бого вектора a (в пространстве) либо все направленные отрезки, составляющие этот вектор, параллельны плоскости П, либо ни один из них не параллелен этой плоскости. Когда имеет место первый случай, мы будем говорить, что вектор a *параллелен* плоскости П.

Очевидно, что

вектор a *тогда и только тогда параллелен плоскости* П, *когда, отложив его от произвольной точки плоскости* П, *мы получим направленный отрезок, расположенный в этой плоскости.*

Это показывает, что

множество всех векторов в пространстве, параллельных плоскости П, *совпадает с введенным выше подмножеством* $\mathrm{Vect}_{\Pi}(2)$ *множества* $\mathrm{Vect}(3)$.

Аналогично определяется понятие вектора (в плоскости или в пространстве), *параллельного данной прямой* α. Множество всех таких векторов совпадает с множеством $\mathrm{Vect}_{\alpha}(1)$ (рассматриваемым как подмножество соответственно множеств $\mathrm{Vect}(2)$ или $\mathrm{Vect}(3)$).

Подмножества $\mathrm{Vect}_{\Pi}(2)$ и $\mathrm{Vect}_{\Pi'}(2)$ множества $\mathrm{Vect}(3)$, отвечающие двум различным плоскостям П и П′, вообще говоря, различны (они совпадают тогда и только тогда, когда плоскости П и П′ параллельны). Их пересечением (при непараллельных плоскостях П и П′) является множество $\mathrm{Vect}_{\alpha}(1)$, где α — прямая пересечения плоскостей П и П′.

Аналогично, подмножества $\mathrm{Vect}_{\alpha}(1)$ и $\mathrm{Vect}_{\alpha'}(1)$, отвечающие двум прямым α и α', тогда и только тогда совпадают, когда прямые α и α' параллельны. В противном случае эти подмножества пересекаются лишь по нулевому вектору $\mathbf{0}$.

§ 2. ВЕКТОРЫ НА ПРЯМОЙ

Нашей основной целью является исследование векторов на плоскости и в пространстве. Однако оказывается, что для этого необходимо изучить предварительно векторы на прямой. Этому изучению и будет посвящен настоящий параграф. Результаты этого изучения послужат нам также образцом для обобщения на случай плоскости и пространства.

Во всем этом параграфе мы будем считать фиксированной некоторую прямую α и все построения будем относить только к этой прямой. Когда нам придется рассматривать и другие прямые, это будет специально оговорено.

1. Ориентации прямой

На прямой α мы можем перемещаться в одном из двух противоположных направлений. Выбор одного из этих направлений мы будем называть *ориентацией* прямой, а прямую с заданной на ней ориентацией мы будем называть *ориентированной прямой* или *осью.*

Здесь мы опять пользуемся наглядным, но не строгим (пока) понятием движения. Чтобы ввести понятие ориентации вполне строгим образом, нам понадобится общематематическое понятие «упорядоченного множества».

Пусть X — произвольное множество (с элементами A, B, C...). Заданное на X отношение (обозначаемое символом $\prec$) называется *отношением порядка*, когда оно обладает следующими свойствами:

1) если $A \prec B$, то $A \neq B$ (свойство антирефлексивности),

2) если $A \prec B$ и $B \prec C$, то $A \prec C$ (свойство транзитивности),

3) если $A \neq B$, то либо $A \prec B$, либо $B \prec A$ (свойство полноты).

Отношение порядка называется *отношением предшествования*, когда выполнено следующее дополнительное свойство:

4) если $A \prec B$, то существуют такие элементы C_1, C_2 и D, что

$$C_1 \prec A \prec D \prec B \prec C_2.$$

По любому отношению порядка $\prec$ мы можем построить новое отношение порядка $\prec'$ (называемое отношением, *противоположным* данному), считая, по определению, что

$$A \prec' B \text{ тогда и только тогда, когда } B \prec A.$$

Ясно, что если $\prec$ — отношение предшествования, то $\prec'$ — также отношение предшествования.

Мы принимаем в качестве аксиомы следующее утверждение.

У. *На любой прямой существуют два взаимно противоположных отношения предшествования.*

Наглядно, каждое из этих отношений определяется заданием на прямой некоторого направления движения. Именно, $A \prec B$ в одном из этих отношений, если точка B получается из точки A движением в данном направлении.

Теперь мы уже можем дать вполне строгое определение.

Определение 1. Каждое из предусмотренных аксиомой У отношений предшествования называется *ориентацией* прямой. Прямая с заданной на ней ориентацией называется *ориентированной прямой* или *осью.*

Другие понятия, относящиеся к взаимному расположению точек на прямой, могут быть определены через понятие ориентации. Например, точка C называется *лежащей между* точками A и B, если $A \prec C \prec B$ в той ориентации, в которой $A \prec B$. Множество точек, лежащих между точками A и B, пополненное самими этими точками, называется *отрезком* $\overline{AB}$ с концевыми точками A и B. Согласно свойству 4) отношений предшествования отрезок $\overline{AB}$ при $A \neq B$ содержит точки, отличные от точек A и B (*внутренние точки*), и, как можно легко показать, содержит даже бесконечно много таких точек. Поскольку существуют только две ориентации и эти ориентации противоположны, каждая точка, лежащая между точками A и B, лежит также между точками B и A, т. е. $\overline{AB} = \overline{BA}$, и т. д.

Определение 2. Невырожденные направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ прямой α называются *одноименными*, если $A \prec B$ в некоторой ориентации тогда и только тогда, когда $A_1 \prec B_1$ в той же ориентации. Ясно, что это определение корректно (не зависит от выбора ориентации).

Очевидно, что отношение одноименности рефлексивно и симметрично. Кроме того, из свойства 2) отношений порядка легко вытекает, что оно транзитивно. Таким образом,

отношение одноименности направленных отрезков прямой является отношением эквивалентности.

Ясно, что соответствующие классы эквивалентности находятся в естественном биективном соответствии с ориентациями прямой: класс, соответствующий данной ориентации, состоит из всех направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$, для которых $A \prec B$ в этой ориентации. Поэтому

ориентации на прямой можно отождествить с классами одноименных направленных отрезков.

Чтобы получить аналогичные результаты для векторов, необходимо предварительно доказать следующее

Предложение 1. *Эквиполлентные невырожденные направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ прямой α одноименны.*

Доказательство этого предложения сводится к проверке его справедливости во всех возможных случаях взаимного расположения точек A, B, A_1 и B_1. На наглядно геометрическом уровне эта проверка совершенно очевидна: достаточно сделать чертеж.

Чтобы привести его формальное доказательство, мы примем в качестве аксиом следующие свойства середины отрезка:

С1. *Для любых точек A и B середина C отрезка $\overline{AB}$ принадлежит этому отрезку и при $A \neq B$ является его внутренней точкой.*

Иными словами, если $A = B$, то $C = A = B$. Если же $A \neq B$, то $A \prec C \prec B$ в ориентации, в которой $A \prec B$.

С2. *Пусть точка C является серединой отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$. Тогда если $A \prec A_1 \prec C$, то $C \prec B_1 \prec B$.*

В аксиоме С2 имеется в виду любая из двух возможных ориентаций.

С3. *Для любых точек A и C существует одна и только одна точка B, обладающая тем свойством, что точка C является серединой отрезка $\overline{AB}$.*

Предложение 1 из этих аксиом выводится следующим образом.

Пусть C — общая середина отрезков $\overline{AB_1}$ и $\overline{A_1B}$.

Случай 1. $C \prec A$ (в ориентации, в которой $A \prec B$). В этом случае $C \prec A \prec B$ и потому к отрезкам $\overline{BA_1}$ и $\overline{AB_1}$ применима аксиома С2 (по отношению к противоположной ориентации). Следовательно, согласно этой аксиоме $A_1 \prec B_1 \prec C$. В частности, $A_1 \prec B_1$.

Случай 2. $C = A$. Тогда $A = B_1$ (и $C = B_1$), но $A_1 \neq B$ (ибо в противном случае оба отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ были бы вырождены). Кроме того, легко видеть, что $A_1 \prec B$ (в ориентации, в которой, $A \prec B$). Действительно, если $B \prec A_1$, то $B \prec C \prec A_1$ и потому, вопреки выбору рассматриваемой ориентации, $B \prec A (= C)$. Но если $A_1 \prec B$, то $A_1 \prec C \prec B$, т. е. $A_1 \prec B_1 \prec B$ и, в частности, $A_1 \prec B_1$.

Случай 3а. $A \prec C$ и $A_1 \prec A$. В этом случае аксиома C2 применима к отрезкам $\overline{A_1B}$, $\overline{AB_1}$ и потому $C \prec B \prec B_1$, т. е. $A_1 \prec A \prec C \prec B_1$. Следовательно, $A_1 \prec B_1$.

Случай 3б. $A \prec C$ и $A_1 = A$. В этом случае $B_1 = B$, и наше утверждение тривиально.

Случай 3в′. $A \prec C$, $A \prec A_1$ и $A_1 \prec C$. В этом случае аксиома C2 применима к отрезкам $\overline{AB_1}$, $\overline{A_1B}$ и потому $C \prec B \prec B_1$, т. е. $A_1 \prec C \prec B_1$, и снова $A_1 \prec B_1$.

Случай 3в″. $A \prec C$, $A \prec A_1$ и $A_1 = C$. Тогда $A_1 = B$, $C = B$ и $A \prec B_1$ (ср. случай 2). Поэтому $A \prec C \prec B_1$, т. е. $A_1 \prec B_1$.

Случай 3в‴. $A \prec C$, $A \prec A_1$ и $C \prec A_1$. Поскольку $C \prec A_1$, то обязательно $B \prec C$ (аксиома C1). Следовательно, $A \prec B \prec C$ и аксиома C2 применима к отрезкам $\overline{AB_1}$ и $\overline{BA_1}$. Поэтому $C \prec A_1 \prec B_1$ и, в частности, $A_1 \prec B_1$.

Теперь мы можем сформулировать наше основное

Определение 3. Отличные от нуля векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ прямой α называются *одноименными*, если одноименны направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$, т. е. если $A_1 \prec B_1$ в ориентации, в которой $A \prec B$.

Согласно предложению 1 это определение корректно.

Ясно, что, так же как и отношение одноименности направленных отрезков,

отношение одноименности отличных от нуля векторов прямой является отношением эквивалентности.

Отношение одноименности разбивает все множество отличных от нуля векторов прямой α на два класса, находящихся в естественном биективном соответствии с ориентациями этой прямой. Поэтому

ориентации прямой можно отождествить с классами одноименных отличных от нуля векторов этой прямой.

Определение 4. Каждый отличный от нуля вектор прямой α называется *базисом* на этой прямой (или, точнее, базисом соответствующего множества $\mathrm{Vect}_\alpha(1)$).

Таким образом, мы можем сказать, что

ориентациями прямой являются классы одноименных базисов на этой прямой.

Базис $\overrightarrow{AB}$ называется *положительно ориентированным* (по отношению к данной ориентации прямой α), если он определяет эту ориентацию, т. е. если $A \prec B$ в данной ориентации. В противном случае базис $\overrightarrow{AB}$ называется ***отрицательно ориентированным.***

2. Длина и величина вектора на прямой

Определение 1. *Длиной* $|\overrightarrow{AB}|$ направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ мы будем называть длину $|AB|$ соответствующего ненаправленного отрезка $\overline{AB}$. (Здесь мы не будем вдаваться в подробности строгого, аксиоматического, определения длины, поскольку это уведет нас далеко в сторону; напомним только, что при определении длины предполагается выбранным некоторый фиксированный отрезок — *эталон длины*, длина которого, по определению, равна единице.)

Нам будут нужны только следующие свойства длины, которые можно считать аксиомами:

Д1. *Если C — середина отрезка $\overline{AB}$, то $|AC| = |CB|$.*

Д2. *Если $A < C < B$, то $|AB| = |AC| + |CB|$.*

Величиной (или *алгебраическим значением*) направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ на ориентированной прямой α мы будем называть его длину, если этот отрезок ориентирован положительно, и его длину, взятую со знаком минус, если этот отрезок ориентирован отрицательно. Величину отрезка $\overrightarrow{AB}$ мы будем обозначать символом (AB). При $A = B$ (и только при $A = B$) величина (AB) равна нулю. Ясно, что

$$(AB) + (BA) = 0.$$

Замечание 1. Обратим внимание на то, что о длине направленного отрезка имеет смысл говорить и в случае отрезков не на данной прямой, а в плоскости или в пространстве, тогда как величина направленного отрезка определена лишь для направленных отрезков прямой и притом ориентированной.

Предложение 1. *Величины эквиполлентных направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадают.*

Доказательство. Ясно, что нам достаточно рассмотреть только случай, когда отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ невырождены. Но в этом случае совпадение знаков величин направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ непосредственно вытекает из предложения 1 п. 1. Поэтому нам нужно только доказать, что совпадают их длины. Пусть C — общая середина отрезков $\overline{AB_1}$ и $\overline{A_1B}$. Тогда $|AC| = |CB_1|$ и $|A_1C| = |CB|$. Ясно, что без ограничения общности мы можем предполагать, что $A < A_1$ в ориентации, в которой $A < B$ (при $A = A_1$ доказывать нечего, а при $A_1 < A$ достаточно поменять местами отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$, чтобы свести этот случай к случаю, когда $A < A_1$). Но при $A < A_1$ возможны лишь следующие два случая:

Случай 1. $A < A_1 < C < B < B_1$. В этом случае $|AB| = |AC| + |CB|$, и $|A_1B_1| = |A_1C| + |CB_1|$. Следовательно, $|AB| - |A_1B_1| = (|AC| - |CB_1|) + (|CB| - |A_1C|) = 0 + 0 = 0$, т. е. $|AB| = |A_1B_1|$.

Случай 2. $A \prec B \prec C \prec A_1 \prec B_1$. В этом случае $|AB| = |AC| + |CB|$ и $|A_1B_1| = |A_1C| + |CB_1|$. Следовательно, $|AB| - |A_1B_1| = (|AC| - |CB_1|) + (|CA_1| - |BC|) = 0$, т. е. снова $|AB| = |A_1B_1|$.

Определение 2. *Величиной* (соответственно, *длиной*) вектора $a = \{\overrightarrow{AB}\}$ называется величина (соответственно длина) направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$.

Согласно предложению 1 это определение корректно.

Величина вектора $\boldsymbol{a}$ обозначается символом $(\boldsymbol{a})$, а длина — символом $|\boldsymbol{a}|$.

Замечание 2. Легко видеть, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (на прямой α) тогда и только тогда равны, когда их величины совпадают:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow (\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b})$$

(т. е. когда эти векторы одноименны и имеют равные длины). Это показывает, что, сопоставив каждому вектору $\boldsymbol{a} \in \operatorname{Vect}(1)$ его величину $(\boldsymbol{a})$, мы получим биективное соответствие между множеством $\operatorname{Vect}(1)$ всех векторов на прямой и полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Однако было бы неосторожно воспользоваться этим соответствием и отождествить множества $\operatorname{Vect}(1)$ и $\mathbb{R}$, поскольку это соответствие свойством естественности не обладает (оно зависит и от ориентации прямой и от выбора эталона длины).

3. Отношение векторов на прямой

Пусть $\boldsymbol{e} = \overrightarrow{A_0B_0}$ — произвольный отличный от нуля вектор прямой α (базис). Приняв отрезок $\overrightarrow{A_0B_0}$ за эталон длины и выбрав ориентацию прямой α так, чтобы вектор $\boldsymbol{e}$ был положительно ориентирован, мы согласно сказанному выше для любого вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ можем говорить о его величине $(\boldsymbol{a})$ (в частности, $(\boldsymbol{e}) = 1$).

Определение 1. Величина $(\boldsymbol{a})$ вектора $\boldsymbol{a}$, получающаяся при указанном выборе эталона длины и ориентации, называется *отношением* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e}$ и обозначается символом $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{e}$ (или $\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{A_0B_0}$).

При произвольном эталоне длины число $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{e}$ равно, очевидно, отношению величин $(\boldsymbol{a})$ и $(\boldsymbol{e})$:

$$\boldsymbol{a} : \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{a}) : (\boldsymbol{e}).$$

При этом ясно, что эта формула сохраняет свою силу и тогда, когда мы сменим ориентацию прямой α на противоположную. Следовательно, отношение $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{a}) : (\boldsymbol{e})$ не зависит ни от выбора эталона длины, ни от выбора ориентации прямой α (хотя от этого зависят величины $(\boldsymbol{a})$ и $(\boldsymbol{e})$), т. е. определяется исключительно векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e}$.

Очевидно, что

а) *если* $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} : \boldsymbol{e}$, *то* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$;

б) *для любого вектора* $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$ *и любого числа* $a \in \mathbb{R}$ *существует такой вектор* $\boldsymbol{a}$, *что* $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{e} = a$.

Определение 2. Если $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{e} = a$, то мы будем говорить, что вектор $\boldsymbol{a}$ получен *умножением* вектора $\boldsymbol{e}$ на число a и будем этот вектор обозначать символом $a\boldsymbol{e}$.

Свойства а) и б) означают, что операция умножения (отличных от нуля) векторов на вещественные числа однозначно определена, т. е. для любого вектора $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$ и любого числа $a \in \mathbb{R}$ существует один и только один вектор $\boldsymbol{a}$, обладающий тем свойством, что $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}$.

Мы доопределим эту операцию при $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$, полагая, по определению,

$$a\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

для любого числа $a \in \mathbb{R}$.

Ясно, что

$$(a\boldsymbol{e}) = a(\boldsymbol{e}).$$

В частности,

$$|a\boldsymbol{e}| = |a| \cdot |\boldsymbol{e}|.$$

Заметим, что при $a > 0$ (и при $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$) векторы $\boldsymbol{e}$ и $a\boldsymbol{e}$ одноименны, а при $a < 0$ — разноименны.

Отметим, что для любого вектора $\boldsymbol{a}$

$$0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}, \quad 1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}.$$

Вектор $(-1)\boldsymbol{e}$ обозначается также символом $-\boldsymbol{e}$ и называется вектором, *противоположным* вектору $\boldsymbol{e}$. Очевидно, что если $\boldsymbol{e} = \overrightarrow{A_0B_0}$, то $-\boldsymbol{e} = \overrightarrow{B_0A_0}$.

Замечание 1. Определение вектора $-\boldsymbol{e}$ как вектора $\overrightarrow{B_0A_0}$ имеет смысл и для векторов на плоскости или в пространстве[1]), тогда как вектор $(-1)\boldsymbol{e}$ определен у нас пока лишь для векторов на прямой.

Определение 3. *Координатой* вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}$ называется отношение $\boldsymbol{a}:\boldsymbol{e}$. Другими словами, координата вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}$ — это такое число a, что $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}$, или, по-другому, координата вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}$ — это величина $(\boldsymbol{a})$ вектора $\boldsymbol{a}$ при условии, что ориентация и эталон длины на прямой выбраны так, что $(\boldsymbol{e}) = 1$.

Сопоставление вектору $\boldsymbol{a}$ его координаты $a = \boldsymbol{a}:\boldsymbol{e}$ определяет биективное соответствие между множеством $\mathrm{Vect}(1)$ векторов на прямой и полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Это соответствие зависит от вектора $\boldsymbol{e}$ и потому не является естественным.

---

[1]) Конечно, здесь следует проверить корректность, т. е. тот факт, что если направленные отрезки $\overrightarrow{A_0B_0}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ эквиполлентны, то направленные отрезки $\overrightarrow{B_0A_0}$ и $\overrightarrow{B_1A_1}$ также эквиполлентны; но это очевидно.

Оно по существу совпадает с соответствием, описанным в замечании 2 п. 2, поскольку задание вектора $e = \overrightarrow{A_0B_0}$ равносильно заданию эталона длины $\overline{A_0B_0}$ и ориентации прямой α (а именно, ориентации, в которой вектор $\overrightarrow{A_0B_0}$ положительно ориентирован).

Легко видеть, что

для любых трех векторов $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{c}$ имеет место равенство

$$\boldsymbol{c} : \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} : \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{b} : \boldsymbol{a}). \tag{1}$$

Действительно, по определению, $\boldsymbol{c} : \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c}) : (\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{c} : \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c}) : (\boldsymbol{b})$ и $\boldsymbol{b} : \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}) : (\boldsymbol{a})$. Поэтому

$$\boldsymbol{c} : \boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a})} = \frac{(\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{b})} \cdot \frac{(\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a})} = (\boldsymbol{c} : \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{b} : \boldsymbol{a}).$$

Пусть $\boldsymbol{c} : \boldsymbol{b} = k$ и $\boldsymbol{b} : \boldsymbol{a} = l$, т. е. пусть $\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b} = l\boldsymbol{a}$. Тогда по доказанному $\boldsymbol{c} : \boldsymbol{a} = kl$, т. е. $\boldsymbol{c} = (kl)\boldsymbol{a}$. В этой форме равенство (1) остается, очевидно, верным как при $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, так и при $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$. Таким образом,

для любого вектора $\boldsymbol{a}$ и любых чисел k и l имеет место равенство

$$(kl)\,\boldsymbol{a} = k\,(l\boldsymbol{a}) \tag{2}$$

Пусть, в частности, $\boldsymbol{a}$ есть базис $\boldsymbol{e}$. Обозначая вектор $\boldsymbol{b}$ (освободившимся теперь) символом $\boldsymbol{a}$ и замечая, что число l является не чем иным, как координатой a вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}$, а число kl — координатой вектора $\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a}$, мы получаем, таким образом, что

если в базисе $\boldsymbol{e}$ вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координату a, то для любого числа k вектор $k\boldsymbol{a}$ будет иметь координату ka.

Другими словами,

при умножении вектора на число его координата умножается на это же число.

Формулу (2) (или, скорее, формулу (1)) можно прочитать и по-иному, приняв за $\boldsymbol{b}$ некоторый базис $\boldsymbol{e}$, а за $\boldsymbol{a}$ — некоторый другой базис $\boldsymbol{e}'$. Обозначая вектор $\boldsymbol{c}$ символом $\boldsymbol{x}$, мы можем теперь переписать формулу (1) (переставив множители) в следующем виде:

$$\boldsymbol{x} : \boldsymbol{e}' = (\boldsymbol{e} : \boldsymbol{e}')(\boldsymbol{x} : \boldsymbol{e}).$$

Но число $\boldsymbol{x} : \boldsymbol{e}'$ является координатой x' вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}'$, а число $\boldsymbol{x} : \boldsymbol{e}$ — его координатой x в базисе $\boldsymbol{e}$. Таким образом,

при замене базиса $\boldsymbol{e}$ базисом $\boldsymbol{e}'$ координата x произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ заменяется координатой x', связанной с координатой x формулой

$$x' = cx,$$

где $c = e : e'$ — *координата «старого» базиса* e *в «новом» базисе* e'.

Обратим внимание на то, что все последние утверждения являются просто тривиальными переформулировками одного и того же геометрического факта.

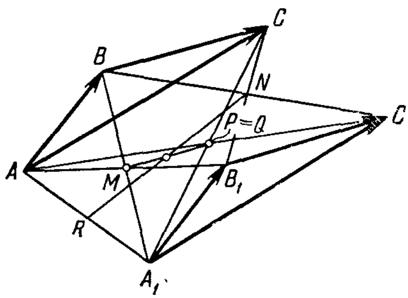
4. Сложение векторов на прямой. Лемма Шаля

Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{A'B'}$ — произвольные векторы. Отложив вектор $\boldsymbol{b}$ от точки B, т. е. построив направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$, эквиполлентный отрезку $\overrightarrow{A'B'}$, мы получим некоторую точку C.

Определение 1. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется *суммой* векторов $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$ и обозначается символом $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

Это определение нуждается конечно, в проверке корректности, т. е. в доказательстве того факта, что вектор $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ не зависит от имеющегося в этом определении произвола (состоящего в выборе точки A). Другими словами, нам нужно доказать следующее

Предложение 1. *Если направленный отрезок* $\overrightarrow{AB}$ *эквиполлентен направленному отрезку* $\overrightarrow{A_1B_1}$, *а направленный отрезок* $\overrightarrow{BC}$ *эквиполлентен направленному отрезку* $\overrightarrow{B_1C_1}$, *то направленный отрезок* $\overrightarrow{AC}$ *эквиполлентен направленному отрезку* $\overrightarrow{A_1C_1}$.



Доказательство. Пусть P и Q — середины отрезков $\overline{AC_1}$ и $\overline{A_1C}$. Мы должны показать, что $P = Q$. Для этого мы воспользуемся леммой из п. 3 § 1.

Пусть M — общая середина отрезков $\overline{AB_1}$ и $\overline{A_1B}$, а N — общая середина отрезков $\overline{BC_1}$ и $\overline{B_1C}$. Кроме того, пусть R — середина отрезка $\overline{AA_1}$. Применив указанную лемму к точкам A, B_1, C, A_1, мы немедленно получим, что середины отрезков $\overline{MQ}$ и $\overline{NR}$ совпадают. Аналогично, применив эту лемму к точкам A, C_1, B, A_1, мы получим, что совпадают середины отрезков $\overline{MP}$ и $\overline{NR}$. Следовательно, середины отрезков $\overline{MQ}$ и $\overline{MP}$ также совпадают. Имея общую середину и общую концевую точку, эти отрезки совпадают. Поэтому $P = Q$.

Замечание 1. Данное нами определение суммы векторов пригодно не только для векторов на прямой, но и для векторов в плоскости и в пространстве. То же самое справедливо, конечно, и по отношению к доказательству его корректности.

Покажем, что для суммы векторов (на прямой) имеет место следующее свойство дистрибутивности:

для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{e} \neq 0$ *справедливо равенство*

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) : \boldsymbol{e} = \boldsymbol{a} : \boldsymbol{e} + \boldsymbol{b} : \boldsymbol{e}. \qquad (1)$$

Другими словами,

координата суммы векторов (в произвольном базисе $\boldsymbol{e}$*) равна сумме координат слагаемых (в том же базисе).*

Ясно, что для доказательства этого соотношения достаточно доказать, что

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}),$$

т. е. что величина суммы двух векторов равна сумме величин слагаемых (конечно, в предположении, что прямая α ориентирована и на ней выбран эталон длины; заметим, что формула (1) в этом предположении не нуждалась).

Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$, так что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$. Тогда последнее равенство может быть переписано в следующем виде:

$$(AC) = (AB) + (BC). \qquad (2)$$

Таким образом, нам нужно показать, что

для любых трех точек A, B *и* C *прямой* α *имеет место равенство* (2).

В этой форме свойство дистрибутивности известно как **лемма Шаля**.

Если хотя бы две из точек A, B и C совпадают, то лемма Шаля очевидна (она сводится либо к тождеству $(AB) = (AB)$, либо к уже известному нам равенству $(AB) + (BA) = 0$). Пусть все точки A, B, C попарно различны. Ясно, что без ограничения общности мы можем предполагать, что $A < C$ (в заданной на прямой α ориентации), так как в противном случае достаточно сменить на α ориентацию, отчего обе стороны равенства (2) умножатся на -1.

Случай 1. $B < A < C$. В этом случае $(AC) = |AC| = |BC| - |BA|$, тогда как $(BC) = |BC|$ и $(AB) = -|BA|$. Следовательно, $(AC) = (AB) + (BC)$.

Случай 2. $A < B < C$. В этом случае, $(AC) = |AC| = |AB| + |BC|$, тогда как $(AB) = |AB|$ и $(BC) = |BC|$. Следовательно, $(AC) = (AB) + (BC)$.

Случай 3. $A < C < B$. В этом случае $(AC) = |AC| = |AB| - |CB|$, тогда как $(AB) = |AB|$ и $(BC) = -|CB|$. Следовательно, $(AC) = (AB) + (BC)$.

Тем самым лемма Шаля полностью доказана.

5. Алгебраические свойства линейных операций

Введенные операции над векторами (умножение на числа и сложение) называются *линейными*. Их основные алгебраические свойства перечислены в следующей теореме:

Теорема 1. Для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ *и любых вещественных чисел* k *и* l *имеют место равенства*

1. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,
2. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,
3. $\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$,
4. $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$,
5. $(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$,
6. $(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$,
7. $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$,
8. $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

Доказательство. 1. Отложим от произвольной точки A вектор $\boldsymbol{a}$, от его конца B — вектор $\boldsymbol{b}$, а от конца C вектора $\boldsymbol{b}$ — вектор $\boldsymbol{c}$. Пусть D — конец этого вектора. Согласно определению направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ определяет вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, направленный отрезок $\overrightarrow{BD}$ определяет вектор $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, а направленный отрезок $\overrightarrow{AD}$ определяет, с одной стороны, вектор $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$, а с другой стороны, — вектор $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. Следовательно, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

2. Отложим векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ от произвольной точки O. Пусть A и B — концы этих векторов. От точки A мы отложим вектор $\boldsymbol{b}$, а от точки B — вектор $\boldsymbol{a}$. Пусть C и D — концы этих векторов. По определению, направленные отрезки $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ определяют соответственно векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$. Таким образом, нам нужно только показать, что $C=D$. Но так как направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BD}$ эквиполлентны, то середины отрезков $\overline{OD}$ и $\overline{AB}$ совпадают. Аналогично, так как направленные отрезки $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{AC}$ эквиполлентны, то совпадают и середины отрезков $\overline{OC}$ и $\overline{AB}$. Следовательно, отрезки $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$ имеют общую концевую точку и общую середину. Поэтому эти отрезки совпадают и, в частности, $C=D$.

3. Очевидно.

4. Если $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$, то $-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BA}$ и поэтому $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\overrightarrow{AA}=0$.

5. При $\boldsymbol{a}=0$ это свойство очевидно. Пусть $\boldsymbol{a}\neq 0$. Тогда, по определению,

$$(k+l)\boldsymbol{a}:\boldsymbol{a}=k+l$$

и

$$k\boldsymbol{a}:\boldsymbol{a}=k, \quad l\boldsymbol{a}:\boldsymbol{a}=l,$$

так что

$$(k+l)\boldsymbol{a}:\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}:\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}:\boldsymbol{a}.$$

С другой стороны, согласно лемме Шаля (или, точнее, равенству (1) п. 4)

$$(k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}):\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}:\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}:\boldsymbol{a}.$$

Следовательно,

$$(k+l)\boldsymbol{a} : \boldsymbol{a} = (k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}) : \boldsymbol{a}$$

и потому

$$(k+l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}.$$

6. Это уже известно (см. п. 3).

7. Пусть $\boldsymbol{e}$ — произвольный базис. Тогда $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{b} = b\boldsymbol{e}$, где a и b — координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в базисе $\boldsymbol{e}$. Следовательно, в силу уже доказанных свойств

$$k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k(a\boldsymbol{e} + b\boldsymbol{e}) = k(a+b)\boldsymbol{e} = (ka + kb)\boldsymbol{e} =$$
$$= (ka)\boldsymbol{e} + (kb)\boldsymbol{e} = k(a\boldsymbol{e}) + k(b\boldsymbol{e}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}.$$

8. Очевидно.

Доказанная теорема означает, что к векторам применимы обычные вычислительные приемы арифметики: раскрытие скобок, перенесение слагаемого из одной части равенства в другую (с изменением знака), умножение обеих частей равенства на одно и то же (отличное от нуля) число и т. п.

Чтобы облегчить ссылки, мы будем называть перечисленные в теореме 1 восемь свойств линейных операций над векторами их *стандартными свойствами*.

Множества, в которых определены операции сложения и умножения на вещественные числа, обладающие стандартными свойствами 1—8, часто встречаются в математике. Они называются *линейными пространствами* или, короче, *линеалами*.

В этой терминологии доказанная теорема утверждает, что *множество* Vect(1) *всех векторов на прямой является линеалом.*

Задание. Докажите, что в любом линеале для любых $\boldsymbol{a}$ и k имеют место равенства $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, $k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.

Упражнение. Докажите, что свойство 2 линейных операций вытекает из остальных семи стандартных свойств.

6. Теорема об изоморфизме

Предполагая, что на прямой α выбран базис $\boldsymbol{e}$, вернемся к биективному соответствию между множеством Vect(1) всех векторов на прямой α и полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, получающемуся при сопоставлении каждому вектору $\boldsymbol{a} \in \text{Vect}(1)$ его координаты $a = \boldsymbol{a} : \boldsymbol{e}$ в базисе $\boldsymbol{e}$ (см. п. 3). Согласно результатам пп. 3 и 4 при умножении вектора на число его координата умножается на то же число, а при сложении векторов их координаты складываются. Чтобы описать эту ситуацию в общих терминах, удобно ввести понятие «изоморфизма».

Понятие изоморфизма является одним из важнейших общематематических понятий. Грубо говоря, два множества, наделенные некоторым математическим строением, называются *изоморфными*, если между ними можно установить биективное соответствие, сохраняющее это строение (*изоморфизм*). Чтобы придать этому определению точный смысл, необходимо, конечно, предварительно определить, что такое «математическое строение» и что понимается под отображением, «сохраняющим строение». Мы не будем этого делать, поскольку у нас сейчас нет ни места, ни времени, чтобы этим заниматься. Вместо этого мы предпочтем в каждой конкретной ситуации каждый раз заново определять соответствующее понятие изоморфизма.

Например, два множества X и Y, для которых определены операции сложения элементов и умножения элементов на вещественные числа, мы будем называть *изоморфными*, если существует такое биективное отображение $\varphi\colon X \to Y$ множества X на множество Y (*изоморфизм*), что

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

и

$$\varphi(kx) = k\varphi(x)$$

для любых элементов x_1, x_2 множества X и любого вещественного числа k.

К множествам, для которых определены операция сложения элементов и операция их умножения на вещественные числа, принадлежат, в частности, множество векторов Vect(1) и поле вещественных чисел $\mathbb{R}$. Поэтому высказывание об их изоморфности или неизоморфности имеет смысл. С другой стороны, если мы обозначим координату вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}$ символом $\varphi(\boldsymbol{x})$, то тот факт, что координата суммы векторов является суммой координат слагаемых, запишется в виде формулы

$$\varphi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \varphi(\boldsymbol{x}_1) + \varphi(\boldsymbol{x}_2),$$

а тот факт, что при умножении вектора на число его координата умножается на то же число, запишется в виде формулы

$$\varphi(k\boldsymbol{x}) = k\varphi(\boldsymbol{x}).$$

Эти формулы означают, что биективное отображение φ является изоморфизмом. Тем самым нами доказана следующая теорема об изоморфизме:

Теорема 1. *Множество* Vect(1) *векторов на прямой изоморфно полю* $\mathbb{R}$ *вещественных чисел (по отношению к операциям сложения и умножения на вещественные числа). Соответствующий изоморфизм определяется выбором некоторого базиса* $\boldsymbol{e}$ *(и зависит от этого выбора).*

Изоморфизм Vect(1) $\to \mathbb{R}$, определенный базисом $\boldsymbol{e}$, мы будем называть *координатным изоморфизмом*.

Значение понятия изоморфизма состоит в том, что *все свойства изоморфных множеств одинаковы* (конечно, имеются в виду лишь свойства, относящиеся к рассматриваемому математическому строению, например, к операциям сложения и умножения на вещественные числа). Таким образом, если некоторые свойства уже доказаны для одного из изоморфных множеств, то мы можем быть уверены, что они выполнены и для другого.

В частности, все свойства 1—8, перечисленные в теореме 1 п. 5 («стандартные свойства»), как известно, выполнены для вещественных чисел. Поэтому они выполнены и для операций над векторами. Таким образом, теорема 1 п. 5 является непосредственным следствием теоремы о изоморфизме. Мы все же предпочли дать ей прямое доказательство, чтобы четче выяснить геометрическую суть дела (впрочем, при доказательстве свойства 7 мы на самом деле воспользовались координатным изоморфизмом).

Подчеркнем, что хотя изоморфные множества и обладают одинаковыми свойствами, отождествлять их целесообразно только тогда, когда между ними существует единственный (естественный) изоморфизм. В частности, как мы уже неоднократно подчеркивали, отождествление векторов на прямой с вещественными числами неправомерно.

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

В этом параграфе мы определяем и изучаем линейные операции (сложение и умножение на числа) для векторов на плоскости или в пространстве.

1. Определение линейных операций

Операция сложения векторов на плоскости и в пространстве у нас фактически уже определена, поскольку все сказанное в п. 4 § 2 пригодно без всяких изменений и для векторов на плоскости и в пространстве. Таким образом, *суммой* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ двух векторов $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$ называется вектор $\overrightarrow{AC}$, и это определение корректно. В случае, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не параллельны одной прямой, направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ представляет собой диагональ некоторого параллелограмма. Поэтому описанное правило сложения векторов называется часто «правилом параллелограмма».

С операцией умножения на число дело обстоит сложнее.

Пусть $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ — произвольный вектор (на плоскости или в пространстве), а k — произвольное вещественное число. При $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ мы, по определению, положим

$$k\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}.$$

Пусть теперь $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$. Тогда определена прямая $\alpha=AB$ (ибо $A\neq B$), и вектор $\boldsymbol{a}$ мы можем рассматривать как вектор этой прямой ($\boldsymbol{a}\in\operatorname{Vect}_\alpha(1)$). Поэтому согласно сказанному в пре-