§ 4. ОРИЕНТАЦИИ ПРЯМОЙ, ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА

1. Понятие ориентации

В п. 1 § 2 мы определили ориентацию прямой как выбор на ней определенного направления движения, т. е. одного из двух возможных отношений предшествования точек этой прямой. Затем мы показали, что ориентацию прямой можно с равным правом определить так же и как класс одноименных невырожденных направленных отрезков или как класс одноименных отличных от нуля векторов (т. е. базисов).

Ясно, что первое определение ориентации (выбор отношения предшествования) на плоскость и пространство непосредственно не переносится. Иначе обстоит дело с двумя другими определениями.

Определение 1. Два базиса $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ на плоскости ($n = 2$) или в пространстве ($n = 3$) называются *одноименными*, если определитель $|C|$ матрицы перехода C от первого базиса ко второму (см. п. 7 § 3) положителен:

$$|C| > 0.$$

Если $|C| > 0$, то базисы называются *разноименными.*

Заметим, что при $n = 1$ это определение согласуется с определением одноименных базисов на прямой. Поэтому в дальнейшем мы случай $n = 1$ исключать не будем, хотя, конечно, ничего нового мы для этого случая не получим.

В первую очередь мы покажем, что

отношение одноименности базисов является отношением эквивалентности.

Матрицей перехода от произвольного базиса к нему самому является единичная матрица, определитель которой равен единице и потому положителен. Следовательно, отношение одноименности рефлексивно.

Если C — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ к базису $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, то, как мы знаем, обратная матрица C^{-1} является матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ к базису $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Поэтому если $|C| > 0$, то и $|C^{-1}| = |C|^{-1} > 0$. Следовательно, отношение одноименности симметрично.

Если C — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ к базису $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, а C' — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ к базису $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$, то, как мы знаем (п. 7 § 3), матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ к базису $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ является матрица CC'. Но по правилу умножения определителей, $|CC'| = |C| \cdot |C'|$. Поэтому, если $|C| > 0$ и $|C'| > 0$, то и $|CC'| > 0$. Следовательно, отношение одноименности транзитивно.

Поскольку отношение одноименности является отношением эквивалентности, все базисы разбиваются на классы одноименных базисов.

Определение 2. Классы одноименных базисов называются *ориентациями* (соответственно — прямой, плоскости и пространства).

Так как существуют базисы, связанные с данным базисом произвольной невырожденной матрицей перехода (см. п. 7 § 3), и, в частности, произвольной матрицей с отрицательным определителем, мы видим, что

на прямой, на плоскости и в пространстве существует точно две различные ориентации: базисы, принадлежащие одной и той же ориентации, одноименны, а базисы, принадлежащие различным ориентациям, разноименны.

Определение 3. Прямая, плоскость или пространство, для которой(ого) выбрана некоторая ориентация, называется *ориентированной(ым)*. Для каждой ориентации o другая возможная ориентация обозначается символом $-o$ и называется *противоположной* ориентацией. О базисе, принадлежащем некоторой ориентации, говорят, что он *определяет* эту ориентацию. Базис ориентированной(ого) прямой, плоскости или пространства, определяющий данную ориентацию, называется *положительно ориентированным* (по отношению к данной ориентации), а базис, определяющий противоположную ориентацию, называется *отрицательно ориентированным.*

На практике часто возникает вопрос об одноименности базисов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, векторы которых заданы их координатами в некотором третьем базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Пусть Δ_a — определитель, столбцами которого являются столбцы координат векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. (Таким образом, Δ_a — это не что иное, как определитель матрицы перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.) Аналогично строится определитель Δ_b. Матрица перехода C от базиса $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ к базису $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ является, как мы знаем, произведением матрицы перехода от базиса $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ к базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ (эта матрица обратна к матрице перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и потому ее определитель равен Δ_a^{-1}) на матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ (имеющую, по определению, определитель Δ_b). Поэтому согласно правилу умножения определителей

$$|C| = \Delta_a^{-1}\Delta_b.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

базисы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ тогда и только тогда одноименны, когда построенные для них определители Δ_a и Δ_b имеют один и тот же знак.

Определение ориентации как класса одноименных направленных отрезков также можно перенести на случай плоскости и пространства.

Определение 4. Упорядоченная тройка (A, B, C) точек плоскости (или пространства) называется *неколлинеарной тройкой*, если точки A, B, C не принадлежат одной прямой. Аналогично, упорядоченная четверка (A, B, C, D) точек пространства называется *некомпланарной четверкой*, если точки A, B, C, D не принадлежат одной плоскости. Такие тройки и четверки называются также тройками и четверками точек *общего положения.*

Замечание 1. Введя, по аналогии, понятие пары (A, B) точек общего положения как упорядоченной пары, состоящей из различных точек A и B, мы немедленно получим, что это понятие в точности совпадает с понятием невырожденного направленного отрезка. Таким образом, понятия неколлинеарной тройки и некомпланарной четверки можно рассматривать как непосредственные обобщения на случай плоскости и пространства понятия невырожденного направленного отрезка.

Для любой неколлинеарной тройки (A, B, C) точек плоскости векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ неколлинеарны (т. е. линейно независимы) и потому образуют базис плоскости. Аналогично, для любой некомпланарной четверки (A, B, C, D) точек пространства векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ образуют базис пространства.

Определение 5. Две неколлинеарные тройки (A, B, C) и (A', B', C') точек плоскости (две некомпланарные четверки (A, B, C, D) и (A', B', C', D') точек пространства) называются *одноименными*, если соответствующие базисы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'C'}$ (базисы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'D'}$) одноименны.

Ясно, что отношение одноименности троек (четверок) является отношением эквивалентности и что соответствующие классы эквивалентности находятся в естественном биективном соответствии с классами одноименных базисов, т. е. с ориентациями плоскости (пространства).

Это означает, что

ориентации плоскости (пространства) можно отождествить с классами одноименных неколлинеарных троек (некомпланарных четверок) точек этой плоскости (пространства).

Упражнение. Определите одноименность троек и четверок точек общего положения элементарно-геометрически, не обращаясь к векторам.

Наглядное определение ориентации как направления движения возможно, конечно, не только на прямой, но и на любой линии, например, на окружности. Однако ориентацию окружности нельзя формально охарактеризовать (в отличие от ориентации прямой) как некоторое отношение, в котором участвуют две точки. Это связано с тем, что окружность является замкнутой линией, а прямая — нет.

Аналогом отношения предшествования точек прямой является на окружности отношение между тремя (попарно различными) точками A, B, C, наглядно состоящее в том, что, передвигаясь по окружности в данном направлении и отправляясь от точки A, мы не можем достичь точки C, не переходя через точку B.

Можно без труда аксиоматически охарактеризовать это отношение между точками окружности, подобно тому как в п. 1 § 2 мы охарактеризовали отношение предшествования точек прямой, а затем перенести на случай окружности описание ориентации прямой как класса одноименных направленных отрезков (при этом роль направленных отрезков будут играть упорядоченные тройки (A, B, C) попарно различных точек окружности, а их отношение одноименности будет наглядно означать, что они определяют на окружности одно и то же направление движения). Такое «независимое» рассмотрение ориентаций окружности, возможно, само по себе и интересное, в достаточной степени громоздко, а с принципиальной стороны не дает ничего нового по сравнению со случаем прямой. Поэтому мы предпочтем здесь описать ориентации окружности не независимо, а пользуясь тем, что она расположена в плоскости.

С этой целью мы заметим, что на неформальном, наглядном, уровне ясно (например, из чертежа), что две тройки (A, B, C) и (A', B', C') точек окружности Σ тогда и только тогда определяют на окружности одно и то же направление движения, когда базисы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'C'}$ плоскости, в которой расположена окружность Σ, одноименны. Таким образом, мы приходим к следующему (уже формальному) определению ориентации окружности:

Определение 6. Упорядоченные тройки (A, B, C) и (A', B', C') точек окружности Σ (состоящие каждая из попарно различных точек) называются *одноименными*, если базисы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'C'}$ плоскости, в которой расположена окружность Σ, одноименны. Класс одноименных троек точек окружности называется ее *ориентацией*, а окружность, для которой выбрана некоторая ориентация, называется *ориентированной*.

Сравнив это определение с определением 5 одноименности неколлинеарных точек плоскости, мы немедленно заметим, что они, по существу, совпадают. Это означает, что

между ориентациями плоскости и ориентациями расположенной в этой плоскости окружности существует естественное биективное соответствие.

Иначе говоря,

на ориентированной плоскости каждая окружность автоматически ориентирована, и, обратно, задание на плоскости ориентированной окружности однозначно определяет некоторую ориентацию плоскости.

Различие между ориентациями плоскости и ориентациями расположенных в этой плоскости окружностей состоит только в том, что ориентацией плоскости является класс одноименных всевозможных неколлинеарных троек точек плоскости, а ориентацией окружности — класс одноименных неколлинеарных троек точек, принадлежащих этой окружности.

2. Правые и левые ориентации

Обратим внимание, что из двух возможных ориентаций прямой, плоскости или пространства чисто внутренним математическим способом нельзя выделить какую-нибудь определенную. Для этого приходится обращаться к соображениям, математике посторонним (скажем, к анатомии человека).

Например, на прямой, изображенной на чертеже горизонтальной линией, можно выделить направление «слева направо». Это направление для человека наиболее привычно (в частности, большинство культурных народов пишут в этом направлении) и потому ему присвоено наименование «положительного направления» («положительной ориентации»). Однако следует отчетливо понимать, что фиксация этого направления никакого инвариантного (не зависящего от чертежа) смысла не имеет: поверните чертеж «вверх ногами», и «положительное» направление перейдет в «отрицательное». Не нужно также путать понятие «положительного направления» в этом смысле с понятием «положительного направления по отношению к данной ориентации», которое вполне инвариантно, но зависит от выбора ориентации.

На вертикальных прямых принято «положительным» направлением считать направление «снизу вверх».

На плоскости задание ориентации равносильно, как мы знаем, заданию ориентаций расположенных в этой плоскости окружностей, т. е. заданию некоторого «направления вращения» этих окружностей. Наглядно это направление можно описать как направление, в котором следует вращать первый вектор базиса, определяющего данную ориентацию плоскости, чтобы кратчайшим путем совместить его со вторым вектором этого базиса (в этой формулировке предполагается, что векторы базиса имеют одинаковые длины и отложены от одной точки). При этом «положительной» ориентацией принято считать ориентацию, соответствующую вращению «против часовой стрелки». Это соглашение, конечно, также не инвариантно: посмотрите на плоскость с другой стороны, и «положительная» ориентация окажется «отрицательной».

Если посмотреть на правую руку со стороны ладони, то большой и указательный пальцы будут образовывать базис, ориентированный «против часовой стрелки». На этом основании ориентация плоскости «против часовой стрелки» обычно называется *правой* ориентацией, а противоположная ее ориентация — *левой*.

Аналогично, в пространстве *правой* ориентацией называется ориентация, определенная «базисом», состоящим из большого, указательного и среднего пальцев правой руки, а противоположная ориентация называется *левой*. Здесь, к сожалению, нет общепринятого соглашения, какую ориентацию считать «положительной». Большинство авторов (и мы в том числе) считают «положительной» правую ориентацию. Однако во многих (особенно старых) учебниках за положительную ориентацию принимается левая ориентация.

Заметим, что термин «правая» и «левая» по отношению к ориентациям пространства имеют уже инвариантный смысл, поскольку «посмотреть на пространство с другой стороны» мы не можем. Тем не менее определить их внутренним математическим способом нельзя.

3. Произведения ориентаций

Пусть α_1 и α_2 — две ориентированные прямые на плоскости. Предполагая, что эти прямые не параллельны, выберем на каждой из них положительно ориентированный базис. Пусть это будет вектор $\boldsymbol{a}_1$ на прямой α_1 и вектор $\boldsymbol{a}_2$ на прямой α_2. Так как векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ по условию не коллинеарны, они составляют некоторый базис на плоскости. Оказывается, что

ориентация плоскости, определенная базисом $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, не зависит от выбора векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и определяется исключительно ориентациями прямых α_1 и α_2 (взятых в данном порядке).

Действительно, пусть $\boldsymbol{a}_1'$ и $\boldsymbol{a}_2'$ — другие положительно ориентированные базисы прямых α_1 и α_2. Тогда $\boldsymbol{a}_1' = k_1\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2' = k_2\boldsymbol{a}_2$, где $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$. Поэтому матрица перехода от базиса $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ к базису $\boldsymbol{a}_1'$, $\boldsymbol{a}_2'$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

и ее определитель k_1k_2 положителен. Следовательно, базис $\boldsymbol{a}_1'$, $\boldsymbol{a}_2'$ определяет ту же ориентацию плоскости, что и базис $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$.

Таким образом,

для задания ориентации плоскости достаточно задать ориентации двух не параллельных прямых этой плоскости.

Определение 1. Построенная ориентация плоскости называется *произведением* данных ориентаций прямых α_1 и α_2 и обозначается символом o_1o_2, где o_1 — ориентация прямой α_1, а o_2 — ориентация прямой α_1.

Очевидно, что

$$o_2o_1 = -o_1o_2$$

и

$$(-o_1)o_2 = o_1(-o_2) = -o_1o_2,$$

т. е.

при перестановке прямых α_1 и α_2 или при смене ориентации одной из них результирующая ориентация плоскости переходит в противоположную.

Отсюда, в частности, вытекает, что

для любой ориентации o плоскости и любой ориентации o_2 прямой α_2 существует такая ориентация o_1 прямой α_1, что $o = o_1 o_2$.

Действительно, выберем произвольно некоторую ориентацию o_1' прямой α_1 и построим ориентацию $o_1' o_2$. Если окажется, что $o = o_1' o_2$, то все в порядке: $o_1 = o_1'$. Если же $o_1' o_2 \neq o$, то обязательно $o_1' o_2 = -o$ и потому $o_1 = -o_1'$.

Пусть теперь α и Π — ориентированные прямая и плоскость в пространстве (с ориентациями o_α и o_Π соответственно). Предполагая прямую α и плоскость Π не параллельными, рассмотрим ориентацию пространства, определенную базисом $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, где $\boldsymbol{a}_1$ — некоторый положительно ориентированный базис прямой α, а $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ — некоторый положительно ориентированный базис плоскости Π.

Если $\boldsymbol{a}_1' = k_1 \boldsymbol{a}_1$ — другой положительно ориентированный базис прямой α (так что $k_1 > 0$), а $\boldsymbol{a}_2' = k_2 \boldsymbol{a}_2 + k_2' \boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_3' = k_3' \boldsymbol{a}_2 + k_3 \boldsymbol{a}_3$ — другой положительно ориентированный базис плоскости Π $\left(\text{так что } \begin{vmatrix} k_2 & k_2' \\ k_3' & k_3 \end{vmatrix} > 0\right)$, то базис $\boldsymbol{a}_1'$, $\boldsymbol{a}_2'$, $\boldsymbol{a}_3'$ пространства связан с базисом $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & k_2' \\ 0 & k_3' & k_3 \end{pmatrix},$$

определитель которой равен $k_1 \begin{vmatrix} k_2 & k_2' \\ k_3' & k_3 \end{vmatrix}$ и потому положителен. Следовательно,

ориентация пространства, определенная базисом $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, не зависит от выбора базисов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ и определяется исключительно данными ориентациями o_α и o_Π прямой α и плоскости Π.

Таким образом,

для задания ориентации пространства достаточно задать ориентации произвольной прямой и произвольной не параллельной ей плоскости.

Определение 2. Построенная ориентация пространства называется *произведением* ориентаций o_α и o_Π и обозначается символом $o_\alpha o_\Pi$.

Аналогично определяется ориентация $o_\Pi o_\alpha$ (задаваемая базисом $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_1$). Впрочем, ясно, что она совпадает с ориентацией $o_\alpha o_\Pi$:

$$o_\Pi o_\alpha = o_\alpha o_\Pi.$$

Далее, очевидно, что

$$(-o_\alpha)o_\Pi = o_\alpha(-o_\Pi) = -o_\alpha o_\Pi,$$

откуда, как и выше, вытекает, что

для любой ориентации o пространства и любой ориентации o_α прямой α (любой ориентации o_Π плоскости Π) существует такая ориентация o_Π плоскости Π (ориентация o_α прямой α), что $o = o_\alpha o_\Pi$.

Аналогичным образом определяется произведение $o_1o_2o_3$ ориентаций трех прямых α_1, α_2, α_3, обладающих тем свойством, что параллельные им прямые, проходящие через одну точку, не лежат в одной плоскости (такие прямые называются *прямыми общего положения*). Впрочем, это произведение сводится к уже определенным произведениям:

$$o_1o_2o_3 = o_1(o_2o_3).$$

Таким образом,

для задания ориентации пространства достаточно задать ориентации трех прямых общего положения (взятых в данном порядке).

Заметим, что при четной перестановке прямых α_1, α_2, α_3 ориентация $o_1o_2o_3$ не меняется, а при нечетной — переходит в противоположную.

4. Стороны прямой на плоскости и плоскости в пространстве

Как известно, любая прямая α на плоскости разбивает эту плоскость на две *полуплоскости*: точки A и B плоскости, не принадлежащие прямой α, тогда и только тогда принадлежат одной полуплоскости, когда отрезок $\overline{AB}$ не пересекает прямую α.

Аналогично, любая плоскость Π в пространстве разбивает пространство на два *полупространства*, причем две точки A, B, не принадлежащие плоскости, тогда и только тогда принадлежат одному полупространству, когда отрезок $\overline{AB}$ не пересекает плоскость.

Определение 1. Говорят, что у прямой α в плоскости (или у плоскости Π в пространстве) выбрана *сторона*, если выбрана одна из полуплоскостей, на которые прямая α разбивает плоскость (соответственно, если выбрано одно из полупространств, на которые плоскость Π разбивает пространство). Выбранная полуплоскость (полупространство) или соответствующая сторона называется при этом *положительной*, а другая полуплоскость (полупространство) — *отрицательной.*

Пусть $\boldsymbol{e}$ — произвольный вектор, не параллельный прямой α (плоскости Π). Выбрав на прямой α (плоскости Π) произвольную точку O, отложим от нее вектор $\boldsymbol{e}$, т. е. построим направленный отрезок $\overrightarrow{OE} = \boldsymbol{e}$. Если точка E окажется при этом в положительной полуплоскости (положительном полупространстве), то мы будем говорить, что вектор *$\boldsymbol{e}$ направлен в положительную сторону* прямой α (плоскости Π). Это определение нуждается, конечно, в проверке корректности, т. е. в доказательстве независимости полуплоскости (полупространства), содержащей точку E, от выбора точки O. Другими словами, мы должны доказать, что

если для точек O и O' прямой α (плоскости Π) *и точек E и E', не принадлежащих этой прямой (этой плоскости), имеет место равенство $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{O'E'}$, то точки E и E' принадлежат одной полуплоскости (одному полупространству).*

Пусть это не так, т. е. пусть отрезок $\overline{EE'}$ пересекается с прямой α (плоскостью Π). Ясно, что это возможно тогда и только тогда, когда прямые OO' и EE' пересекаются. С другой стороны, поскольку векторы $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{O'E'}$ равны, эти прямые должны быть параллельны (причем совпадать они не могут). Полученное противоречие доказывает, что точки E и E' принадлежат одной и той же полуплоскости (полупространству).

Предложение 1. *Пусть $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ — два коллинеарных вектора, не параллельных прямой α (плоскости* Π), *и пусть вектор $\boldsymbol{e}$ направлен в положительную сторону прямой α (плоскости* Π). *Вектор $\boldsymbol{e}'$ тогда и только тогда обладает тем же свойством, когда отношение $\boldsymbol{e}' : \boldsymbol{e}$ положительно.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{e} = \overrightarrow{OE}$ и $\boldsymbol{e}' = \overrightarrow{OE'}$, где O — некоторая точка прямой α (плоскости Π). Точки E и E' тогда и только тогда лежат в разных полуплоскостях (полупространствах), когда отрезок $\overline{EE'}$ пересекается с прямой α (плоскостью Π). Но прямая EE' имеет с прямой α (плоскостью Π) одну-единственную точку пересечения O. Следовательно, точки E и E' тогда и только тогда лежат в разных полуплоскостях (полупространствах), когда отрезок $\overline{EE'}$ содержит точку O, т. е. когда $E \prec O \prec E'$ (в ориентации прямой EE', в которой $E \prec E'$). Для завершения доказательства осталось заметить, что $E \prec O \prec E'$ тогда и только тогда, когда отношение $\boldsymbol{e}' : \boldsymbol{e}$ отрицательно.

Определение 2. Мы будем говорить, что ориентированная прямая β *направлена в положительную сторону* прямой α (плоскости Π), если ее положительно ориентированный вектор $\boldsymbol{e}$ направлен в положительную сторону прямой α (плоскости Π).

Согласно предложению 1 это определение корректно.

Если в одной ориентации прямая β направлена в положительную сторону прямой α (плоскости Π), то в другой ориентации она будет направлена, очевидно, в отрицательную сторону. Это означает, что *выбор на прямой α (плоскости Π) положительной стороны определяет на каждой прямой β, не параллельной прямой α (плоскости Π), некоторую ориентацию, а именно, ориентацию, в которой эта прямая направлена в положительную сторону прямой α (плоскости Π).*

Другими словами,

ориентацию прямой на плоскости или в пространстве можно определить как выбор стороны на некоторой прямой (плоскости), не параллельной данной прямой.

Поскольку ориентации непараллельных прямых α и β, лежащих в одной плоскости, определяют (см. п. 3) некоторую ориентацию плоскости и поскольку, согласно только что сказанному, ориентация прямой β определяется заданием стороны прямой α, мы получаем, что

для задания ориентации плоскости достаточно задать в этой плоскости ориентированную прямую и некоторую ее сторону.

Обратно,

для задания ориентации прямой достаточно задать некоторую ориентацию плоскости, содержащей эту прямую, и одну из сторон этой прямой в плоскости.

Аналогично,

для задания ориентации пространства достаточно задать ориентированную плоскость и некоторую ее сторону, а для задания ориентации плоскости достаточно задать ориентацию пространства и некоторую сторону этой плоскости.

Рассмотрим в заключение интересный и тонкий вопрос (часто вызывающий недоразумения), о сравнении ориентаций на двух различных прямых и плоскостях.

Понимая ориентации как классы одноименных базисов, мы видим, что ориентации на прямой, в плоскости или в пространстве определяются исключительно в терминах соответствующего линеала $\mathrm{Vect}(n)$ (так что, собственно говоря, следовало бы говорить об ориентациях именно этого линеала). Отсюда следует, что поскольку для параллельных прямых линеалы $\mathrm{Vect}(1)$ (рассматриваемые как подмножества линеалов $\mathrm{Vect}(2)$ или $\mathrm{Vect}(3)$) совпадают, то

задание ориентации на одной прямой автоматически определяет ориентацию на любой другой параллельной прямой.

Другими словами, это означает, что

ориентации параллельных прямых можно сравнивать, т. е. можно говорить о том, совпадают они или нет.

Конечно, аналогичные утверждения справедливы и для ориентаций параллельных плоскостей.

Совсем иначе дело обстоит со сравнением ориентаций двух непараллельных прямых (или плоскостей). На первый взгляд кажется, что можно предложить следующую процедуру сравнения ориентаций, скажем, двух непараллельных прямых β_1 и β_2 на плоскости:

Пересечем прямые β_1 и β_2 некоторой третьей прямой α. Как мы знаем, ориентации прямых β_1 и β_2 определяются заданием некоторых сторон прямой α. В соответствии с этим условимся называть данные ориентации прямых β_1 и β_2 «одинаковыми», если они определяются одной и той же стороной прямой α.

Однако оказывается, что это определение некорректно (зависит от выбора прямой α).

Задание. Покажите на примере, что при одном выборе прямой α данные ориентации прямых β_1 и β_2 могут быть «одинаковыми», а при другом — «различными».

Таким образом, сравнение ориентаций на непараллельных прямых (а также на непараллельных плоскостях) невозможно.

В этом отношении ориентации прямых в принципе отличаются от ориентаций окружностей, сравнение которых возможно (ориентации двух окружностей, расположенных в одной плоскости, считаются, по определению, «одинаковыми», если они определяют одну и ту же ориентацию плоскости).

Причиной этого различия является то, что ориентация окружности определяет ориентацию плоскости, в которой расположена окружность, а ориентация прямой — нет (для того чтобы по ориентации прямой определить ориентацию содержащей ее плоскости, необходимо, как мы знаем, дополнительно задать сторону прямой в этой плоскости).

Суть дела здесь в том, что две полуплоскости, на которые прямая разбивает плоскость, совершенно равноправны (и потому без дополнительной информации неотличимы друг от друга), тогда как две области, на которые окружность разбивает плоскость («внешняя область» и «внутренняя область»), отличаются друг от друга по их геометрическим свойствам: например, внешняя область содержит целые прямые, тогда как внутренняя область (ограниченный окружностью круг) ни одной прямой не содержит.

К этому вопросу мы еще вернемся в п. 4 § 3 гл. 7.

5. Деформации базисов и ориентации

В этом пункте мы изложим еще один подход к понятию ориентации, отличающийся особой наглядностью.

Рассмотрим произвольную *вектор-функцию* $\boldsymbol{a}(t)$ числовой переменной t (пробегающей, скажем, замкнутый интервал $[0, 1]$ числовой оси $\mathbb{R}$), т. е. отображение, сопоставляющее каждому $t \in [0, 1]$ некоторый вектор $\boldsymbol{a}(t)$ (на прямой, в плоскости или в пространстве). При заданном базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ (где, как всегда, $n = 1, 2$ или 3) вектор-функция $\boldsymbol{a}(t)$ однозначно определяется координатами

$$a^1(t), \ldots, a^n(t) \qquad (1)$$

вектора $\boldsymbol{a}(t)$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, являющимися обыкновенными числовыми функциями переменной t. Таким образом, задание вектор-функции $\boldsymbol{a}(t)$ равносильно (при фиксированном базисе) заданию n обыкновенных (числовых) функций (1).

Определение 1. Вектор-функция $\boldsymbol{a}(t)$ называется *непрерывной*, если все функции (1) непрерывны.

Из формул преобразования координат при замене базиса (п. 7 § 3) немедленно вытекает, что это определение корректно (не зависит от выбора базиса), т. е. что если координаты (1) вектор-функции $\boldsymbol{a}(t)$ непрерывны в одном базисе, то они непрерывны и в любом другом базисе.

Определение 2. Два базиса $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ (прямой, плоскости или пространства) называются *деформируемыми* друг в друга, если существуют такие векторные функции $\boldsymbol{a}_1(t), \ldots, \boldsymbol{a}_n(t)$ числового параметра $t \in [0,1]$, что:

1. Для любого $i = 1, \ldots, n$ вектор $\boldsymbol{a}_i(0)$ совпадает с вектором $\boldsymbol{a}_i$, а вектор $\boldsymbol{a}_i(1)$ — с вектором $\boldsymbol{b}_i$:

$$\boldsymbol{a}_1(0) = \boldsymbol{a}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{a}_n(0) = \boldsymbol{a}_n,$$
$$\boldsymbol{a}_1(1) = \boldsymbol{b}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{a}_n(1) = \boldsymbol{b}_n.$$

2. Для любого $i = 1, \ldots, n$ вектор $\boldsymbol{a}_i(t)$ непрерывно зависит от t.

3. Для любого $t \in [0, 1]$ векторы $\boldsymbol{a}_1(t), \ldots, \boldsymbol{a}_n(t)$ линейно независимы, т. е. составляют базис.

В этом случае о векторах $\boldsymbol{a}_1(t), \ldots, \boldsymbol{a}_n(t)$ говорят, что они составляют *деформацию*, связывающую базис $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ с базисом $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$.

Предложение 1. *Отношение деформируемости базисов является на множестве всех базисов отношением эквивалентности.*

Доказательство. Поскольку любой базис $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ может быть продеформирован сам в себя (соответствующую деформацию можно, например, определить формулой $\boldsymbol{a}_i(t) = \boldsymbol{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$), отношение деформируемости базисов рефлексивно; оно и симметрично, так как если базис $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ связан с базисом $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ деформацией $\boldsymbol{a}_1(t), \ldots, \boldsymbol{a}_n(t)$, то базис $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ связан с базисом $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, например, деформацией $\boldsymbol{b}_1(t) = \boldsymbol{a}_1(1-t), \ldots, \boldsymbol{b}_n(t) = \boldsymbol{a}_n(1-t)$. Таким образом, нам нужно доказать только транзитивность, т. е. что если существует деформация $\boldsymbol{a}_1(t), \ldots, \boldsymbol{a}_n(t)$, связывающая базис $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ с базисом $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, и деформация $\boldsymbol{b}_1(t), \ldots, \boldsymbol{b}_n(t)$, связывающая базис $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ с базисом $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$, то существует и деформация $\boldsymbol{c}_1(t), \ldots, \boldsymbol{c}_n(t)$, связывающая базис $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ с базисом $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$. Но такую деформацию ничего не стоит построить. Например, ее можно определить формулами

$$\boldsymbol{c}_i(t) = \begin{cases} \boldsymbol{a}_i(2t), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \boldsymbol{b}_i(2t-1), & \text{если } 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Тем самым предложение 1 полностью доказано.

Из этого предложения следует, что множество всех базисов распадается на классы деформируемых друг в друга базисов. Оказывается, что эти классы совпадают с классами одноименных базисов, т. е. другими словами, имеет место следующее

Предложение 2. *Два базиса* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ *и* $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ *тогда и только тогда одноименны, когда они деформируемы друг в друга.*

Доказательство. Пусть базисы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ деформируемы друг в друга и пусть $\boldsymbol{a}_1(t), \ldots, \boldsymbol{a}_n(t)$ — деформация, связывающая базис $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ с базисом $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$. Рассмотрим определитель $\Delta(t)$ матрицы перехода от базиса $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ к базису $\boldsymbol{a}_1(t), \ldots, \boldsymbol{a}_n(t)$. Он непрерывно зависит от t, нигде не обращается в нуль и равен единице при $t=0$. Поэтому для всех значений t этот определитель положителен (ибо непрерывная функция не может сменить знак, не обратившись в нуль). В частности, он положителен при $t=1$. Но определитель $\Delta(1)$ является как раз определителем матрицы перехода от базиса $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ к базису $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$.

Поэтому базисы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ одноименны.

Докажем теперь обратное утверждение (одноименные базисы деформируемы). Пусть сначала $n = 1$ (случай прямой).

Поскольку базисы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{b}_1$ одноименны, имеет место равенство

$$\boldsymbol{a}_1 = k\boldsymbol{b}_1,$$

где $k > 0$ (см. п. 1 § 2). Определим вектор-функцию $\boldsymbol{a}_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, формулой

$$\boldsymbol{a}_1(t) = (t + (1-t)k)\,\boldsymbol{b}_1.$$

Ясно, что $\boldsymbol{a}_1(0) = \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_1(1) = \boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{a}_1(t)$ непрерывно зависит от t. Кроме того, поскольку $t + (1-t)k \neq 0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, вектор $\boldsymbol{a}_1(t)$ является базисом. Следовательно, вектор-функция $\boldsymbol{a}_1(t)$ является деформацией, связывающей базис $\boldsymbol{a}_1$ с базисом $\boldsymbol{b}_1$.

При $n > 1$ нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ — *произвольный базис на плоскости. Тогда любой другой базис* $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ *деформируем либо в базис* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$, *либо в базис* $\boldsymbol{a}_1, -\boldsymbol{a}_2$.

Аналогично, пусть $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ — *произвольный базис в пространстве. Тогда любой другой базис* $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ *деформируем либо в базис* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$, *либо в базис* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, -\boldsymbol{a}_3$.

Предполагая эту лемму справедливой, мы можем без труда завершить доказательство предложения 2. Действительно, пусть базисы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ одноименны (где $n=2, 3$). Согласно лемме базис $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ деформируем либо в базис $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, либо в базис $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, -\boldsymbol{a}_n$. Пусть базис $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ деформируем в базис $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, -\boldsymbol{a}_n$. Тогда по уже доказанному, базис $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, -\boldsymbol{a}_n$ одноименен с базисом

$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, а следовательно, и с базисом $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Но это невозможно, поскольку матрица перехода от базиса $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, -\boldsymbol{a}_n$ к базису $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и потому ее определитель отрицателен. Следовательно, базис $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ деформируем в базис $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

Предложение 2 означает, что

ориентации (прямой, плоскости или пространства) мы можем отождествлять с классами деформируемых друг в друга базисов.

Доказательство леммы. В первую очередь мы рассмотрим случай плоскости.

Отложив векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ от некоторой точки O, мы можем написать, что

$$\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{OA}_1, \quad \boldsymbol{a}_2 = \overrightarrow{OA}_2, \quad \boldsymbol{b}_1 = \overrightarrow{OB}_1, \quad \boldsymbol{b}_2 = \overrightarrow{OB}_2.$$

Любой поворот вокруг точки O треугольника OB_1B_2 представляет собой, очевидно, некоторую деформацию базиса $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ (вопрос здесь может возникнуть только в отношении непрерывности; интуитивно она очевидна, а для ее строгого доказательства достаточно написать формулы, выражающие, как меняются при этом повороте векторы $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$; такие формулы далее в своем месте мы получим, а пока мы предоставляем вывести их читателю). В то же время ясно, что таким поворотом мы можем совместить прямую OB_1 с прямой OA_1 и, более того, перевести вектор $\boldsymbol{b}_1$ в вектор прямой OA_1, одноименный с вектором $\boldsymbol{a}_1$.

Сделав это (и обозначив повернутые векторы прежними символами $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$), мы будем теперь, оставляя вектор $\boldsymbol{b}_1$ неподвижным, вращать вокруг точки O лишь один вектор $\boldsymbol{b}_2 = \overrightarrow{OB}_2$, следя за тем, чтобы траектория точки B_2 не пересекала прямую $OB_1 = OA_1$. Ясно, что при этом мы получаем деформацию базиса $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$. Столь же ясно, что этой деформацией мы можем перевести вектор $\boldsymbol{b}_2$ в вектор, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a}_2$ и потому одноименный (как вектор прямой OA_2) либо вектору $\boldsymbol{a}_2$, либо вектору $-\boldsymbol{a}_2$.

К получившимся векторам $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$ остается теперь применить (к каждому отдельно) описанную выше (при рассмотрении случая $n=1$) деформацию, переводящую их в векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\pm\boldsymbol{a}_2$.

Поскольку комбинация нескольких последовательно выполненных деформаций также является деформацией, наша лемма тем самым для случая плоскости полностью доказана.

Случай пространства рассматривается аналогично. Пусть

$$\boldsymbol{a}_1=\overrightarrow{OA_1},\quad \boldsymbol{a}_2=\overrightarrow{OA_2},\quad \boldsymbol{a}_3=\overrightarrow{OA_3},$$
$$\boldsymbol{b}_1=\overrightarrow{OB_1},\quad \boldsymbol{b}_2=\overrightarrow{OB_2},\quad \boldsymbol{b}_3=\overrightarrow{OB_3}.$$

Вращая тетраэдр $OB_1B_2B_3$ вокруг точки O, мы можем совместить плоскость OB_1B_2 с плоскостью OA_1A_2 и, более того, прямую OB_1 с прямой OA_1. Мы можем даже добиться того, чтобы вектор $\boldsymbol{b}_1$ перешел в вектор, одноименный с вектором $\boldsymbol{a}_1$, и чтобы векторы $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ составляли базис плоскости OA_1A_2, одноименный с базисом $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$. Проделав затем на плоскости OA_1A_2 описанную выше (при $n=2$) деформацию (и оставляя вектор $\boldsymbol{b}_3$ неподвижным), мы продеформируем базис $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ в базис вида $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_3$. Остается теперь, не трогая векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, повернуть вектор $\boldsymbol{b}_3$ так, чтобы он стал коллинеарным вектору $\boldsymbol{a}_3$, и затем применить уже известную нам деформацию на прямой. В результате всех этих деформаций мы и переведем базис $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ в базис вида $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\pm\boldsymbol{a}_3$. Тем самым наша лемма полностью доказана.

Замечание 1. Изложенное доказательство леммы может вызвать возражения по крайней мере по двум пунктам. Во-первых, оно использует «механические» понятия, которые мы в свое время (см. § 1) условились по возможности исключать. Во-вторых, хотя вся излагаемая здесь теория по существу не связана с понятием измерения (носит, как говорят, *аффинный характер*; см. ниже), в этом доказательстве используются преобразования (вращения), определение которых существенно опирается на понятие длины. Оба эти возражения можно снять, перестроив доказательство на алгебраический лад, для чего достаточно описать все требуемые преобразования формулами, вообще не упоминая об их геометрическом смысле. Впрочем, если уж становиться на этот путь, то можно получить и более простые формулы (но уже не имеющие столь прозрачного элементарно-геометрического истолкования). Мы сделаем это для плоскости, оставляя читателю аналогичную «алгебраизацию» доказательства нашей леммы для случая пространства.

Пусть $\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$ — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ к базису $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$. Таким образом,

$$\boldsymbol{b}_1=p_1\boldsymbol{a}_1+p_2\boldsymbol{a}_2,$$
$$\boldsymbol{b}_2=q_1\boldsymbol{a}_1+q_2\boldsymbol{a}_2.$$

Рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = p_1q_2 - p_2q_1$$

этой матрицы. Как мы знаем, он отличен от нуля.

Случай 1. Числа p_1q_2 и p_2q_1 имеют разные знаки (и оба отличны от нуля). В этом случае для любого значения параметра t число

$$p_1q_2 - (1-t)^2 p_2q_1,$$

очевидно, отлично от нуля. Но это число является определителем матрицы

$$\begin{pmatrix} p_1 & (1-t)\,q_1 \\ (1-t)\,p_2 & q_2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому, положив

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_1(t) &= p_1\boldsymbol{a}_1 + (1-t)\,p_2\boldsymbol{a}_2, \\ \boldsymbol{b}_2(t) &= (1-t)\,q_1\boldsymbol{a}_1 + q_2\boldsymbol{a}_2, \end{aligned} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

мы получим деформацию базиса $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ в базис $\boldsymbol{b}'_1 = \boldsymbol{b}_1(1)$, $\boldsymbol{b}'_2 = \boldsymbol{b}_2(1)$, с которым базис $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ связан диагональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}.$$

Случай 2. Числа p_1q_2 и p_2q_1 имеют один и тот же знак (и одно из них, возможно, равно нулю). Если при этом $|p_1q_2| > |p_2q_1|$, то будет, как легко видеть, применима та же самая деформация, что и выше, и мы снова сможем продеформировать базис $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ в базис $\boldsymbol{b}'_1$, $\boldsymbol{b}'_2$, связанный с базисом $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ диагональной матрицей перехода. Однако, если $|p_1q_2| < |p_2q_1|$ (заметим, что равенство $|p_1q_2| = |p_2q_1|$ невозможно), то такую деформацию мы применить не сможем и вместо нее должны будем рассмотреть, скажем, деформацию

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_1(t) &= (1-t)\,p_1\boldsymbol{a}_1 + p_2\boldsymbol{a}_2, \\ \boldsymbol{b}_2(t) &= q_1\boldsymbol{a}_1 + (1-t)\,q_2\boldsymbol{a}_2, \end{aligned}$$

переводящую базис $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ в базис $\boldsymbol{b}'_1$, $\boldsymbol{b}'_2$, с которым базис $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ связан матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & q_1 \\ p_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тем не менее, применив еще дополнительную деформацию

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}'_1(t) &= \left(\cos\tfrac{\pi}{2}\,t\right)\boldsymbol{b}'_1 + \left(-\sin\tfrac{\pi}{2}\,t\right)\boldsymbol{b}'_2, \\ \boldsymbol{b}'_2(t) &= \left(\sin\tfrac{\pi}{2}\,t\right)\boldsymbol{b}'_1 + \left(\cos\tfrac{\pi}{2}\,t\right)\boldsymbol{b}'_2, \end{aligned} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

мы и в этом случае продеформируем базис b_1, b_2 в базис, с которым базис a_1, a_2 связан диагональной матрицей перехода.

Таким образом, мы без ограничения общности можем с самого начала считать, что базис b_1, b_2 связан с базисом a_1, a_2 диагональной матрицей перехода:

$$\begin{aligned} b_1 &= pa_1, \\ b_2 &= qa_2 \end{aligned}$$

(мы здесь убрали уже ненужные индексы). Но в этом предположении мы можем к каждому из векторов b_1, b_2 применить деформацию, использованную нами в случае $n = 1$. Например, при $p > 0$ мы можем для вектора b_1 рассмотреть деформацию $(t + (1 - t)p)a_1$, а при $p < 0$ — деформацию $(-t + (1 - t)p)a_1 = (t + (1 - t)(-p))(-a_1)$. В результате мы продеформируем базис b_1, b_2 в базис (векторы которого мы снова будем обозначать через b_1, b_2), связанный с базисом a_1, a_2 формулами

$$\begin{aligned} b_1 &= \pm a_1, \\ b_2 &= \pm a_2. \end{aligned}$$

Если $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$ или $b_1 = a_1$, $b_2 = -a_2$, то все в порядке: лемма доказана. Пусть $b_1 = -a_1$, $b_2 = a_2$ или $b_1 = -a_1$, $b_2 = -a_2$. Тогда мы применим еще дополнительную деформацию

$$\begin{aligned} b_1(t) &= (\cos \pi t)\, b_1 + (-\sin \pi t)\, b_2, \\ b_2(t) &= (\sin \pi t)\, b_1 + (\cos \pi t)\, b_2. \end{aligned}$$

Ясно, что это действительно деформация и что она переводит базис b_1, b_2 в базис $-b_1$, b_2, т. е. при наших предположениях либо в базис a_1, a_2, либо в базис a_1, $-a_2$.

Тем самым лемма полностью доказана и этим методом (для случая плоскости).

Задание. Выясните геометрический смысл деформаций, участвующих в «алгебраическом» доказательстве леммы.

Упражнение. Аналогичным образом докажите лемму для случая пространства.

6. Резюме

Подведем итоги.

Наглядный смысл ориентации прямой состоит в выборе некоторого (из двух возможных) направления движения по этой прямой, а ориентации плоскости — в выборе направления вращения в этой плоскости (т. е. задания направления движения по любой окружности в плоскости).

Аналогично, в пространстве ориентации можно представлять себе как выбор одного из двух возможных типов винтового движения («правовинтового» и «левовинтового»).

Формально ориентацию прямой, плоскости или пространства можно определить тремя равносильными способами:

1) либо как класс *одноименных базисов*;

2) либо как класс *одноименных упорядоченных систем точек общего положения*, состоящих в случае прямой из двух точек, в случае плоскости — из трех точек и в случае пространства — из четырех точек;

3) либо как класс *деформируемых друг в друга базисов.*

При этом

1) ориентация прямой в плоскости (в пространстве) однозначно определяется заданием в этой плоскости (в пространстве) некоторой стороны произвольной прямой (плоскости), не параллельной данной прямой;

2) ориентация плоскости (пространства) однозначно определяется заданием в плоскости (в пространстве) произвольной ориентированной прямой (плоскости) вместе с некоторой ее стороной;

3) обратно, ориентация прямой в плоскости (плоскости в пространстве) однозначно определяется заданием стороны этой прямой (плоскости) и некоторой ориентации плоскости (пространства);

4) наконец, сторона прямой в плоскости (плоскости в пространстве) однозначно определяется заданием ориентаций прямой и плоскости (плоскости и пространства).

Свойства 2), 3) и 4) можно объединить в следующей формулировке:

Из трех объектов:

а) *ориентация прямой в плоскости (плоскости в пространстве)*,

б) *ориентация плоскости (пространства)*,

в) *сторона прямой в плоскости (плоскости в пространстве)*

любые два однозначно определяют третий.

Дополнение. О понятии угла

Известно, что понятие угла довольно трудно строго определить в достаточно общем виде. Возникающие здесь трудности объясняются не только тем, что слово «угол» используется для обозначения целого ряда различных, хотя и связанных друг с другом понятий (фигура, образованная парой лучей с общим началом; часть плоскости, содержащаяся «между» двумя такими лучами; число, являющееся мерой поворота, на который нужно повернуть один луч до совпадения с другим; аргумент тригонометрических функций), но и реальной сложностью понятия угла.

В этом дополнении мы обсудим понятие угла, оставаясь на наглядных, не формальных позициях.

Термин *угол* мы будем использовать в следующих двух основных значениях:

а) фигура, образованная парой лучей с общим началом;

б) число, измеряющее (в радианах) поворот, на который нужно повернуть один луч до совпадения с другим.

Как правило, это двойное понимание термина «угол» к недоразумениям не приводит. В случаях, когда такое недоразумение возможно, мы будем называть угол в смысле б) *мерой угла.*

По определению, мера угла θ заключена в пределах от 0 до π. Случаи, когда она равна 0 или π, не исключаются:

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

При $\theta = 0$ угол называется *вырожденным*, а при $\theta = \pi$ — *развернутым.*

Пусть две прямые α и β лежат в одной плоскости и пересекаются в (единственной) точке O. Эта точка делит каждую прямую на два луча. Выбрав на каждой из прямых по такому лучу, мы получим некоторый угол. В зависимости от выбора лучей возникает, таким образом, четыре угла. Они называются (элементарно-геометрическими) *углами между прямыми α и β.* Эти углы попарно равны (вертикальные углы), так что фактически угол между прямыми имеет только два значения θ_1 и θ_2. Сумма этих углов равна π (смежные углы). В частности, равенство $\theta_1 = \theta_2$ возможно только при $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$, т. е. для перпендикулярных прямых.

Если прямые α и β параллельны (в частности, совпадают), углы θ_1 и θ_2, по определению, считаются равными 0 и π (подчеркнем, что здесь мы нуждаемся в отдельном определении).

Угол между прямыми, не лежащими в одной плоскости, равен, по определению, углу между параллельными им прямыми, лежащими в одной плоскости.

Двузначность угла между прямыми, естественно, очень неудобна. Положение может быть исправлено, если предположить прямые α и β ориентированными. В этом случае на каждой из этих прямых выделяется единственный луч с началом в точке O (так называемый *положительный луч*, точки A которого характеризуются требованием, чтобы вектор $\overrightarrow{OA}$ был положительно ориентирован), и тем самым между прямыми возникает единственный угол θ. Этот угол называется *углом между ориентированными прямыми α и β.*

Для параллельных прямых, по определению, полагается $\theta = 0$, если прямые ориентированы одинаково (см. конец п. 4), и $\theta = \pi$, если их ориентации различны.

По определению,

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

и потому *угол θ однозначно определен, если известен его косинус* $\cos\theta$.

Если плоскость Π, в которой расположены (ориентированные) прямые α и β, также ориентирована, то определен так называемый *ориентированный угол φ от прямой α к прямой β.* По определению,

$$\varphi = \pm\,\theta,$$

причем $\varphi = \theta$, если произведение ориентаций прямых α и β (см. п. 3) совпадает с ориентацией плоскости Π, и $\varphi = -\theta$ в противном случае. Если прямые α и β параллельны, то, по определению, $\varphi = \theta$.

Таким образом,

$$-\pi < \varphi \leqslant \pi$$

и *угол* φ *однозначно определен, если известны его тригонометрические функции* $\sin\varphi$ *и* $\cos\varphi$.

Наглядно φ является углом, на который нужно в заданном на плоскости Π направлении вращения повернуть прямую α так, чтобы она совпала с прямой β (и при этом совпали бы ориентации этих прямых).

В отличие от угла θ угол φ зависит от порядка, в котором рассматриваются прямые α и β: при перестановке этих прямых он меняет знак (за исключением, правда, случая $\varphi = \pi$, когда угол φ остается — в силу принятых выше определений — тем же самым).

Во избежание исключений и утомительных оговорок иногда удобно считать, что угол φ принимает значения из всей числовой оси:

$$-\infty < \varphi < +\infty,$$

предполагая при этом, что значения, отличающиеся на 2π, выражают одну и ту же геометрическую ситуацию. Например, в силу этого соглашения утверждение об изменении знака угла φ при перестановке прямых α и β будет верно уже без всяких исключений.

§ 5. МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЕКТОРОВ

В предыдущих параграфах измерение длин играло чисто вспомогательную роль (а измерение углов вообще не встречалось). Более того, при желании понятие длины можно было бы совсем исключить (правда, ценой некоторого усложнения теории). Часть геометрии, не опирающаяся на понятие длины (и величины угла), называется *аффинной геометрией* [1]). Таким образом, можно сказать, что до сих пор мы занимались *аффинной теорией векторов*. Теперь же мы перейдем к их *метрической теории*, существенно опирающейся на понятие измерения.

Во всем этом параграфе мы будем предполагать выбранным и фиксированным некоторый эталон длины (один и тот же для всех прямых).

1. Длина вектора и угол между векторами

Важнейшими метрическими понятиями являются понятия длины вектора и угла между двумя векторами.

Длину $|\boldsymbol{a}|$ вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ мы определили в п. 2 § 2 для векторов на прямой посредством формулы

$$|\boldsymbol{a}| = |AB|.$$

То же самое определение мы сохраним и для векторов на плоскости или в пространстве. Оно, конечно, нуждается в проверке корректности, т. е. в доказательстве того, что

---

[1]) Более четкое определение аффинной геометрии мы дадим ниже, когда у нас будет подготовлен необходимый для этого материал.