мы будем называть решением интегрального уравнения

$$\varphi(P)=\lambda\int_G K(P,\ Q)\,\varphi(Q)\,dQ \tag{7,20}$$

всякую функцию с суммируемым квадратом, которая удовлетворяет этому уравнению почти при всех P.

---

*) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, том V, Физматгиз, М., 1959, гл. II, § 3, п. 60; И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, изд. 2-е, Физматгиз, М., 1957, гл. VII, XII.

Доказательство того, что при некотором действительном λ в классе функций с суммируемыми квадратами существует нетривиальное решение интегрального уравнения (7,20) с действительным симметрическим ядром, проводится совершенно по тому же плану, какой был принят в § 12. Поэтому мы изложим только те части этого доказательства, которые существенно отличаются от соответствующих мест § 12. Мы будем предполагать, что существует интеграл

$$\iint K^2(P, Q)\,dP\,dQ, \tag{8,20}$$

распространенный по топологическому произведению двух одинаковых измеримых множеств G, которым принадлежат точки P и Q. По теореме Фубини отсюда следует, что почти при всех P существует интеграл

$$\int K^2(P, Q)\,dQ$$

и, следовательно, почти при всех P существует интеграл

$$\int K(P, Q)\,\varphi(Q)\,dQ$$

для всякой функции $\varphi(Q)$ с суммируемым квадратом, так как

$$|K(P, Q)\,\varphi(Q)| \leqslant \frac{K^2(P, Q) + \varphi^2(Q)}{2}.$$

Здесь, как и во всем дальнейшем, знаки $\iint$ означают интегрирование по топологическому произведению двух одинаковых измеримых множеств G, которым принадлежат точки P и Q; знак $\int$ означает интегрирование по множеству G.

Для всякой функции $\varphi(P)$ с суммируемым квадратом существует интеграл

$$\iint K(P, Q)\,\varphi(P)\,\varphi(Q)\,dP\,dQ,$$

так как

$$|K(P, Q)\,\varphi(P)\,\varphi(Q)| \leqslant \frac{1}{2}\left[K^2(P, Q) + \varphi^2(P)\,\varphi^2(Q)\right],$$

$$\iint \varphi^2(P)\,\varphi^2(Q)\,dP\,dQ = \int \varphi^2(P)\,dP \cdot \int \varphi^2(Q)\,dQ.$$

Во всем дальнейшем мы будем рассматривать только симметрические ядра $K(P, Q)$, для которых существует интеграл (8,20). Вообще, *во всем дальнейшем будут рассматриваться только функции, квадраты которых интегрируемы по Лебегу на всем множестве G их определения.* Мы не будем каждый раз оговаривать это.

3. Пункт 1 § 12 повторяется полностью.

Вместо теоремы, доказанной в п. 2 § 12, докажем следующую теорему.

Пусть дано некоторое семейство H функций $h(P)$, для каждой из которых

$$\int h^2(P)\,dP \leqslant M^2, \qquad (9,20)$$

$$M > 0,$$

где M — некоторая постоянная, одна и та же для всех функций $h(P)$. Тогда семейство Σ функций $\psi(P)$, определенных равенством

$$\psi(P) = \int K(P, Q)\,h(Q)\,dQ,$$

компактно. Это значит, что из каждого бесконечного множества таких функций можно выбрать последовательность, сходящуюся в среднем.

Доказательство. Если $K(P, Q)$ — равномерно непрерывная функция, когда $P \in G$ и $Q \in G$, то по теореме, доказанной в п. 2 § 12, семейство функций $\psi(P)$ равностепенно непрерывно и равномерно ограничено.

В силу теоремы Арцеля семейство функций $\psi(P)$ компактно, т. е. из всякой бесконечной последовательности функций $\psi(P)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно и, следовательно, сходящуюся в среднем. Воспользовавшись этим утверждением, мы докажем компактность семейства Σ для произвольного ядра $K(P, Q)$, суммируемого с квадратом.

Согласно замечанию д) из п. 1 настоящего параграфа мы можем построить последовательность непрерывных функций

$$K_1(P, Q),\ K_2(P, Q),\ \ldots,\ K_n(P, Q),\ \ldots$$

такую, что

$$\iint [K(P, Q) - K_n(P, Q)]^2 \, dP \, dQ < \frac{1}{2^{2n}}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{10,20}$$

Пусть задана теперь бесконечная последовательность функций

$$\psi_1(P), \ \psi_2(P), \ \ldots, \psi_n(P), \ \ldots \tag{11,20}$$

из семейства Σ, полученная с помощью последовательности функций

$$h_1(P), \ h_2(P), \ \ldots, h_n(P), \ \ldots \tag{12,20}$$

из семейства H, так что $\psi_i = Kh_i$ (см. (2,6)).

Так как $K_1(P, Q)$ — непрерывная функция, то из последовательности (12,20) можно выбрать бесконечную подпоследовательность

$$h_1^{(1)}(P), h_2^{(1)}(P), \ \ldots, h_n^{(1)}(P), \ \ldots \tag{13,20}$$

такую, что последовательность функций

$$K_1 h_1^{(1)}, \ K_1 h_2^{(1)}, \ \ldots, K_1 h_n^{(1)}, \ \ldots \tag{14,20}$$

сходится равномерно и, следовательно, сходится в среднем. Далее, из последовательности (13,20) снова выбираем бесконечную подпоследовательность

$$h_1^{(2)}(P), h_2^{(2)}(P), \ \ldots, h_n^{(2)}(P), \ \ldots \tag{15,20}$$

такую, что последовательность

$$K_2 h_1^{(2)}, \ K_2 h_2^{(2)}, \ K_2 h_3^{(2)}, \ \ldots, K_2 h_n^{(2)}, \ \ldots$$

сходится в среднем и т. д.

Легко видеть, что последовательность

$$h_1^{(1)}(P), h_2^{(2)}(P), \ \ldots, h_n^{(n)}(P) \tag{16,20}$$

такова, что при любом $K_m(P, Q)$ последовательность

$$K_m h_1^{(1)}, \ K_m h_2^{(2)}, \ \ldots, K_m h_n^{(n)}, \ \ldots \tag{17,20}$$

сходится в среднем.

Покажем теперь, что последовательность функций $\psi(P)$ из семейства Σ

$$Kh_1^{(1)},\ Kh_2^{(2)},\ \ldots,\ Kh_n^{(n)},\ \ldots,$$

являющаяся подпоследовательностью (11,20), также сходится в среднем.

Действительно, по неравенству треугольника (см. стр. 64)

$$\| Kh_m^{(m)} - Kh_n^{(n)} \| \leqslant \| Kh_m^{(m)} - K_p h_m^{(m)} \| + \\ + \| K_p h_m^{(m)} - K_p h_n^{(n)} \| + \| K_p h_n^{(n)} - Kh_n^{(n)} \|. \qquad (18,20)$$

Из условия (10,20) следует, что p можно выбрать настолько большим, чтобы $\| Kh - K_p h \|$ была меньше любого $\varepsilon > 0$ для всех функций из семейства H. В этом легко убедиться, применяя неравенство Буняковского, так как

$$\left(\int [K(P, Q) - K_p(P, Q)]\, h(Q)\, dQ \right)^2 \leqslant \\ \leqslant \int [K(P, Q) - K_p(P, Q)]^2\, dQ \int h^2(Q)\, dQ$$

и

$$\| Kh - K_p h \| \leqslant \\ \leqslant M \left[\iint (K(P, Q) - K_p(P, Q))^2\, dP\, dQ \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant M \cdot \frac{1}{2^p}.$$

Выбрав, таким образом, p, мы можем указать такое число N, что если n и m больше N, то

$$\| K_p h_m^{(m)} - K_p h_n^{(n)} \| < \varepsilon,$$

так как последовательность (17,20) сходится в среднем. При этом левая часть неравенства (18,20) будет меньше 3ε. Таким образом, компактность семейства Σ доказана.

4. *Доказательство существования конечных собственных значений* для интегральных уравнений с симметрическим ядром $K(P, Q)$, у которого квадрат суммируем по совокупности (P, Q), если G ограничено, проводится совершенно так же, как в п. 3 § 12. Отличие состоит только в следующем.

а) Функцию $\varphi_{P_0}(P)$ надо определить так, чтобы она равнялась 0 всюду, кроме пересечения множества G с некоторым кубом K_{P_0}, у которого центр находится в точке P_0 и стороны параллельны координатным осям. На этом пересечении функция $\varphi_{P_0}(P)$ должна равняться 1. Тогда предположение, что $\mu_M = \mu_m = 0$, приводит к заключению, что должен равняться 0 интеграл

$$\iint K(P, Q)\,dP\,dQ,$$

взятый по пересечению $G \cdot G$ с любым $2n$-мерным кубом в пространстве (P, Q), если ребра этого куба параллельны координатным осям. Пользуясь п. 1 б) настоящего параграфа, отсюда легко получить, что $K(P, Q) = 0$ почти всюду на топологическом произведении множества G самого на себя (даже если G не является областью).

б) Сходимость надо понимать всюду как сходимость в среднем, и соответственно этому вместо теоремы, доказанной в п. 2 § 12, применять теорему, доказанную в предыдущем пункте настоящего параграфа.

в) Для каждого собственного значения имеется только конечное число линейно независимых собственных функций и собственные значения не могут иметь конечную точку накопления. Это можно показать так. Построим для данного ядра $K(P, Q)$ ряды (6,13) и (7,13) так, как это делалось в § 13. При этом мы a priori не исключаем возможности, что все члены ряда (7,13), начиная с некоторого, совпадают. Тогда при любом m

$$\iint \left[K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]^2 dP\,dQ =$$

$$= \iint K^2(P, Q)\,dP\,dQ - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda_i^2} \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}$$

сходится, и потому $\lambda_i \to \infty$ при $i \to \infty$.

Замечание. Таким образом, интегральное уравнение с ядром, квадрат которого интегрируем, обладает не более чем счетным множеством собственных значений и линейно независимых собственных функций. Этот факт является частным случаем того, что любая ортонормальная система функций S, заданных на конечной области, имеет мощность не более чем счетную. Действительно, из теоремы Вейерштрасса легко следует, что для любой функции $f \in S$ можно подобрать такой многочлен φ_f от координат с рациональными коэффициентами, что норма разности $f - \varphi_f$ будет меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$, в частности меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Но множество таких многочленов счетно, и если S несчетно, то найдутся $f' \neq f''$ такие, что $\varphi_{f'} = \varphi_{f''}$. Отсюда по неравенству треугольника (см. § 11, п. 5) норма разности $f' - f''$ будет меньше $\sqrt{2}$. А это невозможно, так как легко проверить, что норма разности между любыми взаимно ортогональными нормированными функциями равна $\sqrt{2}$.

5. Рассуждения §§ 13—16 полностью сохраняют силу, если множество G ограничено. Надо только всюду вместо равномерной сходимости рассматривать сходимость в среднем. Например, *теорема Гильберта-Шмидта* теперь утверждает сходимость в среднем ряда (3,14) к истокообразно представимой функции $f(P)$.

6. Для интегральных уравнений (7,14) с симметрическими ядрами $K(P, Q)$ рассматриваемого типа, если множество G, по которому берется интеграл, ограничено, нетрудно доказать все *теоремы Фредгольма*.

Для всякой функции $f(P)$ с суммируемым квадратом, стоящей в правой части уравнения (7,14), можно составить коэффициенты Фурье, пользуясь ортонормальной системой собственных функций (6,13) ядра $K(P, Q)$. Согласно неравенству Бесселя сумма квадратов этих коэффициентов сходится. Пользуясь теоремой Фишера-Рисса, легко проверить, что ряд, стоящий в правой части (10,14), при всякой функции $f(P)$ с суммируемым квадратом сходится в среднем к некоторой функции $\varphi_0(P)$ также с суммируемым квадратом, если λ не равно какому-нибудь собственному значению λ_i. Тогда эта функция $\varphi_0(P)$ почти всюду удовлетворяет уравнению (7,14).

Чтобы убедиться в этом, заметим прежде всего, что если бы результаты подстановки $\varphi_0(P)$ в правую и левую части уравнения (7,14) [соответственно $F_1(P)$ и $F_2(P)$] не совпадали почти всюду, то интеграл от квадрата их разности не был бы равен 0. Покажем, что этого не может быть. Для этого в правую и левую части уравнения (7,14) вместо $\varphi(P)$ подставим:

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda} + f(P).$$

Пусть результатами этой подстановки будут функции $F_1^{(n)}(P)$ и $F_2^{(n)}(P)$. Очевидно, при достаточно большом n нормы (средние квадратичные уклонения) разностей $F_1 - F_1^{(n)}$ и $F_2 - F_2^{(n)}$, которые мы будем обозначать

$$\| F_1 - F_1^{(n)} \|, \text{ соответственно } \| F_2 - F_2^{(n)} \|,$$

будут как угодно малы. Применяя неравенство треугольника, мы получим отсюда, что не может иметь место соотношение

$$\| F_1^{(n)} - F_2^{(n)} \| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

если

$$\| F_1 - F_2 \| \neq 0.$$

Но, с другой стороны,

$$F_2^{(n)}(P) =$$
$$= \lambda^2 \int K(P, Q) \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i \varphi_i(Q)}{\lambda_i - \lambda}\, dQ + \lambda \int K(P, Q) f(Q)\, dQ + f(P).$$

Пользуясь теоремой Гильберта-Шмидта в ее новой формулировке, а также тем, что функции φ_i суть собственные функции ядра $K(P, Q)$, мы получим отсюда, что почти всюду

$$F_2^{(n)}(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^2}{\lambda_i} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_i} f_i \varphi_i(P) + f(P) =$$
$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda} + f(P) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_i} f_i \varphi_i(P).$$

Следовательно, почти всюду

$$F_2^{(n)}(P)-F_1^{(n)}(P)=\lambda\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{f_i\varphi_i(P)}{\lambda_i}$$

и потому

$$\|F_2^{(n)}(P)-F_1^{(n)}(P)\|=\lambda^2\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{f_i^2}{\lambda_i^2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Таким образом, предположение, что $\varphi_0(P)$ не удовлетворяет почти всюду уравнению (7,14), привело нас к противоречию.

Таким образом, если λ не равно ни одному из собственных значений уравнения (7,14), то это уравнение имеет решение при любой функции $f(P)$. Это решение единственно. Действительно, если бы $\varphi_1(P)$ и $\varphi_2(P)$ были решениями уравнения (7,14), то $\varphi_1(P)-\varphi_2(P)$ была бы решением соответствующего однородного уравнения и λ было бы собственным значением, вопреки предположению. Таким образом, 1-я теорема Фредгольма доказана.

В силу симметричности ядра $K(P, Q)$ 2-я теорема Фредгольма является очевидным следствием замечания в) п. 4.

Когда λ совпадает с одним из λ_i, для существования решения уравнения (7,14) необходимо, чтобы $f(P)$ было ортогонально ко всем собственным функциям $\varphi_1^{(i)}(P), \ldots$ $\ldots, \varphi_m^{(i)}(P)$, соответствующим этому λ_i, так как тогда должно быть:

$$\int\varphi(P)\varphi_k^{(i)}(P)\,dP=$$
$$=\lambda_i\iint K(P, Q)\varphi(Q)\varphi_k^{(i)}(P)\,dP\,dQ+\int f(P)\varphi_k^{(i)}(P)\,dP=$$
$$=\int\varphi(Q)\varphi_k^{(i)}(Q)\,dQ+\int f(P)\varphi_k^{(i)}(P)\,dP,$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Убедимся в достаточности этого условия. Для этого мы образуем ряд (10,14), полагая в тех членах, где $\lambda=\lambda_i$

(и потому $f_i=0$), отношение $\frac{\lambda_i}{\lambda-\lambda_i}$ равным любому фиксированному числу α_i. Тогда, аналогично предыдущему, убеждаемся в том, что полученный ряд сходится в среднем и сумма его удовлетворяет уравнению (7,14) почти всюду. При изменении α_i мы будем иметь все решения уравнения (7,14) (которые получаются из одного любого решения добавлением всех решений соответствующего однородного уравнения). Этим доказывается третья теорема Фредгольма.