*Глава 1*

# ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

## § 1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА

В школьном курсе математики понятие вектора вводится наглядным, не строгим образом. В этом вводном параграфе мы обсудим «школьное» определение вектора и попытаемся сделать его по возможности строгим.

### 1. Предварительное определение вектора

Пусть $A$ и $B$ — две точки (пока различные). Эти точки определяют отрезок вместе с направлением на нем (а именно, направлением от $A$ к $B$), т. е. *направленный отрезок с началом $A$ и концом $B$*. Этот направленный отрезок мы будем обозначать символом $\overrightarrow{AB}$.

Направленные отрезки называются также *векторами*. О векторе $\overrightarrow{AB}$ говорят, что он *отложен* от точки $A$ (или *приложен* к этой точке).

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ называются равными, если один из них может быть получен из другого параллельным переносом, т. е. движением, при котором вектор $\overrightarrow{AB}$ перемещается параллельно самому себе так, что точка $A$ движется по отрезку $\overline{AA_1}$, а точка $B$ — по отрезку $\overline{BB_1}$.

Эти определения вполне наглядны, но с логической точки зрения мало удовлетворительны, поскольку они используют понятие «движения», относящееся скорее к механике, чем к геометрии. Конечно, это понятие можно определить и чисто геометрически (что мы в дальнейшем и сделаем), но при этом оказывается, что строгое определение «движения» основывается на понятии вектора. Поэтому желательно дать определение равенства векторов, не использующее «механических» понятий.

Имея это в виду, заметим, что если равные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ расположены на различных прямых, то при описанном выше движении вектор $\overrightarrow{AB}$ заметает параллелограмм $ABA_1B_1$, в котором векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ являются противоположными сторонами. Таким образом, *векторы* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{A_1B_1}$, *не лежащие на одной прямой, равны, если четырехугольник* $ABA_1B_1$ *является параллелограммом.*

Это определение уже вполне удовлетворительно, но, к сожалению, оно неприменимо к векторам, лежащим на одной прямой. Поэтому равенство таких векторов нуждается в отдельном описании.

Такое описание легко дать: например, *векторы, лежащие на одной прямой, равны, если их длины одинаковы и они направлены в одну сторону.* Однако тогда мы получим, что равенство векторов будет по-разному определяться в случае, когда эти векторы лежат на разных прямых, и в случае, когда они лежат на одной и той же прямой. Это не очень удобно, потому что из-за этого во всех доказательствах придется рассматривать много частных случаев в зависимости от возможного расположения соответствующих векторов. Поэтому хотелось бы иметь одно общее определение, пригодное во всех случаях взаимного расположения данных векторов.

Чтобы дать такое определение, заметим, что четырехугольник тогда и только тогда является параллелограммом, когда его диагонали делятся в их точке пересечения пополам. Следовательно, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$, расположенные на различных прямых, тогда и только тогда равны, когда середины отрезков $\overline{AB_1}$ и $\overline{A_1B}$ совпадают. С другой стороны, ясно, что это верно и для векторов, расположенных на одной прямой (при $A = B_1$ серединой «отрезка» $\overline{AB_1}$, по определению, считается точка $A$). Тем самым мы приходим к следующему определению:

***Определение 1.*** Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ называются *равными*, если середины отрезков $\overline{AB_1}$ и $\overline{A_1B}$ совпадают.

В дальнейшем именно это определение равенства векторов мы будем рассматривать как основное.

***Замечание 1.*** Выше мы исключили из рассмотрения случай, когда $A = B$. В этом случае, мы, собственно говоря, уже не можем говорить об отрезке $\overrightarrow{AB}$. Однако, чтобы не допускать исключений (что в математике всегда плохо), мы условимся говорить, что при $A = B$ мы имеем дело с *вырожденным* направленным отрезком $\overrightarrow{AA}$. *Все вырожденные направленные отрезки* (приложенные в различных точках) *равны.* Действительно, при $A = B$ и $A_1 = B_1$ отрезки $\overline{AB_1}$ и $\overline{A_1B}$ совпадают, а потому и совпадают их середины. Заметим еще, что никакой невырожденный направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ не может быть равен вырожденному отрезку $\overrightarrow{CC}$, поскольку середины отрезков $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$, где $A$ и $B$ различны, совпадать не могут.

Вырожденный направленный отрезок называется также *нулевым вектором* и обозначается символом **0**.

## 2. Отношения эквивалентности

Обратим внимание на то, что равенство векторов мы ввели специальным определением. Этим равенство векторов в принципе отличается от «равенства в смысле тождественного совпадения», в специальном определении не нуждающегося.

Чтобы иметь возможность обсудить возникающую здесь ситуацию, мы напомним в этом пункте основные общематематические (логические) определения, связанные с различными видами «равенств», рассматриваемыми в математике. При этом термин «равенство» мы будем пока понимать лишь в смысле тождественного совпадения.

Общее понятие равенства тесно связано с понятием «свойства» Что такое «свойство», столь же трудно определить, как и что такое «множество». Проще всего считать его одним из основных, не определяемых, понятий математики. Однако с некоторой точки зрения его все же можно свести к понятию множества (или, точнее, подмножества).

Пусть $X$ — произвольное множество и пусть $\mathscr{P}$ — некоторое свойство его элементов. Тогда в множестве $X$ определено подмножество $X_{\mathscr{P}}$, состоящее из всех элементов этого множества, обладающих свойством $\mathscr{P}$. Два свойства $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ называются *равнообъемными*, если $X_{\mathscr{P}} = X_{\mathscr{Q}}$, т. е. если элемент множества $X$ тогда и только тогда обладает свойством $\mathscr{P}$, когда он обладает свойством $\mathscr{Q}$. Для всех практических целей равнообъемные свойства можно не различать. Поэтому в математике принято считать их совпадающими (тождественными). В силу этого соглашения, свойства элементов множества $X$ находятся в естественном биективном [1]) соответствии с его подмножествами (именно, свойству $\mathscr{P}$ соответствует подмножество $X_{\mathscr{P}}$, а подмножеству $Y \subset X$ — свойство «принадлежать $Y$»).

Ситуация, когда некоторые объекты одной природы находятся в естественном биективном соответствии с некоторыми объектами другой природы, весьма часто возникает в математике (мы не будем здесь обсуждать смысл прилагательного «естественный»). Опыт конструирования математических теорий показывает, что во всех таких ситуациях объекты, естественно соответствующие друг другу, целесообразно рассматривать как одинаковые. На основании этого общего п р и н ц и п а  о т о ж д е с т в л е н и я мы, в частности, можем отождествлять свойства элементов множества $X$ с подмножествами этого множества. Таким образом, с этой точки зрения свойства элементов множества — это не что иное как его подмножества.

Поскольку для любых двух различных элементов множества $X$ всегда существует подмножество, содержащее один из этих элементов и не содер-

---

[1]) Термин «биективный» мы употребляем как синоним термина «взаимно однозначный».

жащее другой, мы видим, таким образом, что *два элемента множества $X$ тогда и только тогда равны, когда все их свойства одинаковы.*

Однако весьма часто мы интересуемся только некоторыми свойствами элементов множества $X$, игнорируя все остальные возможные их свойства. В соответствии с этим возникает новое понятие ревенства, учитывающее лишь интересные для нас свойства. Формально это понятие может быть определено следующим образом.

Пусть $\mathfrak{P}$ — произвольный набор (или, как говорят, с е м е й с т в о) некоторых свойств элементов множества $X$. Элементы $a$ и $b$ множества $X$ называются *равными по отношению к свойствам семейства* $\mathfrak{P}$, если для любого свойства $\mathscr{P}$ из семейства $\mathfrak{P}$ элемент $a$ тогда и только тогда обладает свойством $\mathscr{P}$, когда им обладает элемент $b$. Если семейство $\mathfrak{P}$ содержит все свойства, то это есть равенство в смысле тождественного совпадения. Если семейство $\mathfrak{P}$ пусто, то любые два элемента множества $X$ равны по отношению к свойствам этого семейства.

Можно сказать, что, фиксируя семейство свойств $\mathfrak{P}$, мы получаем из элементов множества $X$ некоторые новые математические объекты, отличающиеся от этих элементов игнорированием их свойств, не принадлежащих семейству $\mathfrak{P}$. Каждый такой объект $a'$ определяется некоторым элементом $a \in X$, причем элементы $a \in X$ и $b \in X$ тогда и только тогда определяют один и тот же объект $a'$, когда они равны по отношению к свойствам семейства $\mathfrak{P}$.

Каждый элемент $a \in X$ определяет некоторое подмножество $\mathfrak{P}_a$, состоящее из всех элементов $b$, равных элементу $a$ по отношению к свойствам семейства $\mathfrak{P}$. Ясно, что, введенные выше объекты $a'$ находятся в естественном биективном соответствии с подмножествами $\mathfrak{P}_a$ (объект $a'$, определяемый элементом $a$, соответствует подмножеству $\mathfrak{P}_a$, и обратно). В соответствии с объясненным выше принципом отождествления объекты $a'$ отождествляются поэтому с подмножествами $\mathfrak{P}_a$.

Все это можно описать несколько иначе, если воспользоваться понятием «отношения». Наглядно, «отношение» между элементами множества $X$ — это некоторое их «взаимное свойство», т. е. свойство пар вида $(a, b)$, где $a \in X$, $b \in X$. Другими словами, *отношение* на множестве $X$ — это некоторое множество $R$ таких пар. Если $(a, b) \in R$, то пишут $a \underset{R}{\sim} b$ (или просто $a \sim b$) и говорят, что элементы $a$ и $b$ находятся в отношении $R$. Отношение называется *рефлексивным*, если $a \sim a$ для всех $a \in X$, *симметричным*, если для любых $a, b \in X$ из $a \sim b$ следует $b \sim a$, и *транзитивным*, если для любых $a, b, c \in X$ из $a \sim b$ и $b \sim c$ следует $a \sim c$. Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности* или просто *эквивалентностью*. Если множество $X$ представлено в виде объединения непустых непересекающихся подмножеств, то на $X$ возникает отношение эквивалентности, в котором $a \sim b$ тогда и только тогда, когда $a$ и $b$ принадлежат одному и тому же из этих подмножеств. Обратно, задание на $X$ некоторого отношения эквивалентности определяет разбиение этого множества на непустые непересекающиеся подмножества (*классы эквивалентности*), состоящие из попарно эквивалентных элементов. Класс эквивалентности, содержащий данный элемент $a$, обозначается обычно символом $\{a\}$. Таким образом, $\{a\} = \{b\}$ тогда и только тогда, когда $a \sim b$. Множество всех классов эквивалентности называется *фактормножеством* множества $X$ по данному отношению эквивалентности $R$ и обозначается символом $X/R$.

Ясно, что для любого семейства свойств $\mathfrak{P}$ отношение «равны по отношению к свойствам семейства $\mathfrak{P}$» является эквивалентностью. При этом соответствующие классы эквивалентности совпадают с введенными выше подмножествами $\mathfrak{P}_a$. Обратно, легко видеть, что для любого отношения эквивалентности существует такое семейство свойств $\mathfrak{P}$, что элементы тогда и только тогда эквивалентны, когда они равны по отношению к свойствам семейства $\mathfrak{P}$. Таким семейством является, например, семейство свойств $\mathcal{P}_a$, занумерованных элементами множества $X$ и определенных условием, что элемент $b \in X$ тогда и только тогда обладает свойством $\mathcal{P}_a$, когда $b \sim a$ (заметим, что свойство $\mathcal{P}_a$, рассматриваемое как подмножество множества $X$, является не чем иным, как классом эквивалентности $\{a\}$ элемента $a$).

Таким образом, каждое отношение эквивалентности на множестве $X$ сводится к тому, что мы фиксируем внимание лишь на некоторых свойствах элементов множества $X$ и игнорируем все другие их свойства.

Заметим, что различные семейства свойств могут определять одно и то же отношение эквивалентности. Такие «равнообъемные» семейства можно не различать.

## 3. Окончательное определение вектора

При определении равенства векторов в п. 1 мы пренебрегли некоторыми свойствами направленных отрезков (например, свойством иметь начало в данной точке, поскольку векторы могут быть равны и иметь начало в различных точках). Это означает, что на самом деле мы имеем здесь дело с равенством по отношению к некоторому семейству свойств, т. е. с некоторым отношением эквивалентности. Чтобы не путать это отношение с «настоящим» (тождественным) равенством, мы будем называть теперь его «эквиполлентностью». Таким образом, мы принимаем следующие определения:

***Определение 1.*** Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ называются *эквиполлентными,* если середины отрезков $\overline{AB_1}$ и $\overline{A_1B}$ совпадают.

***Определение 2.*** Класс эквиполлентных направленных отрезков называется *вектором.* В частности, *нулевой вектор* — это класс, содержащий все вырожденные отрезки.

Таким образом, в теперешнем уточненном понимании термины «вектор» и «направленный отрезок» относятся к р а з л и ч н ы м математическим понятиям. Поэтому, строго говоря, мы уже не можем обозначать векторы теми же символами $\overrightarrow{AB}$, что и направленные отрезки. В соответствии с общими обозначениями п. 2 вектор, содержащий направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, следует обозначать символом $\{\overrightarrow{AB}\}$. Равенство векторов $\{\overrightarrow{AB}\} = \{\overrightarrow{A_1B_1}\}$ (понимаемое в смысле тождественного совпадения) равносильно эквиполлентности направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Впрочем, оказывается удобным упростить обозначения и употреблять для вектора $\{\overrightarrow{AB}\}$ прежний символ $\overrightarrow{AB}$. Но при этом формула $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ становится двусмысленной: она либо означает равенство (совпадение) направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ (т. е. тот факт, что $A = A_1$ и $B = B_1$), либо равенство соответствующих векторов (эквиполлентность направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$). В контексте каждый раз ясно, в каком смысле эта формула понимается, так что эта двусмысленность к недоразумениям не приводит. Конечно, если такое недоразумение возможно, необходимо сделать соответствующие оговорки или использовать более педантичное обозначение $\{\overrightarrow{AB}\} = \{\overrightarrow{A_1B_1}\}$.

В согласии с этим сокращенным обозначением термины «вектор» и «направленный отрезок» вновь можно употреблять как синонимы.

Таким образом, мы снова возвращаемся к обозначениям (и терминологии) из п. 1, но уже «на высшем уровне». Мы знаем, что они на самом деле означают, и можем каждый раз, когда это необходимо, вернуться к более четким и недвусмысленным формулировкам.

Обозначать векторы мы будем также жирными строчными буквами латинского алфавита: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$, ...

Внимательный читатель должен уже заметить, что изложенное «окончательное» определение вектора нуждается в обосновании. Действительно, чтобы иметь право говорить о классах эквиполлентных направленных отрезков, необходимо предварительно доказать следующее

***Предложение 1.*** *Отношение эквиполлентности является на множестве всех направленных отрезков отношением эквивалентности, т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Доказательство. Рефлексивность и симметричность эквиполлентности очевидны (если $A = A_1$ и $B = B_1$, то отрезки $\overline{AB_1}$ и $\overline{A_1B}$ совпадают и потому совпадают и их середины; аналогично, если середины отрезков $\overline{AB_1}$ и $\overline{A_1B}$ совпадают, то середины отрезков $\overline{A_1B}$ и $\overline{AB_1}$ также совпадают). Для доказательства же транзитивности нам будет нужна следующая элементарно-геометрическая

***Лемма.*** *Пусть $A$, $B$, $C$ и $D$ — четыре произвольные точки и пусть*

*$M$ — середина отрезка $\overline{AB}$,*

*$N$ — середина отрезка $\overline{CD}$,*

*$P$ — середина отрезка $\overline{AD}$,*

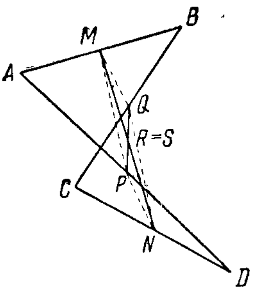
*$Q$ — середина отрезка $\overline{BC}$,*

*Тогда середины $R$ и $S$ отрезков $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ совпадают.*

Доказательство. Если $B = D$, то $\overline{AB} = \overline{AD}$ и $\overline{BC} = \overline{CD}$ Поэтому $M = P$, $N = Q$ и утверждение леммы очевидно. Случай $A = C$ рассматривается аналогично.

Пусть $B \neq D$ и $A \neq C$. Легко видеть, что тогда $M \neq P$ (ибо если $M = P$, то $B = D$). Аналогично, $N \neq Q$, $M \neq Q$ и $N \neq P$.

Поскольку $M \neq P$ и $B \neq D$, определены прямые $MP$ и $BD$. Ясно, что эти прямые параллельны[1]). Действительно, если точки $A$, $B$, $D$ не лежат на одной прямой, то $MP$ — средняя линия треугольника $ABD$; если же точки $A$, $B$, $D$ лежат на одной прямой, то точки $M$ и $P$ также лежат на этой прямой. Аналогично, прямая $NQ$ также параллельна прямой $BD$ Следовательно, прямые $MP$ и $NQ$ параллельны. Аналогично доказывается, что прямые $MQ$ и $NP$ также параллельны.




Таким образом, если точки $M$, $N$, $P$, $Q$ не лежат на одной прямой, то они являются вершинами параллелограмма со сторонами $\overline{PN}$, $\overline{NQ}$, $\overline{QM}$ и $\overline{MP}$. Отрезки $\overline{MN}$ и $\overline{PQ}$, являясь диагоналями этого параллелограмма, делятся их точкой пересечения пополам. Но это и означает, что середины этих отрезков совпадают.

Пусть теперь точки $M$, $N$, $P$, $Q$ принадлежат одной прямой $\alpha$. В этом случае (как и в предыдущем) длина $|MP|$ отрезка $\overline{MP}$ равна половине длины $|BD|$ отрезка $\overline{BD}$. Действительно, если точка $A$ не лежит на прямой $BD$, то это очевидно, поскольку отрезок $\overline{MP}$ является средней линией треугольника $ABD$. Если же точка $A$ лежит на прямой $BD$, то для доказательства следует поочередно рассмотреть пять случаев: точка $B$ лежит между точками $A$ и $D$; точка $A$ лежит между точками $B$ и $D$; точка $D$ лежит между точками $A$ и $B$; точка $A$ совпадает с точкой $B$; точка $A$ совпадает с точкой $D$. В каждом из этих случаев равенство $|MP| = {}^1/_2|BD|$ очевидно. Аналогично устанавливается, что $|NQ| = {}^1/_2|BD|$. Следовательно,

$$|MP| = |NQ|.$$

Точно так же доказывается, что имеет место и равенство

$$|MQ| = |NP|.$$

Заметим теперь, что при $M \neq N$ эти равенства однозначно характеризуют точку $Q$, т. е. если $|MQ'| = |NP|$, $|MP| = |NQ'|$ для некоторой точки $Q'$ прямой $\alpha$, то $Q = Q'$. В самом деле, тогда

$$|MQ| = |MQ'|, \quad |NQ| = |NQ'|$$

и, следовательно, при $Q \neq Q'$ точки $M$ и $N$ обе являются серединами отрезка $\overline{QQ'}$, и значит, вопреки предположению, совпадают.

Пусть теперь $Q'$ — такая точка, что точка $R$ является серединой отрезка $PQ'$. Очевидно, что точка $Q'$ лежит на прямой $\alpha$. Так как относительно точки $R$ точки $M$ и $N$, так же как и точки $P$ и $Q'$, симметричны, то отрезок $\overline{MP}$ симметричен отрезку $\overline{NQ'}$, а отрезок $\overline{MQ'}$ симметричен отрезку $\overline{NP}$.

---

[1]) Мы называем прямые *параллельными*, если они либо «параллельны в школьном смысле» (лежат в одной плоскости и не имеют общих точек), либо совпадают. Эта модификация терминологии оказывается очень удобной, поскольку только при таком понимании термина «параллельность» отношение параллельности прямых является отношением эквивалентности. Соответствующие классы эквивалентности называются иногда *направлениями*.

Аналогичное значение термин «параллельные» будет иметь у нас и по отношению к прямым и плоскостям в пространстве.

Поэтому

$$|MQ'| = |NP|, \quad |MP| = |NQ'|$$

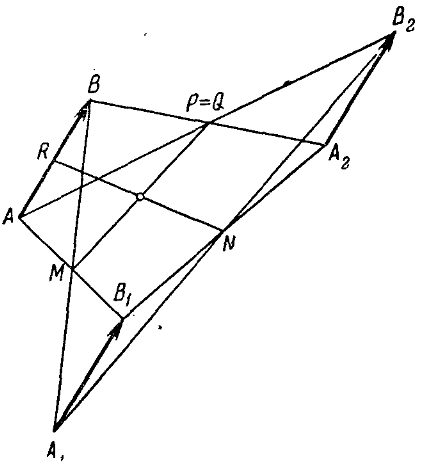
и значит, по доказанному, $Q = Q'$. Таким образом, при $M \neq N$ середина $R$ отрезка $\overline{MN}$ является также и серединой $S$ отрезка $\overline{PQ}$.

Случай $P \neq Q$ рассматривается аналогично.

Предположим, наконец, что $M = N$ и $P = Q$. Так как точки $A$ и $B$ симметричны относительно точки $M$, точки $C$ и $D$ симметричны относительно точки $N$ и $N = M$, то отрезки $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ симметричны относительно точки $M$. Поскольку $P = Q$, это возможно только тогда, когда все точки $M$, $N$, $P$, $Q$ совпадают. Поэтому середины отрезков $\overline{MN}$ и $\overline{PQ}$ также совпадают.

Тем самым лемма полностью доказана.

Пусть теперь $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$ — такие направленные отрезки, что отрезок $\overrightarrow{AB}$ эквиполлентен отрезку $\overrightarrow{A_1B_1}$, а отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$ эквиполлентен отрезку $\overrightarrow{A_2B_2}$. Нам надо доказать, что отрезок $\overrightarrow{AB}$ эквиполлентен отрезку $\overrightarrow{A_2B_2}$, т. е. что середина $P$ отрезка $\overrightarrow{AB_2}$ совпадает с серединой $Q$ отрезка $\overrightarrow{A_2B}$. Рассмотрим с этой целью середину $R$ отрезка $\overline{AB}$. Пусть $M$ — общая середина отрезков $\overline{AB_1}$ и $\overline{A_1B}$, а $N$ — общая середина отрезков $\overline{A_1B_2}$ и $\overline{A_2B_1}$. Применив к точкам $A$, $B$, $A_2$ и $B_1$ нашу лемму, мы немедленно получим, что середины отрезков $RN$ и $QM$ совпадают. Аналогично, применив эту лемму к точкам $A$, $B$, $A_1$ и $B_2$, мы получим, что совпадают середины отрезков $RN$ и $PM$. Следовательно, середины отрезков $QM$ и $PM$ совпадают. Кроме того, эти отрезки имеют общую концевую точку $M$. Поэтому эти отрезки совпадают, а значит, и совпадают точки $Q$ и $P$.




Тем самым предложение 1 доказано, и наше определение вектора полностью обосновано.

На достигнутом нами сейчас уровне строгости мы обязаны доказывать утверждения, наглядно вполне очевидные. Например мы должны доказать, что каждый вектор можно единственным образом отложить от произвольной точки. Другими словами, мы должны доказать следующее

***Предложение 2.*** *Для любого направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ и любой точки $A_1$ существует одна и только одна такая точка $B_1$, что отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$ эквиполлентен отрезку $\overrightarrow{AB}$.*

Доказательство. Единственность точки $B_1$ очевидна: если направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_1B_1'}$ эквиполлентны, то середина отрезка $\overline{A_1B_1'}$ совпадает с серединой отрезка $\overline{A_1B_1}$ и потому эти отрезки (имея общую концевую точку $A_1$) совпадают.

Для доказательства существования точки $B_1$ мы рассмотрим середину $C$ отрезка $A_1B$. Если $C = A$, то за точку $B_1$ мы можем, очевидно, принять точку $C$. При $C \neq A$ мы рассмотрим на прямой $AC$ точку $B_1$, обладающую тем свойством, что точка $C$ является серединой отрезка $\overline{AB_1}$. Ясно, что направленный отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$ эквиполлентен направленному отрезку $\overrightarrow{AB}$.

Наш анализ понятия вектора можно еще углубить, заметив, что лежащее в его основе понятие направленного отрезка определено нами без должной четкости. Действительно, в этом определении мы употребляем термин «направление», интуитивно ясный, но строго не определенный. Эту трудность можно преодолеть, заметив, что направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ однозначно определяется двумя точками $A$ и $B$, взятыми в определенном порядке, т. е. *упорядоченной парой точек.* На этом основании мы имеем право принять следующее, уже формально безупречное

***Определение 3.*** *Направленным отрезком* называется упорядоченная пара точек. Первая из этих точек называется *началом* отрезка, а вторая — его *концом.* Направленный отрезок с началом $A$ и концом $B$ обозначается символом $\overrightarrow{AB}$.

Заметим, что в этом определении вырожденные направленные отрезки ничем особым не выделяются.

***Окончательный вывод.*** Резюмируя, мы видим, что строгим образом векторы определяются в несколько этапов:

1) Сначала (определение 3) вводятся направленные отрезки.

2) Затем (определение 1) вводится отношение эквиполлентности направленных отрезков.

3) Доказывается (предложение 1), что отношение эквиполлентности является отношением эквивалентности.

4) Наконец (определение 2), вводятся векторы.

### 4. Векторы на прямой, на плоскости и в пространстве

Обратим внимание, что во всем сказанном выше точки $A$, $B$ и т. д. могли быть произвольными точками пространства. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы будем рассмотренные выше векторы называть *векторами в пространстве.* Множество всех векторов в пространстве будем обозначать символом $\mathrm{Vect}(3)$.

С другой стороны, мы могли бы ограничиться рассмотрением лишь точек, принадлежащих некоторой фиксированной плоскости $\Pi$. Получающиеся в этом случае векторы называются *векторами на плоскости.* Их множество мы будем обозначать символом Vect(2) (или символом $\mathrm{Vect}_\Pi(2)$, когда нужно подчеркнуть его зависимость от плоскости П).

Аналогично, можно ограничиться рассмотрением лишь точек некоторой фиксированной прямой $\alpha$ и получить *векторы на прямой.* Их множество мы будем обозначать символом Vect(1) (или символом $\mathrm{Vect}_\alpha(1)$).

Если плоскость П рассматривать независимо от объемлющего пространства (как это делается в планиметрии), то множества Vect(3) и Vect(2) формально между собой никак не связаны. Напротив, если считать, что плоскость П определенным образом вложена в пространство, то каждый направленный отрезок плоскости одновременно будет и направленным отрезком в пространстве. В плоскости этот отрезок определяет некоторый вектор $\boldsymbol{a}$, а в пространстве — некоторый вектор $\boldsymbol{a}'$ (векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$ различны хотя бы потому, что среди направленных отрезков, принадлежащих вектору $\boldsymbol{a}'$, заведомо имеются отрезки, не принадлежащие вектору $\boldsymbol{a}$). С другой стороны, ясно, что если на плоскости направленные отрезки эквиполлентны, то они эквиполлентны и как направленные отрезки в пространстве. Это означает, что вектор $\boldsymbol{a}'$ зависит только от вектора $\boldsymbol{a}$ и не зависит от того, от какого направленного отрезка, принадлежащего вектору $\boldsymbol{a}$, мы отправляемся. Тем самым возникает естественное биективное соответствие $\boldsymbol{a} \longleftrightarrow \boldsymbol{a}'$ между множеством $\mathrm{Vect}_\Pi(2)$ и некоторым подмножеством множества Vect(3). Поэтому (в силу общего принципа отождествления; см. п. 2) мы можем векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$ отождествлять и тем самым *множество* $\mathrm{Vect}_\Pi(2)$ *считать подмножеством множества* Vect(3). Аналогично, для любой прямой $\alpha$ множество $\mathrm{Vect}_\alpha(1)$ можно считать подмножеством множества Vect(3), а также и подмножеством множества $\mathrm{Vect}_\Pi(2)$ (в случае, когда прямая $\alpha$ принадлежит плоскости П). Эти вложения, очевидно, *согласованы* в том смысле, что если вектор $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Vect}_\alpha(1)$ рассматривать как вектор из $\mathrm{Vect}_\Pi(2)$, а потом как вектор из Vect(3), то получится тот же самый элемент множества Vect(3), как если вектор $\boldsymbol{a}$ с самого начала рассматривать как вектор из Vect(3).

***Определение 1.*** Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *параллельным* плоскости П, если прямая, на которой он расположен, параллельна этой плоскости. Вырожденный направленный отрезок, по определению, параллелен любой плоскости.

Ясно, что если направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ эквиполлентны и отрезок $\overrightarrow{AB}$ параллелен плоскости П, то отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$ также параллелен этой плоскости [1]). Другими словами, для лю-

---

[1]) Обратим внимание, что это верно только при обобщенном понимании термина «параллельны», — см. сноску на стр. 17.

бого вектора $a$ (в пространстве) либо все направленные отрезки, составляющие этот вектор, параллельны плоскости $\Pi$, либо ни один из них не параллелен этой плоскости. Когда имеет место первый случай, мы будем говорить, что вектор $a$ *параллелен* плоскости $\Pi$.

Очевидно, что

*вектор $a$ тогда и только тогда параллелен плоскости* $\Pi$, *когда, отложив его от произвольной точки плоскости* $\Pi$, *мы получим направленный отрезок, расположенный в этой плоскости.*

Это показывает, что

*множество всех векторов в пространстве, параллельных плоскости* $\Pi$, *совпадает с введенным выше подмножеством* $\mathrm{Vect}_{\Pi}(2)$ *множества* $\mathrm{Vect}(3)$.

Аналогично определяется понятие вектора (в плоскости или в пространстве), *параллельного данной прямой* $\alpha$. Множество всех таких векторов совпадает с множеством $\mathrm{Vect}_{\alpha}(1)$ (рассматриваемым как подмножество соответственно множеств $\mathrm{Vect}(2)$ или $\mathrm{Vect}(3)$).

Подмножества $\mathrm{Vect}_{\Pi}(2)$ и $\mathrm{Vect}_{\Pi'}(2)$ множества $\mathrm{Vect}(3)$, отвечающие двум различным плоскостям $\Pi$ и $\Pi'$, вообще говоря, различны (они совпадают тогда и только тогда, когда плоскости $\Pi$ и $\Pi'$ параллельны). Их пересечением (при непараллельных плоскостях $\Pi$ и $\Pi'$) является множество $\mathrm{Vect}_{\alpha}(1)$, где $\alpha$ — прямая пересечения плоскостей $\Pi$ и $\Pi'$.

Аналогично, подмножества $\mathrm{Vect}_{\alpha}(1)$ и $\mathrm{Vect}_{\alpha'}(1)$, отвечающие двум прямым $\alpha$ и $\alpha'$, тогда и только тогда совпадают, когда прямые $\alpha$ и $\alpha'$ параллельны. В противном случае эти подмножества пересекаются лишь по нулевому вектору $\mathbf{0}$.

## § 2. ВЕКТОРЫ НА ПРЯМОЙ

Нашей основной целью является исследование векторов на плоскости и в пространстве. Однако оказывается, что для этого необходимо изучить предварительно векторы на прямой. Этому изучению и будет посвящен настоящий параграф. Результаты этого изучения послужат нам также образцом для обобщения на случай плоскости и пространства.

Во всем этом параграфе мы будем считать фиксированной некоторую прямую $\alpha$ и все построения будем относить только к этой прямой. Когда нам придется рассматривать и другие прямые, это будет специально оговорено.

### 1. Ориентации прямой

На прямой $\alpha$ мы можем перемещаться в одном из двух противоположных направлений. Выбор одного из этих направлений мы будем называть *ориентацией* прямой, а прямую с заданной на ней ориентацией мы будем называть *ориентированной прямой* или *осью.*