на вещественные числа). Таким образом, если некоторые свойства уже доказаны для одного из изоморфных множеств, то мы можем быть уверены, что они выполнены и для другого.

В частности, все свойства 1—8, перечисленные в теореме 1 п. 5 («стандартные свойства»), как известно, выполнены для вещественных чисел. Поэтому они выполнены и для операций над векторами. Таким образом, теорема 1 п. 5 является непосредственным следствием теоремы о изоморфизме. Мы все же предпочли дать ей прямое доказательство, чтобы четче выяснить геометрическую суть дела (впрочем, при доказательстве свойства 7 мы на самом деле воспользовались координатным изоморфизмом).

Подчеркнем, что хотя изоморфные множества и обладают одинаковыми свойствами, отождествлять их целесообразно только тогда, когда между ними существует единственный (естественный) изоморфизм. В частности, как мы уже неоднократно подчеркивали, отождествление векторов на прямой с вещественными числами неправомерно.

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

В этом параграфе мы определяем и изучаем линейные операции (сложение и умножение на числа) для векторов на плоскости или в пространстве.

1. Определение линейных операций

Операция сложения векторов на плоскости и в пространстве у нас фактически уже определена, поскольку все сказанное в п. 4 § 2 пригодно без всяких изменений и для векторов на плоскости и в пространстве. Таким образом, *суммой* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ двух векторов $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$ называется вектор $\overrightarrow{AC}$, и это определение корректно. В случае, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не параллельны одной прямой, направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ представляет собой диагональ некоторого параллелограмма. Поэтому описанное правило сложения векторов называется часто «правилом параллелограмма».

С операцией умножения на число дело обстоит сложнее.

Пусть $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ — произвольный вектор (на плоскости или в пространстве), а k — произвольное вещественное число. При $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ мы, по определению, положим

$$k\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}.$$

Пусть теперь $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$. Тогда определена прямая $\alpha=AB$ (ибо $A\neq B$), и вектор $\boldsymbol{a}$ мы можем рассматривать как вектор этой прямой ($\boldsymbol{a}\in \mathrm{Vect}_\alpha(1)$). Поэтому согласно сказанному в предыдущем пункте определен вектор $k\boldsymbol{a} \in \mathrm{Vect}_\alpha(1)$. Этот вектор, рассматриваемый как вектор на плоскости (или, соответственно, в пространстве), мы и примем за произведение $k\boldsymbol{a}$ вектора $\boldsymbol{a}$ на число k.

Другими словами, мы принимаем следующее

Определение 1. *Произведением* $k\boldsymbol{a}$ вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, на число k называется вектор $\overrightarrow{CD}$, удовлетворяющий следующим двум условиям:

а) точки C и D принадлежат прямой $\alpha = AB$;

б) отношение $\overrightarrow{CD} : \overrightarrow{AB}$ (оно определено, поскольку направленные отрезки $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB}$ принадлежат одной прямой и $\overrightarrow{AB} \neq 0$) равно k:

$$\overrightarrow{CD} : \overrightarrow{AB} = k.$$

Это определение нуждается, конечно (при $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$), в проверке корректности, т. е. в доказательстве независимости вектора $k\boldsymbol{a}$ от выбора направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$. Поскольку при $k = 0$ это очевидно, нам следует при этом рассмотреть лишь случай, когда $k \neq 0$ (и $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$). Другими словами, нужно доказать следующее

Предложение 1. *Пусть* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{A_1B_1}$ *— эквиполлентные невырожденные направленные отрезки и пусть* $\overrightarrow{CD}$ *и* $\overrightarrow{C_1D_1}$ *— такие невырожденные направленные отрезки, что*

1) *отрезок* $\overrightarrow{CD}$ *расположен на той же прямой, что и отрезок* $\overrightarrow{AB}$ (*т. е. прямые* AB *и* CD *совпадают*; *эти прямые определены, поскольку* $A \neq B$ *и* $C \neq D$), *а отрезок* $\overrightarrow{C_1D_1}$ *расположен на той же прямой, что и отрезок* $\overrightarrow{A_1B_1}$;

2) *имеет место числовое равенство*

$$\overrightarrow{C_1D_1} : \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{CD} : \overrightarrow{AB}.$$

Тогда отрезки $\overrightarrow{CD}$ *и* $\overrightarrow{C_1D_1}$ *эквиполлентны.*

Доказательство. Пусть α — прямая AB и α_1 — прямая A_1B_1. Поскольку отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ эквиполлентны, прямые α и α_1 параллельны. Если они совпадают, то наше предложение сводится к уже известному нам утверждению о корректности умножения на число векторов данной прямой. Поэтому мы можем предполагать, что $\alpha \neq \alpha_1$ (и, в частности, $A \neq A_1$). Кроме того, мы без ограничения общности можем считать, что $A = C$ и $A_1 = C_1$.

Поскольку направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ эквиполлентны (и расположены на различных прямых), четырехугольник

ABA_1B_1 является параллелограммом. Следовательно, прямые AA_1 и BB_1 параллельны. Нам надо доказать, что направленные отрезки $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{A_1D_1}$ эквиполлентны, т. е. что четырехугольник ADA_1D_1 также является параллелограммом. Ясно, что для этого достаточно доказать, что прямая DD_1 параллельна прямой AA_1.

Рассмотрим с этой целью *проектирование* θ прямой α на прямую α_1 параллельно прямой $\beta = AA_1$. По определению, это проектирование переводит произвольную точку M прямой α в точку M', по которой прямая α_1 пересекается с прямой, параллельной прямой β и проходящей через точку M. В частности, $\theta(A) = A_1$ и $\theta(B) = B_1$.

Заметим, что проектирование θ определено и для непараллельных прямых α и α_1 (нужно лишь, чтобы прямая β не была параллельна ни прямой α, ни прямой α_1).

Мы будем пользоваться следующими известными свойствами параллельного проектирования (справедливыми и для непараллельных прямых α и α_1):

П1. *Если точка M лежит на прямой α между точками P и Q, то точка $M' = \theta(M)$ лежит на прямой α_1 между точками $P' = \theta(P)$ и $Q' = \theta(Q)$.*

П2. *Для любых четырех точек P, Q, M и $N \neq M$ прямой α имеет место равенство*

$$|P'Q'| : |M'N'| = |PQ| : |MN|.$$

Из свойств П1 и П2 немедленно вытекает, что

при параллельном проектировании отношение направленных отрезков инвариантно, т. е. для любых четырех точек P, Q, M и $N \neq M$ прямой α имеет место равенство

$$\overrightarrow{P'Q'} : \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{MN},$$

где $P' = \theta(P)$, $Q' = \theta(Q)$, $M' = \theta(M)$, $N' = \theta(N)$.

Действительно, свойство П2 обеспечивает сохранение абсолютной величины отношения, а из свойства П1 следует, что его знак также остается прежним.

Вернемся теперь к доказательству предложения 1. Пусть $D' = \theta(D)$. По только что сказанному

$$\overrightarrow{A_1D'} : \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AD} : \overrightarrow{AB}.$$

Но по условию

$$\overrightarrow{A_1D_1} : \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AD} : \overrightarrow{AB}$$

(напомним, что $A = C$ и $A_1 = C_1$). Следовательно, $\overrightarrow{A_1D'} : \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1D_1} : \overrightarrow{A_1B_1}$ и потому $\overrightarrow{A_1D'} = \overrightarrow{A_1D_1}$.

Таким образом, $D' = D_1$ и, следовательно, прямая DD_1 параллельна прямой $\beta = AA_1$.

Тем самым корректность определения вектора $\boldsymbol{ka}$ полностью доказана.

2. Алгебраические свойства линейных операций

Теорема 1. *Теорема* 1 п. 5 § 2 *справедлива и для векторов на плоскости или в пространстве, т. е. перечисленные в этой теореме восемь стандартных свойств сложения и умножения на число имеют место и для векторов на плоскости или в пространстве.*

Доказательство. Изложенные в п. 5 § 2 доказательства свойств 1—4 сохраняются без каких-либо изменений. С другой стороны, все фигурирующие в свойствах 5—6 (а также в тривиальном свойстве 8) векторы параллельны одной и той же прямой, и потому, если эти свойства верны для векторов на прямой, то они верны и для векторов на плоскости или в пространстве. Таким образом, в доказательстве нуждается лишь свойство 7 (и только для случая, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не параллельны одной прямой, а $k \neq 0$).

Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$ и, следовательно, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$. Далее, пусть $k\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB_1}$ (ясно, что без ограничения общности мы можем считать векторы $\boldsymbol{a}$ и $k\boldsymbol{a}$ отложенными от одной точки), $k\boldsymbol{b} = \overrightarrow{B_1C_1}$ и $k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \overrightarrow{AC'}$. Нам нужно доказать, что $C_1 = C'$.

Рассмотрим с этой целью проектирование θ прямой $\alpha = AB$ на прямую $\alpha_1 = AC$ параллельно прямой $\beta = BC$ (поскольку векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ мы предполагаем не параллельными одной прямой, прямые α, α_1 и β определены и прямая β не параллельна прямым α и α_1). При этом проектировании точка A переходит сама в себя, а точка B переходит в точку C. Далее, тругольники ABC и AB_1C_1 подобны (их углы при вершинах B и B_1 одинаковы и они имеют по паре пропорциональных сторон), и потому их углы при вершине A равны. Поскольку прямая AB совпадает с прямой AB_1, этим доказано, что последние углы либо совпадают, либо являются вертикальными углами. В обоих случаях точка C_1 принадлежит прямой AC. Поскольку, по построению, прямая B_1C_1 параллельна прямой β, это означает, что $\theta(B_1) = C_1$.

Поэтому, согласно сказанному в предыдущем пункте,

$$\overrightarrow{AC_1} : \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB_1} : \overrightarrow{AB} = k.$$

Но, по определению,

$$\overrightarrow{AC'} : \overrightarrow{AC} = k.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC'},$$

т. е. $C' = C_1$.

Тем самым наша теорема полностью доказана.

В терминологии, введенной в конце п. 5 § 2, теорема 1 означает, что

множества Vect(2) *и* Vect(3) *векторов на плоскости и в пространстве являются линеалами.*

Замечание 1. Обратим внимание на тот важный факт, что описанные в п. 4 § 1 *вложения* $\mathrm{Vect}_\alpha(1) \subset \mathrm{Vect}_\Pi(2) \subset \mathrm{Vect}(3)$ *согласованы с линейными операциями*, т. е. результат применения линейных операций, скажем, к векторам из $\mathrm{Vect}_\Pi(2)$ не зависит от того, рассматриваются ли эти векторы как векторы на плоскости или как векторы в пространстве. Для сложения этот факт вытекает из того, что оно определяется единым образом как для векторов на прямой, так и для векторов на плоскости или в пространстве, а для умножения на число — из того, что, по определению, оно сводится к умножению на число векторов на прямой.

Иначе этот факт можно выразить, сказав, что подмножества $\mathrm{Vect}_\alpha(1)$ и $\mathrm{Vect}_\Pi(2)$ множества Vect(3) (а также подмножества $\mathrm{Vect}_\alpha(1)$ множества Vect(2)) *замкнуты* относительно линейных операций, действующих в множестве Vect(3) (соответствено, в множестве Vect(2)), т. е.

если векторы $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *из* Vect(3) (*из* Vect(2)) *принадлежат, скажем, подмножеству* $\mathrm{Vect}_\alpha(1)$ *то их сумма* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ *и произведение* $k\boldsymbol{a}$ *вектора* $\boldsymbol{a}$ *на произвольное число* k *также принадлежат подмножеству* $\mathrm{Vect}_\alpha(1)$.

Еще иначе, мы можем сказать, что

естественное биективное отображение, скажем, множества $\mathrm{Vect}_\Pi(2)$ *в множество* Vect(3) *является изоморфизмом* (*по отношению к линейным операциям*) *множества* $\mathrm{Vect}_\Pi(2)$ *на подмножество множества* Vect(3), *состоящее из векторов, параллельных плоскости* П.

3. Линейная зависимость

Определение 1. Семейство $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N\}$ векторов (произвольного линеала) называется *линейно зависимым*, если существуют такие числа $k_1, \ldots, k_N$, не все равные нулю, что

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + k_N\boldsymbol{a}_N = \boldsymbol{0}.$$

Допуская определенную вольность речи, часто в этой ситуации говорят, что линейно зависимы векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$. (Вольность здесь состоит в том, что на самом деле линейно зависимы не векторы, а линейно зависимо их семейство, рассматриваемое как единый математический объект.)

Выражение $k_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + k_N\boldsymbol{a}_N$ называется *линейной комбинацией* векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ *с коэффициентами* $k_1, \ldots, k_N$. Если $k_1 = \ldots = k_N = 0$, то линейная комбинация называется *тривиальной*, в противном случае — *нетривиальной*. Таким образом, векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ линейно зависимы, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю.

Если вектор $\boldsymbol{a}$ равен некоторой линейной комбинации векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$, то говорят, что он *линейно выражается* через эти векторы, а также что он *линейно зависит* от этих векторов. В частности, нулевой вектор $\boldsymbol{0}$ линейно выражается через любое семейство векторов, поскольку он равен тривиальной линейной комбинации этих векторов.

Очевидно, что

если вектор $\boldsymbol{a}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$, а каждый из этих векторов линейно выражается через векторы $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_M$, то вектор $\boldsymbol{a}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_M$.

Несмотря на свою тривиальность, это свойство отношения «линейно выражается» играет очень важную роль. Оно называется свойством транзитивности.

Во избежание излишних оговорок, удобно ввести в рассмотрение также пустое семейство векторов. По определению, от пустого семейства векторов линейно зависит только нулевой вектор. *Пустое семейство линейно независимо.* Действительно, семейство векторов $\{\boldsymbol{a}_i\}$ линейно независимо, если при $\sum_i k_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$ не существует такого индекса i, что $k_i \neq 0$. Ясно, что эта формулировка сохраняет смысл (и верна) и тогда, когда множество индексов i пусто.

Легко видеть, что

любое семейство $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N\}$, содержащее линейно зависимое подсемейство $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_n}\}$, само линейно зависимо.

Действительно, по условию, существует равная нулю линейная комбинация векторов подсемейства, не все коэффициенты которой равны нулю. Добавив к этой линейной комбинации остальные векторы семейства с нулевыми коэффициентами, мы, очевидно, и получим равную нулю нетривиальную линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$.

С другой стороны, ясно, что

семейство, состоящее из одного вектора $\boldsymbol{a}$, тогда и только тогда линейно зависимо, когда этот вектор равен нулю.

Следовательно, в частности,

любое семейство, содержащее нулевой вектор, линейно зависимо.

Далее, легко видеть, что

векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ *тогда и только тогда линейно зависимы, когда один из них линейно выражается через остальные.*

Действительно, если $k_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + k_N\boldsymbol{a}_N = \mathbf{0}$ и, скажем, $k_1 \neq 0$, то $\boldsymbol{a}_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \left(-\frac{k_N}{k_1}\right)\boldsymbol{a}_N$. Обратно, если $\boldsymbol{a}_1 = l_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + l_N\boldsymbol{a}_N$, то $(-1)\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + l_N\boldsymbol{a}_N = \mathbf{0}$, причем $-1 \neq 0$.

Важным уточнением последнего утверждения является следующее

Предложение 1. *Векторы* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ *тогда и только тогда линейно зависимы, когда один из них линейно выражается через векторы с меньшими номерами.*

Доказательство. Если $\boldsymbol{a}_1 = \mathbf{0}$, то этот вектор линейно выражается через пустое множество векторов с меньшими номерами. Поэтому в этом случае предложение справедливо.

Пусть $\boldsymbol{a}_1 \neq \mathbf{0}$. Если векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ линейно зависимы (и $\boldsymbol{a}_1 \neq \mathbf{0}$), то существует такое число $n > 1$, что векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ линейно зависимы, а векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ уже линейно независимы. Пусть $k_1, \ldots, k_n$ — такие числа, не все равные нулю, что

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + k_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}.$$

Поскольку векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ линейно независимы, число k_n должно быть отлично от нуля. Следовательно,

$$\boldsymbol{a}_n = \left(-\frac{k_1}{k_n}\right)\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \left(-\frac{k_{n-1}}{k_n}\right)\boldsymbol{a}_{n-1},$$

так что вектор $\boldsymbol{a}_n$ действительно является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ с меньшими номерами.

Обратное утверждение очевидно.

Следствие. *Векторы* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ *тогда и только тогда линейно зависимы, когда либо линейно зависимы векторы* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{N-1}$, *либо вектор* $\boldsymbol{a}_N$ *линейно выражается через векторы* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{N-1}$.

Предложение 2. *Векторы* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ *тогда и только тогда линейно независимы, когда любой вектор* $\boldsymbol{a}$, *линейно выражающийся через эти векторы, выражается через них единственным образом.*

Доказательство. Если векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ линейно зависимы, то, скажем, нулевой вектор двумя разными способами линейно выражается через эти векторы: в виде тривиальной и нетривиальной линейных комбинаций.

Обратно, если для некоторого вектора $\boldsymbol{a}$ имеют место равенства

$$\boldsymbol{a} = k_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + k_N\boldsymbol{a}_N,$$
$$\boldsymbol{a} = l_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + l_N\boldsymbol{a}_N,$$

где хотя бы для одного индекса i коэффициент k_i отличен от коэффициента l_i, то

$$(k_1 - l_1)\boldsymbol{a}_1 + \ldots + (k_N - l_N)\boldsymbol{a}_N = \boldsymbol{0}$$

и, следовательно, векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ линейно зависимы.

Докажем в заключение следующую трудную, но важную теорему о зависимости:

Теорема 1. *Пусть каждый вектор семейства*

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N \tag{1}$$

линейно выражается через векторы

$$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_M. \tag{2}$$

Тогда, если $N > M$, то векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ линейно зависимы.

Доказательство. Прежде чем доказывать эту теорему, мы докажем следующую вспомогательную лемму:

Лемма. *Если условия теоремы* 1 *выполнены и семейство* (1) *линейно независимо, то для любого $s = 0, \ldots, M$ существует семейство векторов*

$$\boldsymbol{c}_1^{(s)}, \ldots, \boldsymbol{c}_M^{(s)}, \tag{3}$$

обладающее следующими свойствами:

а) *каждый вектор семейства* (1) *линейно выражается через векторы* (3);

б) *первые s векторов семейства* (3) *совпадают с первыми s векторами семейства* (1):

$$\boldsymbol{c}_1^{(s)} = \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_s^{(s)} = \boldsymbol{a}_s.$$

Мы докажем эту лемму индукцией по числу s. При $s = 0$ она очевидна (за семейство (3) можно принять семейство (2)). Пусть она уже доказана для числа s. Рассмотрим семейство

$$\boldsymbol{a}_{s+1}, \boldsymbol{c}_1^{(s)}, \ldots, \boldsymbol{c}_M^{(s)}. \tag{4}$$

Это семейство линейно зависимо, ибо вектор $\boldsymbol{a}_{s+1}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{c}_1^{(s)}, \ldots, \boldsymbol{c}_M^{(s)}$. Поэтому согласно предложению 1 один из векторов семейства (4) линейно выражается через предыдущие. Этим вектором не может быть вектор $\boldsymbol{a}_{s+1}$, ибо он по условию отличен от нуля (семейство (1) линейно независимо). Им не может быть и ни один из векторов $\boldsymbol{c}_1^{(s)}, \ldots, \boldsymbol{c}_s^{(s)}$, ибо это снова противоречит линейной независимости векторов (1) (см. условие б)). Следовательно, некоторый вектор $c_i^{(s)}$, $i > s$, линейно выражается через векторы a_{s+1}, $c_1^{(s)}$, ..., $c_{i-1}^{(s)}$. Удалим теперь из семейства (4) вектор $c_i^{(s)}$. Полученное семейство обладает, очевидно, тем свойством, что через него линейно выражается любой вектор семейства (3), а следовательно, в силу свойства транзитивности, и любой вектор семейства (1). Другими словами, полученное семейство (состоящее из M векторов) обладает свойством а). Кроме того, оно содержит первые $s+1$ векторов семейства (1) (ибо $i > s$), т. е. по отношению к числу $s+1$ оно обладает и свойством б) (после, конечно, соответствующей перестановки его членов). Тем самым по индукции лемма полностью доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Предположим, что эта теорема неверна, т. е. что семейство (1) линейно независимо. Тогда к этому семейству будет применима доказанная лемма. Но при $s = M$ эта лемма дает, что каждый вектор семейства (1) и, в частности, вектор a_N линейно выражается через векторы a_1, ..., a_M. Поскольку $N > M$, это означает, что система (1) линейно зависима. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 1. Во всем этом пункте мы пользовались лишь восемью стандартными свойствами линейных операций. Поэтому все полученные здесь результаты справедливы для элементов любого линеала.

4. Геометрический смысл линейной зависимости

Определение 1. Векторы на плоскости или в пространстве называются *коллинеарными*, если они параллельны (см. п. 4 § 1) одной и той же прямой. Все векторы на прямой коллинеарны по определению.

Предложение 1. *Два вектора* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ (*на прямой, на плоскости или в пространстве*) *тогда и только тогда коллианеарны, когда они линейно зависимы.*

Доказательство. В случае векторов на прямой для любых векторов $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{b}$ определено их отношение $\boldsymbol{b} : \boldsymbol{a} = k$. Поэтому $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ и, следовательно, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно зависимы. Если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно зависимы по общим соображениям. Таким образом, любые два вектора на прямой линейно зависимы. С другой стороны, любые два вектора на прямой, по определению, коллинеарны. Таким образом, для векторов на прямой наше предложение справедливо.

Рассмотрим теперь случай плоскости или пространства. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны некоторой прямой, то, как мы знаем, их можно отождествить с векторами на этой прямой. Следовательно, по доказанному, эти векторы линейно зависимы (на прямой, а потому и на плоскости или, соответственно, в пространстве). Обратно, если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно зависимы, то один из них (скажем, вектор $\boldsymbol{b}$) выражается через другой вектор (вектор $\boldsymbol{a}$), т. е. существует такое число k, что $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$. Пусть α — такая прямая, что $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Vect}_\alpha(1)$. Тогда, по определению, $k\boldsymbol{a} \in \mathrm{Vect}_\alpha(1)$, т. е. $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Vect}_\alpha(1)$. Таким образом, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны одной и той же прямой α.

Согласно общим результатам п. 3 доказанное предложение может быть сформулировано также в следующем виде:

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ тогда и только тогда коллинеарны, когда существует такое число k, что либо $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$, либо $\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$.

В частности, мы видим, что на прямой отношение линейной зависимости «вырождается», в том смысле, что любое семейство векторов на прямой, состоящее более чем из одного вектора, линейно зависимо. Вместе с тем, на прямой существуют линейно независимые семейства, состоящие из одного вектора (таковыми являются семейства, состоящие из одного отличного от нуля вектора).

Посмотрим теперь, как обстоит дело на плоскости. Во-первых, ясно, что

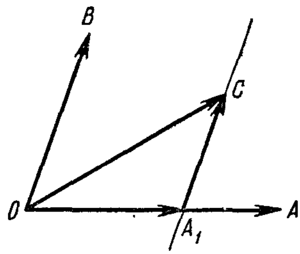
на плоскости существуют линейно независимые семейства, состоящие из двух векторов.

Действительно, чтобы построить такое семейство, достаточно взять три точки O, A и B, не лежащие на одной прямой, и рассмотреть векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$. По построению эти векторы не коллинеарны. Следовательно, они линейно независимы.

С другой стороны, легко видеть, что

любое семейство векторов на плоскости, состоящее более чем из двух векторов, линейно зависимо.

Согласно результатам п. 3 это утверждение достаточно доказать для семейства, состоящего из трех векторов. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — произвольные векторы на плоскости. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то они линейно зависимы и потому линейно зависимы и векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Следовательно, без ограничения общности мы можем предполагать, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны (и, по аналогичным соображениям, что не коллинеарны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$, а также векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$).



Пусть O — произвольная точка рассматриваемой плоскости и пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$. Так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то точки O, A и B не расположены на одной прямой, т. е. прямые $\alpha = OA$ и $\beta = OB$ различны. Кроме того, точка C не принадлежит ни одной из этих прямых (ибо в противном случае вектор $\boldsymbol{c}$ был бы коллинеарен либо вектору $\boldsymbol{a}$, либо вектору $\boldsymbol{b}$). Пусть β_1 — прямая, проходящая через точку C параллельно прямой β, а A_1 — ее точка пересечения с прямой α (ясно, что прямые α и β_1 не параллельны). По определению,

$$\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C}.$$

С другой стороны, поскольку точка A_1 принадлежит прямой α, а вектор $\boldsymbol{a}$ отличен от нуля, существует такое число k, что $\overrightarrow{OA_1} = k\boldsymbol{a}$. Аналогично, поскольку вектор $\overrightarrow{A_1C}$ параллелен прямой β, существует такое число l, что $\overrightarrow{A_1C} = l\boldsymbol{b}$. Следовательно,

$$\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b},$$

и векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно зависимы.

Определение 2. Векторы в пространстве называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости. Все векторы на прямой или на плоскости компланарны по определению.

Очевидно, что любые два вектора компланарны. Для трех векторов это уже не так.

Предложение 2. *Три вектора* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ (*на прямой, на плоскости или в пространстве*) *тогда и только тогда компланарны, когда они линейно зависимы.*

Доказательство. Тот факт, что три компланарных вектора линейно зависимы, непосредственно вытекает из того, что любые три вектора плоскости (или прямой) линейно зависимы. Поэтому нам нужно доказать лишь обратное, т. е. что три линейно зависимых вектора компланарны. При этом нам достаточно рассмотреть лишь случай пространства.

Итак, пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — три линейно зависимых вектора в пространстве. Один из этих векторов (скажем, вектор $\boldsymbol{c}$) линейно выражается через другие (т. е. через векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$). Таким образом, существуют такие числа k и l, что

$$\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}.$$

Для векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ существует плоскость, которой они параллельны, т. е. такая плоскость Π, что $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Vect}_\Pi(2)$ и $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Vect}_\Pi(2)$. Но тогда $k\boldsymbol{a} \in \mathrm{Vect}_\Pi(2)$, $l\boldsymbol{b} \in \mathrm{Vect}_\Pi(2)$ и потому $k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b} \in \mathrm{Vect}_\Pi(2)$, т. е. $\boldsymbol{c} \in \mathrm{Vect}_\Pi(2)$. Следовательно, все три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ параллельны одной и той же плоскости Π, т. е. эти векторы компланарны.

Из предложения 2 немедленно вытекает, что

в пространстве существуют линейно независимые семейства, состоящие из трех векторов.

Действительно, чтобы построить такое семейство, достаточно взять четыре точки O, A, B и C, не расположенные на одной плоскости, и рассмотреть векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$. Эти векторы не компланарны и потому, по доказанному, линейно независимы.

Вместе с тем, как мы сейчас покажем,

любое семейство векторов в пространстве, состоящее более чем из трех векторов, линейно зависимо.

Достаточно доказать это утверждение для семейства из четырех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$, никакие три из которых не компланарны.

Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$ и $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{OD}$. Проведем через точку D прямую, параллельную вектору $\boldsymbol{c}$. Эта прямая пересекает плоскость OAB в некоторой точке C_1. По определению

$$\boldsymbol{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1D}.$$

Вектор $\overrightarrow{OC_1}$ расположен в плоскости OAB и потому согласно доказанному выше линейно выражается через неколлинеарные векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$. С другой стороны, вектор $\overrightarrow{C_1D}$ пареллелен прямой OC и потому линейно выражается через вектор $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{d}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, так что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ линейно зависимы.

Замечание 1. Доказанные результаты делают совершенно тривиальной теорему о зависимости из п. 3. Действительно, например, для векторов в пространстве эта теорема при $M > 2$ автоматически верна, ибо любая система векторов, состоящая более чем из трех векторов, линейно зависима. При $M = 2$ она утверждает (в не ограничивающем общности предположении линейной независимости векторов $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_M$), что любая система компланарных векторов, состоящая более чем из двух векторов, линейно зависима, а при $M = 1$, — что линейно зависима любая система коллинеарных векторов, состоящая более чем из одного вектора.

Следует, однако, иметь в виду, что в п. 3 мы доказали теорему о зависимости, пользуясь только стандартными свойствами 1—8 (и потому можем быть уверены в ее справедливости для любого линеала), тогда как теперь мы существенно использовали геометрические соображения.

Подводя итоги, мы можем сформулировать полученные результаты в виде следующей окончательной теоремы:

Теорема 1. *В линеале* $\mathrm{Vect}(n)$, $n = 1, 2, 3$, *существует n линейно независимых векторов, тогда как любое семейство, состоящее из большего числа векторов, линейно зависимо.*

Здесь $n = 1$ в случае прямой, $n = 2$ в случае плоскости и $n = 3$ в случае пространства.

5. Базисы и координаты

Определение 1. Семейство n линейно независимых векторов линеала $\mathrm{Vect}(n)$ называется *базисом* (соответственно — на прямой, на плоскости или в пространстве)[1].

Таким образом, на прямой (в $\mathrm{Vect}(1)$) базис состоит из одного отличного от нуля вектора, на плоскости (в $\mathrm{Vect}(2)$) — из двух неколлинеарных векторов, а в пространстве (в $\mathrm{Vect}(3)$) — из трех некомпланарных векторов.

Определение 2. Семейство

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$$

векторов некоторого линеала мы назовем *полным*, если любой вектор из этого линеала линейно выражается (вообще говоря, не единственным образом) через векторы этого семейства.

Легко видеть, что

любое полное семейство векторов из $\mathrm{Vect}(n)$ *содержит не менее* n *векторов.*

Действительно, пусть

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$$

— данное полное семейство векторов и пусть

$$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$$

— произвольный базис в $\mathrm{Vect}(n)$. По условию, каждый вектор базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$. Поэтому, если $N < n$, то в силу теоремы о зависимости векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ были бы линейно зависимы, что противоречит определению базиса. Следовательно, $N \geqslant n$.

Далее, легко видеть, что

если полное семейство векторов

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N \tag{1}$$

линейно зависимо, то из него можно удалить один вектор так, чтобы оставшееся семейство было также полно.

Действительно, если семейство линейно зависимо, то хотя бы один вектор этого семейства линейно выражается через остальные. Пусть, для определенности, это — вектор $\boldsymbol{a}_N$. Тогда каждый вектор семейства (1) будет линейно выражаться через векторы семейства

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{N-1}. \tag{2}$$

Поэтому в силу транзитивности свойства «линейно выражаться» (см. п. 3 § 3) любой вектор, линейно выражающийся через се-

[1]) Обратим внимание на то, что при $n = 1$ это определение формально отличается от принятого в п. 1 § 2, где базисом на прямой назывался произвольный отличный от нуля вектор на этой прямой, тогда как теперь базисом называется семейство векторов на прямой, состоящее из одного отличного от нуля вектора. С точностью до этого формального различия наше общее определение базиса при $n = 1$ совпадает с определением из п. 1 § 2.

мейство (1), будет линейно выражаться и через семейство (2). Следовательно, если семейство (1) полно, то семейство (2) также полно.

Рассмотрим теперь следующие три свойства семейств векторов из $\mathrm{Vect}(n)$:

1) семейство линейно независимо;

2) семейство полно;

3) семейство состоит из n векторов.

Оказывается, что

любые два из трех свойств 1), 2), 3) *влекут за собой третье.*

Действительно, если выполнены свойства 1) и 2), то по теореме из п. 4 число N векторов этого семейства не больше n (в силу линейной независимости), а по только что доказанному утверждению оно и не меньше N (в силу полноты). Следовательно, $N=n$.

Пусть теперь выполнены свойства 1) и 3). Тогда для любого вектора $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Vect}(n)$ семейство $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{a}$ линейно зависимо и потому хотя бы один вектор этого семейства линейно выражается через векторы с меньшими номерами (предложение 1 п. 3). Поскольку этим вектором не может быть ни один из векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ (ибо векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ по условию линейно независимы), то, следовательно, вектор $\boldsymbol{a}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Таким образом, семейство $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ полно.

Наконец, если для семейства векторов выполнены свойства 2) и 3), то оно не может быть линейно зависимым, потому что в противном случае, удалив из этого семейства некоторый вектор, мы получим полное семейство, состоящее из $n-1$ векторов, что невозможно.

По определению, семейство, обладающее свойствами 1) и 3), является базисом. Следовательно, доказанное утверждение можно переформулировать в виде следующего предложения:

Предложение 1. *Семейство векторов из* $\mathrm{Vect}(n)$ *является базисом, если оно либо*

а) *линейно независимо и состоит из n векторов,*

либо

б) *полно и состоит из n векторов,*

либо

в) *линейно независимо и полно.*

Определение 3. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — произвольный базис в $\mathrm{Vect}(n)$. *Координатами* вектора $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Vect}(n)$ в этом базисе называются такие числа[1]) $a^1, \ldots, a^n$, что

$$\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a^n\boldsymbol{e}_n.$$

---

[1]) Здесь верхние индексы являются номерами, но не показателями степени.

Существование координат обеспечивается полнотой базиса, а их единственность — линейной независимостью базиса (предложение 2 п. 3).

Таким образом, при $n=1$

$$\boldsymbol{a}=a^1\boldsymbol{e}_1,$$

при $n=2$

$$\boldsymbol{a}=a^1\boldsymbol{e}_1+a^2\boldsymbol{e}_2,$$

и при $n=3$

$$\boldsymbol{a}=a^1\boldsymbol{e}_1+a^2\boldsymbol{e}_2+a^3\boldsymbol{e}_3.$$

Вектор $\boldsymbol{a}$ с координатами $a^1, \ldots, a^n$ мы будем иногда обозначать символом $\boldsymbol{a}(a^1, \ldots, a^n)$ или просто $(a^1, \ldots, a^n)$.

Подчеркнем, что это обозначение правомерно только при фиксированном (и явно указанном) базисе.

Если $\boldsymbol{a}=(a^1, \ldots, a^n)$ и $\boldsymbol{b}=(b^1, \ldots, b^n)$, т. е. если

$$\boldsymbol{a}=a^1\boldsymbol{e}_1+\ldots+a^n\boldsymbol{e}_n,$$
$$\boldsymbol{b}=b^1\boldsymbol{e}_1+\ldots+b^n\boldsymbol{e}_n,$$

то

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=a^1\boldsymbol{e}_1+\ldots+a^n\boldsymbol{e}_n+b^1\boldsymbol{e}_1+\ldots+b^n\boldsymbol{e}_n=$$
$$=(a^1+b^1)\boldsymbol{e}_1+\ldots+(a^n+b^n)\boldsymbol{e}_n,$$

и

$$k\boldsymbol{a}=k(a^1\boldsymbol{e}_1+\ldots+a^n\boldsymbol{e}_n)=$$
$$=(ka^1)\boldsymbol{e}_1+\ldots+(ka^n)\boldsymbol{e}_n.$$

Это показывает, что числа $a^1+b^1, \ldots, a^n+b^n$ являются координатами вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, а числа $ka^1, \ldots, ka^n$ — координатами вектора $k\boldsymbol{a}$. Таким образом,

при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число — умножаются на это число.

Чтобы описать эту ситуацию в терминах изоморфизма (ср. п. 6 § 2), мы введем в рассмотрение множество $\mathbb{R}^n$, элементами которого являются n-членные последовательности $(a^1, \ldots, a^n)$ вещественных чисел.

Таким образом, множество $\mathbb{R}^2$ состоит из пар (a^1, a^2), а множество $\mathbb{R}^3$ — из троек (a^1, a^2, a^3). Что же касается множества $\mathbb{R}^1$, то оно состоит из одночленных последовательностей вида (a^1). Но каждую такую последовательность мы можем отождествить с соответствующим числом a^1 и, следовательно, множество $\mathbb{R}^1$ мы можем считать совпадающим с множеством $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

Мы введем в множестве $\mathbb{R}^n$ операции «покомпонентного сложения» и «покомпонентного умножения на число»:

$$(a^1, \ldots, a^n)+(b^1, \ldots, b^n)=(a^1+b^1, \ldots, a^n+b^n),$$
$$k(a^1, \ldots, a^n)=(ka^1, \ldots, ka^n).$$

Легко видеть, что эти операции обладают всеми восемью стандартными свойствами линейных операций над векторами, т. е. относительно этих операций *множество* $\mathbb{R}^n$ *является линеалом* [1]).

Замечание 1. Обратим внимание на то, что множество $\mathbb{R}^n$ имеет смысл рассматривать при любом натуральном n, хотя нам здесь нужны только значения $n = 1$, 2 и 3.

Линеал $\mathbb{R}^n$ мы будем называть *стандартным* (или *арифметическим*) *линеалом*. Он обладает естественным базисом, состоящим из последовательностей $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Этот базис мы будем называть *стандартным базисом* линеала $\mathbb{R}^n$.

Например, при $n = 3$ стандартный базис имеет вид

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1),$$

а при $n = 2$ — вид

$$(1, 0), \quad (0, 1).$$

При $n = 1$ стандартный базис состоит из одноэлементной последовательности (1), т. е. из числа 1.

Тот факт, что стандартный базис действительно является базисом, немедленно вытекает из очевидного соотношения (мы ограничиваемся случаем $n = 3$)

$$(a^1, a^2, a^3) = a^1(1, 0, 0) + a^2(0, 1, 0) + a^3(0, 0, 1).$$

Сопоставление произвольному вектору $a \in \mathrm{Vect}(n)$ последовательности $(a^1, \ldots, a^n)$ его координат (в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$) определяет, очевидно, биективное отображение множества $\mathrm{Vect}(n)$ на множество $\mathbb{R}^n$, переводящее, согласно сказанному выше, сумму в сумму и произведение на число в произведение на то же число. Другими словами, это соответствие является *изоморфизмом* линеала $\mathrm{Vect}(n)$ на линеал $\mathbb{R}^n$. Мы будем называть его *координатным изоморфизмом*, определенным базисом

$$e_1, \ldots, e_n.$$

Этот изоморфизм переводит базис $e_1, \ldots, e_n$ линеала $\mathrm{Vect}(n)$ в стандартный базис линеала $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, справедлива следующая т е о р е м а о б и з о м о р ф и з м е, обобщающая аналогичную теорему из п. 6 § 2:

---

[1]) Поэтому, в частности, для элементов множества $\mathbb{R}^n$ имеют смысл введенные в п. 3 понятия (линейной зависимости, независимости и т. п.), причем доказанные в п. 3 свойства этих понятий остаются справедливыми и для элементов множества $\mathbb{R}^n$ (при любом n).

Это замечание будет нам полезно ниже при оперировании с матрицами, поскольку строки и столбцы матриц можно рассматривать как элементы из $\mathbb{R}^n$ (при соответствующем n).

Теорема 1. *Для любого $n = 1, 2, 3$ линеал* $\mathrm{Vect}(n)$ *изоморфен линеалу* $\mathbb{R}^n$. *Соответствующий изоморфизм* $\mathrm{Vect}(n) \to \mathbb{R}^n$ *определяется выбором в* $\mathrm{Vect}(n)$ *некоторого базиса* $e_1, \ldots, e_n$ *(и зависит от этого базиса).*

Поскольку координатный изоморфизм не является естественным (он зависит от выбора базиса), отождествлять с его помощью линеалы $\mathrm{Vect}(n)$ и $\mathbb{R}^n$, вообще говоря, неправомерно. Однако, если базис фиксирован, такое отождествление иногда бывает удобно.

Упражнение. Докажите, что любой изоморфизм линеала $\mathrm{Vect}(n)$ на линеал $\mathbb{R}^n$ является координатным изоморфизмом, определенным некоторым базисом.

6. Проекции и координаты

Мы ввели координаты векторов довольно формальным алгебраическим определением[1]. Дадим теперь их описание, имеющее более геометрический характер.

Рассмотрим сначала векторы на плоскости.

Пусть α и β — две непараллельные прямые на плоскости.

Для произвольного вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ рассмотрим две прямые, параллельные прямой β, одна из которых проходит через точку A, а другая — через точку B. Пусть A' и B' — точки пересечения этих прямых с прямой α.

Определение 1. Вектор $\overrightarrow{A'B'}$ называется *проекцией* вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую α параллельно прямой β и обозначается символом $\mathrm{pr}_\alpha^\beta \boldsymbol{a}$.

Это определение нуждается, конечно, в проверке корректности, т. е. в доказательстве того, что вектор $\mathrm{pr}_\alpha^\beta \boldsymbol{a}$ не зависит от выбора направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, представляющего вектор $\boldsymbol{a}$.

Мы докажем корректность определения 1 алгебраическим способом, что позволит нам, кроме того, связать проекции с координатами.

Упражнение. Докажите корректность определения 1 прямым геометрическим построением, аналогично тому, как в п. 1 была доказана корректность определения вектора $k\boldsymbol{a}$.

Как мы знаем, линеалы $\mathrm{Vect}_\alpha(1)$ и $\mathrm{Vect}_\beta(1)$, рассматриваемые как подмножества линеала $\mathrm{Vect}(2)$, пересекаются только по нулевому вектору (см. п. 4 § 1). Отсюда следует, что

если некоторый вектор $\boldsymbol{a}$ *разложен в сумму*

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{a}_1 \in \mathrm{Vect}_\alpha(1), \quad \boldsymbol{a}_2 \in \mathrm{Vect}_\beta(1), \tag{1}$$

то это разложение единственно.

---

[1]) Зато все результаты п. 5 справедливы для л ю б о г о линеала, обладающего (по отношению к данному числу n) свойством, описанным в теореме 1 п. 4.

Действительно, если

$$a_1 + a_2 = a_1' + a_2',$$

где a_1, $a_1' \in \mathrm{Vect}_\alpha(1)$, а a_2, $a_2' \in \mathrm{Vect}_\alpha(1)$, то

$$a_1' - a_1 = a_2 - a_2'.$$

Но $a_1' - a_1 \in \mathrm{Vect}_\alpha(1)$ и $a_2 - a_2' \in \mathrm{Vect}_\beta(1)$. Таким образом, вектор $a_1' - a_1 = a_2 - a_2'$ принадлежит обоим линеалам $\mathrm{Vect}_\alpha(1)$ и $\mathrm{Vect}_\beta(1)$ и потому равен нулю. Следовательно,

$$a_1' = a_1, \quad a_2' = a_2.$$

Вернемся теперь к вектору $\mathrm{pr}_\alpha^\beta a = \overrightarrow{A'B'}$. По определению суммы векторов

$$a = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} + (\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{A'A}). \qquad (2)$$

Так как вектор $\overrightarrow{A'B'} = \mathrm{pr}_\alpha^\beta a$ принадлежит линеалу $\mathrm{Vect}_\alpha(1)$, а вектор $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{A'A}$ — линеалу $\mathrm{Vect}_\beta(1)$ (по построению, линеалу $\mathrm{Vect}_\beta(1)$ принадлежат как вектор $\overrightarrow{B'B}$, так и вектор $\overrightarrow{A'A}$), то разложение (2) имеет вид (1) и, следовательно, по доказанному, однозначно определено. В частности, вектор $\overrightarrow{A'B'}$ однозначно определен вектором a. Тем самым корректность определения 1 полностью доказана. Одновременно мы доказали, что *проекция* $\mathrm{pr}_\alpha^\beta a$ *совпадает с вектором* a_1 *в разложении* (1).

Что же касается второго слагаемого a_2, то по аналогичным соображениям этот вектор совпадает с проекцией $\mathrm{pr}_\beta^\alpha a$ вектора a на прямую β параллельно прямой α. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 1. *Для любого вектора* $a \in \mathrm{Vect}(2)$ *имеет место разложение*

$$a = \mathrm{pr}_\alpha^\beta a + \mathrm{pr}_\beta^\alpha a. \qquad (3)$$

Проекция $\mathrm{pr}_\alpha^\beta a$ *обладает тем свойством, что вектор*

$$a - \mathrm{pr}_\alpha^\beta a$$

параллелен прямой β. *Этим свойством проекция* $\mathrm{pr}_\alpha^\beta a$ *характеризуется однозначно.*

Замечание 1. Мы видим, в частности, что проекция $\mathrm{pr}_\alpha^\beta a$ зависит только от направления прямых α и β, т. е. не изменится, если мы эти прямые заменим параллельными. Поэтому часто говорят о проекции не на прямую α, а *на направление* прямой α (см. сноску на стр. 17).

Направление прямой α однозначно задается произвольным базисом e_1 линеала $\mathrm{Vect}_\alpha(1)$, т. е. произвольным отличным от нуля вектором, параллельным этой прямой. Поэтому проекцию $\mathrm{pr}_\alpha^\beta \boldsymbol{a}$ часто называют проекцией *на направление вектора* $\boldsymbol{e}_1$.

Аналогично, направление прямой β однозначно задается произвольным базисом $\boldsymbol{e}_2$ линеала $\mathrm{Vect}_\beta(1)$, и потому проекцию $\mathrm{pr}_\alpha^\beta \boldsymbol{a}$ можно называть проекцией параллельно вектору $\boldsymbol{e}_2$ (или проекцией *по* направлению вектора $\boldsymbol{e}_2$).

Введя в рассмотрение вместо прямых α и β векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, естественно обозначать проекцию $\mathrm{pr}_\alpha^\beta \boldsymbol{a}$ символом $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_1}^{\boldsymbol{e}_2} a$.

Векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ составляют, очевидно, базис на плоскости (их два и они неколлинеарны, т. е. линейно независимы).

Резюмируя все сказанное, мы получаем, что

задание на плоскости произвольного базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ *позволяет сопоставить каждому вектору* $\boldsymbol{a}$ *два вектора*

$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_1}^{\boldsymbol{e}_2} \boldsymbol{a} \quad \text{и} \quad \mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_2}^{\boldsymbol{e}_1} \boldsymbol{a}$$

(*проекции этого вектора на направление одного из векторов базиса параллельно другому вектору*), *сумма которых равна данному вектору*:

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_1}^{\boldsymbol{e}_2} \boldsymbol{a} + \mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_2}^{\boldsymbol{e}_1} \boldsymbol{a}. \tag{4}$$

Сопоставим теперь разложение (4) с разложением

$$\boldsymbol{a} = a^1 \boldsymbol{e}_1 + a^2 \boldsymbol{e}_2 \tag{5}$$

вектора $\boldsymbol{a}$ по векторам базиса. Поскольку $a^1\boldsymbol{e}_1 \in \mathrm{Vect}_\alpha(1)$ и $a^2\boldsymbol{e}_2 \in \mathrm{Vect}_\beta(1)$, разложения (4) и (5) должны совпадать:

$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_1}^{\boldsymbol{e}_2} \boldsymbol{a} = a^1 \boldsymbol{e}_1, \quad \mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_2}^{\boldsymbol{e}_1} \boldsymbol{a} = a^2 \boldsymbol{e}_2.$$

Таким образом,

координата a^1 *вектора* $\boldsymbol{a}$ *в базисе* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ *равна отношению его проекции на направление вектора* $\boldsymbol{e}_1$ *параллельно вектору* $\boldsymbol{e}_2$ *к вектору* $\boldsymbol{e}_1$:

$$a^1 = \left(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_1}^{\boldsymbol{e}_2} \boldsymbol{a}\right) : \boldsymbol{e}_1.$$

Приняв вектор $\boldsymbol{e}_1$ за эталон длины (и направления) на прямой α, мы можем это утверждение сформулировать также следующим образом:

координата a^1 *равна величине проекции вектора* $\boldsymbol{a}$ *на направление вектора* $\boldsymbol{e}_1$ *параллельно вектору* $\boldsymbol{e}_2$.

Конечно, аналогичные утверждения справедливы и для второй координаты a_2. В частности,

$$a^2 = \left(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_2}^{\boldsymbol{e}_1} a\right) : \boldsymbol{e}_2.$$

В пространстве возможны два вида проекций: проекция на плоскость параллельно прямой и проекция на прямую параллельно плоскости.

Пусть П и α — плоскость и не параллельная ей прямая и пусть $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ — произвольный вектор в пространстве. Проведем через точки A и B плоскости, параллельные плоскости П. Пусть A_1 и B_1 — точки пересечения этих плоскостей с прямой α.

Определение 2. Вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ называется *проекцией* вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую α параллельно плоскости П и обозначается символом $\mathrm{pr}_{\alpha}^{\Pi}\,\boldsymbol{a}$.

Аналогично, если мы проведем через точки A и B прямые, параллельные прямой α, и рассмотрим точки пересечения A_2 и B_2 этих прямых с плоскостью П, то мы получим вектор $\overrightarrow{A_2B_2}$.

Определение 3. Вектор $\overrightarrow{A_2B_2}$ называется *проекцией* вектора $\boldsymbol{a}$ на плоскость П параллельно прямой α и обозначается символом $\mathrm{pr}_{\Pi}^{\alpha}\,\boldsymbol{a}$.

Предложение 2. *Для любого вектора* $\boldsymbol{a}\in\mathrm{Vect}(3)$ *имеет место разложение*

$$\boldsymbol{a}=\mathrm{pr}_{\alpha}^{\Pi}\,\boldsymbol{a}+\mathrm{pr}_{\Pi}^{\alpha}\,\boldsymbol{a}. \tag{6}$$

Проекция $\mathrm{pr}_{\alpha}^{\Pi}\,\boldsymbol{a}$ *обладает тем свойством, что вектор*

$$\boldsymbol{a}-\mathrm{pr}_{\alpha}^{\Pi}\,\boldsymbol{a}$$

параллелен плоскости П, *а проекция* $\mathrm{pr}_{\Pi}^{\alpha}\,\boldsymbol{a}$ — *тем свойством, что вектор*

$$\boldsymbol{a}-\mathrm{pr}_{\Pi}^{\alpha}\,\boldsymbol{a}$$

параллелен прямой α. *Этими свойствами проекции* $\mathrm{pr}_{\alpha}^{\Pi}\,\boldsymbol{a}$ *и* $\mathrm{pr}_{\Pi}^{\alpha}\,\boldsymbol{a}$ *характеризуются однозначно.*

Доказательство этого предложения полностью аналогично доказательству предложения 1 и поэтому мы его опустим.

Обратим внимание на то, что предложение 2 обеспечивает, в частности, корректность определений 2 и 3.

Упражнение. Докажите корректность определений 2 и 3 прямым геометрическим построением.

Проекции $\mathrm{pr}_{\alpha}^{\Pi}\,\boldsymbol{a}$ и $\mathrm{pr}_{\Pi}^{\alpha}\,\boldsymbol{a}$ зависят только от направлений прямой α и плоскости П, т. е. не меняются при замене этой прямой или этой плоскости параллельными прямой или плоскостью. Поэтому вместо задания прямой α достаточно задать произвольный ее базис $\boldsymbol{e}_1$, а вместо задания плоскости П — произвольный ее базис $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. В этом случае проекция $\mathrm{pr}_{\alpha}^{\Pi}\,\boldsymbol{a}$ обозначается символом $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_1}^{\boldsymbol{e}_2,\,\boldsymbol{e}_3}\,\boldsymbol{a}$, а проекция $\mathrm{pr}_{\Pi}^{\alpha}\,\boldsymbol{a}$ — символом $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_2,\,\boldsymbol{e}_3}^{\boldsymbol{e}_1}\,\boldsymbol{a}$.

Для того чтобы проекции $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_1}^{\boldsymbol{e}_2,\,\boldsymbol{e}_3}\,\boldsymbol{a}$ и $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_2,\,\boldsymbol{e}_3}^{\boldsymbol{e}_1}\,\boldsymbol{a}$ были определены, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ образовывали базис.

С координатами a^1, a^2, a^3 вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ проекции $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_1}^{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3} \boldsymbol{a}$ и $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3}^{\boldsymbol{e}_1} \boldsymbol{a}$ связаны формулами

$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_1}^{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3} = a^1 \boldsymbol{e}_1,$$
$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3}^{\boldsymbol{e}_1} \boldsymbol{a} = a^2 \boldsymbol{e}_2 + a^3 \boldsymbol{e}_3.$$

Таким образом, в частности,

координата a^1 вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ равна отношению его проекции на направление вектора $\boldsymbol{e}_1$ параллельно векторам $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ к вектору $\boldsymbol{e}_1$:

$$a^1 = \left(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_1}^{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3} \boldsymbol{a}\right) : \boldsymbol{e}_1.$$

Конечно, аналогичные формулы

$$a^2 = \left(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_2}^{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3} \boldsymbol{a}\right) : \boldsymbol{e}_2,$$
$$a^3 = \left(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{e}_3}^{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2} \boldsymbol{a}\right) : \boldsymbol{e}_3$$

имеют место и для остальных двух координат.

Из установленной связи между проекциями и координатами немедленно вытекают следующие свойства проекции:

1. *Проекция суммы векторов равна сумме проекций слагаемых*:

$$\mathrm{pr}\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \mathrm{pr}\,\boldsymbol{a} + \mathrm{pr}\,\boldsymbol{b}.$$

2. *Проекция произведения вектора на число равна произведению его проекции на это число*:

$$\mathrm{pr}\,(k\boldsymbol{a}) = k\,\mathrm{pr}\,\boldsymbol{a}.$$

В этих свойствах имеются в виду все три типа проекций $(\mathrm{pr}_\alpha^\beta,\ \mathrm{pr}_\alpha^\Pi,\ \mathrm{pr}_\Pi^\alpha)$.

Упражнение. Докажите свойства 1 и 2 прямым геометрическим построением и затем выведите отсюда свойства координат.

7. Преобразование координат при замене базиса

В заключение этого параграфа рассмотрим вопрос о том, как изменяются координаты векторов при изменении базиса.

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ — два базиса [1]) в $\mathrm{Vect}\,(n)$ (где, как всегда, $n = 1$, 2 или 3). Поскольку $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ является базисом, каждый вектор из $\mathrm{Vect}\,(n)$ и, в частности, каждый вектор $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ линейно выражается (и притом единственным образом) через векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

---

[1]) Обратите внимание на положение штрихов.

Это означает, что существуют такие (однозначно определенные) числа $c^i_{i'}$, i, $i'=1, \ldots, n$, что

$$\begin{aligned} e_{1'} &= c^1_{1'}e_1 + \ldots + c^n_{1'}e_n, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_{n'} &= c^1_{n'}e_1 + \ldots + c^n_{n'}e_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Таким образом, например, при $n=2$

$$\begin{aligned} e_{1'} &= c^1_{1'}e_1 + c^2_{1'}e_2, \\ e_{2'} &= c^1_{2'}e_1 + c^2_{2'}e_2. \end{aligned}$$

При фиксированном $i'=1, \ldots, n$ числа $c^i_{i'}$ представляют собой координаты вектора $e_{i'}$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Числа $c^i_{i'}$ мы будем записывать в виде матрицы

$$C=\begin{pmatrix} c^1_{1'} & \ldots & c^1_{n'} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ c^n_{1'} & \ldots & c^n_{n'} \end{pmatrix},$$

располагая координаты векторов $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ в базисе $e_1 \ldots, e_n$ по столбцам.

Определение 1. Матрица C называется *матрицей перехода* от «старого» базиса $e_1, \ldots, e_n$ к «новому» базису $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$.

При $n=1$ матрица перехода сводится к одному числу $c^1_{1'}$ (ср. конец п. 3 § 2), при $n=2$ имеет вид

$$C=\begin{pmatrix} c^1_{1'} & c^1_{2'} \\ c^2_{1'} & c^2_{2'} \end{pmatrix},$$

а при $n=3$ — вид

$$C=\begin{pmatrix} c^1_{1'} & c^1_{2'} & c^1_{3'} \\ c^2_{1'} & c^2_{2'} & c^2_{3'} \\ c^3_{1'} & c^3_{2'} & c^3_{3'} \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу перехода C, можно формулы (1) «перехода от старого базиса к новому» записать в компактном виде, если ввести в рассмотрение однострочные матрицы

$$e=(e_1, \ldots, e_n), \quad e'=(e_{1'}, \ldots, e_{n'}),$$

состоящие из векторов данных базисов. По правилу умножения матриц[1]) произведение eC матриц e и C совпадает, очевидно, с матрицей e'. Таким образом,

$$e'=eC.$$

[1]) Произведение матрицы с векторными элементами на обыкновенную матрицу (с числовыми элементами) определяется той же (известной из алгебры) формулой, что и произведение числовых матриц.

Отсюда сразу же вытекает, что

для любых трех базисов

(i) $e_1, \ldots, e_n$,

(ii) $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$

и

(iii) $e_{1''}, \ldots, e_{n''}$

матрица перехода C'' от базиса (1) *к базису* (3) *равна произведению CC' матрицы перехода C от базиса* (1) *к базису* (2) *на матрицу перехода C' от базиса* (2) *к базису* (3).

Действительно, так как

$$e' = eC, \quad e'' = e'C',$$

то

$$e'' = (eC)\,C' = e\,(CC'),$$

и потому $CC' = C''$, поскольку равенство $e'' = eC''$ однозначно определяет матрицу C''.

В частности, мы видим, что матрица C' перехода от базиса $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ к базису $e_1, \ldots, e_n$ связана с матрицей C перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ формулой

$$CC' = E$$

(поскольку единичная матрица E является, очевидно, матрицей перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к самому себе).

Аналогично показывается, что

$$C'C = E.$$

Это означает, что C' является обратной матрицей C^{-1}.

Таким образом,

матрицей перехода от базиса $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ к базису $e_1, \ldots, e_n$ является матрица C^{-1}, обратная к матрице перехода C от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$.

Поскольку обратная матрица может существовать только у невырожденных матриц (имеющих отличный от нуля определитель), тем самым, в частности, доказано, что

любая матрица перехода от одного базиса к другому является невырожденной матрицей.

Является ли условие невырожденности достаточным для того, чтобы данная квадратная матрица C порядка n была бы матрицей перехода между некоторыми базисами? Ответ на этот вопрос является утвердительным; более того, оказывается, что первый базис $e_1, \ldots, e_n$ можно при этом взять произвольно. Именно, легко видеть, что

для любого базиса $e_1, \ldots, e_n$ и любой невырожденной матрицы $C = (c^i_{i'})$ порядка n существует такой базис $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$, что матрица C является матрицей перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$.

Действительно, по данным векторам $e_1, \ldots, e_n$ и данной матрице C определим векторы $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ формулами (1). Достаточно доказать, что полученные таким образом векторы линейно независимы. Но это ясно, поскольку в противном случае столбцы матрицы C были ли линейно зависимы, что ввиду ее невырожденности невозможно.

Замечание 1. В последнем рассуждении мы использовали тот известный из теории определителей факт, что *определитель с линейно зависимыми столбцами (или строками) равен нулю.*

Обратим внимание на то, что теперь мы можем доказать и обратное утверждение, т. е. что

определитель с линейно независимыми столбцами (или строками) отличен от нуля.

Действительно, пусть $C = \left(c^i_{i'}\right)$ — матрица данного определителя. Рассмотрим в $\mathrm{Vect}(n)$ произвольный базис $e_1, \ldots, e_n$ и построим векторы $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ по формулам (1). По условию, эти векторы линейно независимы. Следовательно, они образуют базис (их n). Таким образом, матрица C является матрицей перехода от одного базиса к другому и потому невырождена.

Конечно, это рассуждение годится лишь для «геометрических» значений n, т. е. при $n = 1, 2, 3$.

Более подробно этот вопрос мы рассмотрим в дополнении к этому параграфу.

Пользуясь матричным умножением, можно в компактном виде записать также формулу разложения

$$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x^n\boldsymbol{e}_n$$

произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ по векторам базиса. Действительно, эта формула равносильна, очевидно, формуле

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}x,$$

где x — одностолбцовая матрица

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix},$$

составленная из координат вектора $\boldsymbol{x}$.

Пусть теперь x' — одностолбцовая матрица, составленная из координат $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ вектора $\boldsymbol{x}$ в новом базисе $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$. Тогда

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}'x'.$$

Но

$$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}C.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}Cx',$$

т. е.

$$\boldsymbol{e}x = \boldsymbol{e}Cx'.$$

Следовательно,

$$x = Cx',$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} x^1 &= c^1_{1'}x^{1'} + \ldots + c^1_{n'}x^{n'}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n &= c^n_{1'}x^{1'} + \ldots + c^n_{n'}x^{n'}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Например, при $n=2$

$$\begin{aligned} x^1 &= c^1_{1'}x^{1'} + c^1_{2'}x^{2'}, \\ x^2 &= c^2_{1'}x^{1'} + c^2_{2'}x^{2'}. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что формулы (2) выражают «старые» координаты через «новые», тогда как для векторов базиса ситуация была как раз обратной. Кроме того, в этих формулах координаты векторов $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ (столбцы матрицы C) оказались расположенными по строкам.

С другой стороны, как в формуле (1), так и в формуле (2) суммирование происходит по индексам, один раз встречающимся вверху, а один раз внизу.

Замечание об обозначениях. Использованные обозначения (в частности, соглашение о положении штрихов и индексов), хорошо приспособлены для рассмотрения случая произвольного n (и для доказательства общих утверждений). Поэтому естественно, что при фиксированном n они не очень удобны. Они неудобны также и при конкретных вычислениях.

Например, при $n=1$ (случай прямой) проще всего не писать вообще никаких индексов (как это мы делали в § 2). При $n=2$ (случай плоскости) удобно координаты обозначать двумя различными буквами (скажем, x и y) и соответствующим образом изменить обозначения элементов матрицы перехода. При $n=3$ (случай пространства) для обозначения координат можно пользоваться буквами x, y, z и т. п.

Это замечание очень существенно, поскольку в дальнейшем мы без оговорок будем часто пользоваться не общими, а специализированными обозначениями, и читатель должен это иметь в виду.

Дополнение. Теорема о ранге матрицы

Пусть

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

— произвольная (вообще говоря, прямоугольная) матрица. Выбрав произвольно k строк и k столбцов и взяв элементы, расположенные на пересечении этих строк и столбцов, мы получим некоторый определитель k-го порядка, называемый *минором* матрицы (1), соответствующим данным строкам и столбцам. Рассмотрим значения k, обладающие тем свойством, что все миноры k-го порядка матрицы (1) равны нулю. В частности (в соответствии с общими правилами употребления в математике понятия пустого множества), к этим значениям принадлежат все значения, для которых множество миноров k-го порядка пусто, т. е. значения, большие числа строк или столбцов матрицы (1).

Легко видеть, что

если все миноры k-го порядка матрицы (1) *равны нулю, то все миноры любого большего порядка также равны нулю.*

Действительно, достаточно доказать равенство нулю любого минора $k+1$-го порядка. Но каждый такой минор, будучи разложен по элементам некоторой его строки (или столбца), является линейной комбинацией миноров k-го порядка. Поскольку все последние миноры равны нулю, данный минор также равен нулю.

Отсюда непосредственно вытекает, что для любой матрицы (1) существует такое число $r \geqslant 0$, что

а) все миноры порядка, большего чем r, равны нулю;

б) среди миноров любого фиксированного порядка, не превосходящего r, существует по крайней мере один отличный от нуля минор.

Определение 1. Число r, обладающее свойствами а) и б), называется *рангом* матрицы (1). Коротко его можно охарактеризовать как наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы (1).

Очевидно, что

если любые p строк (или столбцов) матрицы линейно зависимы, то ее ранг меньше p:

$$r < p.$$

Действительно, если некоторая система строк линейно зависима, то система «укороченных» строк, получающихся из данных выбрасыванием некоторых компонент (имеющих для всех строк одни и те же номера), также линейно зависима. Поэтому в каждом миноре порядка $\geqslant p$ любые p строк (столбцов) линейно зависимы и, следовательно, этот минор равен нулю.

Одним из важнейших результатов линейной алгебры является тот факт, что справедливо и обратное утверждение, иными словами, справедлива следующая теорема, известная как т е о р е м а о р а н г е м а т р и ц ы:

Теорема 1. *Число p тогда и только тогда обладает тем свойством, что любые p строк матрицы линейно зависимы, когда $p > r$.*

Таким образом, в частности,

любая матрица ранга r содержит r линейно независимых строк (столбцов).

Доказательство теоремы о ранге матрицы отнюдь не элементарно и мы его здесь приводить не будем. Мы ограничимся лишь обсуждением некоторых частных случаев этой теоремы.

Пусть нам дана квадратная матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot \;\cdot\; \cdot \;\cdot\; \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

порядка n. Наивысшее возможное значение ее ранга равно n. При этом $r = n$ тогда и только тогда, когда определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot \;\cdot\; \cdot \;\cdot\; \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

матрицы отличен от нуля, т. е. когда матрица невырождена. Таким образом, частным случаем теоремы о ранге матрицы является следующая теорема о невырожденности:

Теорема 2. *Квадратная матрица тогда и только тогда невырождена, когда ее строки (столбцы) линейно независимы.*

В одну сторону («если матрица невырождена, то ее строки линейно независимы») эта теорема является тривиальным следствием известных элементарных свойств определителей. Доказательства требует лишь обратное утверждение («если строки матрицы линейно независимы, то матрица невырождена»).

Для определителей первого порядка теорема о невырожденности сводится к тавтологии. Для определителей второго порядка она утверждает, что определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

тогда и только тогда равен нулю, когда

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

что, очевидно, верно. Для определителей третьего порядка она нам известна из геометрических соображений (см. стр. 57).

Резюмируя, мы, следовательно, можем сказать, что

теорема о невырожденности заведомо справедлива для матриц порядка не большего трех.

Весьма замечательно, что хотя теорема о невырожденности является довольно частным случаем теоремы о ранге матрицы, тем не менее последняя теорема может быть без особого труда выведена из первой. Действительно, в силу теоремы о зависимости (см. п. 3) теорема о ранге матрицы может быть переформулирована в следующем виде:

в любой матрице ранга r существует r линейно независимых строк (столбцов), через которые линейно выражается любая другая строка (любой другой столбец).

Но, по условию, в матрице существует отличный от нуля минор Δ порядка r. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — строки матрицы, участвующие в этом миноре. Ясно, что эти строки линейно независимы. Таким образом, нам достаточно лишь показать, что любая другая строка β матрицы линейно выражается через эти строки. (Для столбцов рассуждение вполне аналогично.)

С этой целью рассмотрим в матрице минор Δ', получающийся добавлением к минору Δ строки β и некоторого (безразлично какого) столбца. Являясь минором порядка $r+1$, этот минор равен нулю. Следовательно, его строки линейно зависимы (здесь мы используем теорему о невырожденности). Но строки минора Δ линейно независимы. Поэтому строка β (или точнее, ее часть, участвующая в миноре Δ') линейно выражается через остальные строки этого минора. Это означает, что, вычтя из строки β некоторую линейную комбинацию строк $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, мы получим строку (обозначим ее через β'), обладающую тем свойством, что из составляющих ее чисел по крайней мере $r+1$ число равно нулю (именно, равны нулю числа, расположенные в столбцах, участвующих в миноре Δ'). Для завершения доказательства остается лишь показать, что на самом деле строка β' состоит только из нулей.

Пусть это не так, т. е. пусть строка β' содержит некоторое отличное от нуля число b. Пусть это число расположено на i-м месте. Рассмотрим минор Δ'', получающийся из минора Δ добавлением строки β и i-го столбца. Являясь минором порядка $r+1$, минор Δ'' равен нулю. Вычтя из его строки β ту же линейную комбинацию строк, что и выше, мы преобразуем минор Δ'' в определитель вида

$$\begin{vmatrix} & & & * \\ & \Delta & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \ldots & 0 & b \end{vmatrix}$$

Следовательно, $\Delta b = \Delta'' = 0$. Но, по условию, $\Delta \neq 0$. Таким образом, вопреки предположению, $b = 0$. Тем самым полностью доказано, что

из теоремы о невырожденности вытекает теорема о ранге матрицы.

Более того, поскольку теорему о невырожденности мы использовали только один раз и только применительно к минорам порядка $r+1$, на самом деле доказано, что

из теоремы о невырожденности для матриц порядка $r+1$ вытекает теорема о ранге для матриц ранга r, а также для матриц ранга $r+1$, число строк или столбцов которых равно $r+1$.

В соответствии со сказанным выше мы имеем право, таким образом, считать, что

теорема о ранге матрицы справедлива для матриц ранга, меньшего трех, а также для матриц, число строк или столбцов которых не превосходит трех.

Только для таких матриц эта теорема нам в дальнейшем и понадобится.

Ранг 0 имеет только матрица, состоящая из одних нулей. Ранг 1 имеет матрица, все строки (столбцы) которой пропорциональны.

Заметим, что поскольку в формулировку теоремы о ранге матрицы строки и столбцы входят совершенно равноправно,

максимальное число линейно независимых строк равно максимальному числу линейно независимых столбцов (и равно рангу матрицы).

В частности,

если строки матрицы пропорциональны, то ее столбцы также пропорциональны, и наоборот.

В дальнейшем нам неоднократно придется рассматривать пару матриц, вторая из которых получается добавлением к первой матрице некоторого столбца (или строки). Пусть r — ранг первой, а R — ранг второй («расширенной») матрицы. Тогда

$$r \leqslant R \leqslant r+1.$$

Действительно, неравенство $r \leqslant R$ очевидно. С другой стороны, каждый минор расширенной матрицы либо является минором исходной матрицы, либо, будучи разложен по элементам дополнительного столбца, может быть представлен в виде линейной комбинации миноров исходной матрицы на единицу меньшего порядка. Следовательно, все миноры расширенной матрицы порядка $r+2$ равны нулю, и потому $R \leqslant r+1$.

Полезно также заметить, что

равенство $R = r$ имеет место тогда и только тогда, когда дополнительный столбец линейно выражается через столбцы исходной матрицы.

Действительно, если дополнительный столбец линейно выражается через столбцы исходной матрицы, то все миноры порядка $r+1$ расширенной матрицы, не являющиеся минорами исходной матрицы, имеют линейно зависимые столбцы и потому равны нулю.

Обратно, пусть $R = r$. Рассмотрим r линейно независимых столбцов исходной матрицы, через которые линейно выражаются все остальные ее столбцы. Поскольку $R = r$, то через эти столбцы должен выражаться и дополнительный столбец. Таким образом, при $R = r$ дополнительный столбец линейно выражается через столбцы исходной матрицы.

Обратим внимание, что в последнем рассуждении мы воспользовались теоремой о ранге матрицы.

Замечание 1. Пусть

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & a_m \end{pmatrix}$$

— данные матрицы. Тот факт, что дополнительный столбец второй матрицы линейно выражается через столбцы первой матрицы, означает, что система линейных уравнений

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

имеет хотя бы одно решение (совместна). Следовательно, доказанное выше утверждение может быть переформулировано в виде следующей теоремы, известной как теорема Кронекера — Капелли:

Теорема 3. Система линейных уравнений тогда и только тогда совместна, когда ранг матрицы ее коэффициентов не меняется при добавлении столбца свободных членов.