Таким образом,

$$-\pi < \varphi \leqslant \pi$$

и *угол* φ *однозначно определен, если известны его тригонометрические функции* $\sin\varphi$ *и* $\cos\varphi$.

Наглядно φ является углом, на который нужно в заданном на плоскости Π направлении вращения повернуть прямую α так, чтобы она совпала с прямой β (и при этом совпали бы ориентации этих прямых).

В отличие от угла θ угол φ зависит от порядка, в котором рассматриваются прямые α и β: при перестановке этих прямых он меняет знак (за исключением, правда, случая $\varphi = \pi$, когда угол φ остается — в силу принятых выше определений — тем же самым).

Во избежание исключений и утомительных оговорок иногда удобно считать, что угол φ принимает значения из всей числовой оси:

$$-\infty < \varphi < +\infty,$$

предполагая при этом, что значения, отличающиеся на 2π, выражают одну и ту же геометрическую ситуацию. Например, в силу этого соглашения утверждение об изменении знака угла φ при перестановке прямых α и β будет верно уже без всяких исключений.

§ 5. МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЕКТОРОВ

В предыдущих параграфах измерение длин играло чисто вспомогательную роль (а измерение углов вообще не встречалось). Более того, при желании понятие длины можно было бы совсем исключить (правда, ценой некоторого усложнения теории). Часть геометрии, не опирающаяся на понятие длины (и величины угла), называется *аффинной геометрией*[1]). Таким образом, можно сказать, что до сих пор мы занимались *аффинной теорией векторов*. Теперь же мы перейдем к их *метрической теории*, существенно опирающейся на понятие измерения.

Во всем этом параграфе мы будем предполагать выбранным и фиксированным некоторый эталон длины (один и тот же для всех прямых).

1. Длина вектора и угол между векторами

Важнейшими метрическими понятиями являются понятия длины вектора и угла между двумя векторами.

Длину $|\boldsymbol{a}|$ вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ мы определили в п. 2 § 2 для векторов на прямой посредством формулы

$$|\boldsymbol{a}| = |AB|.$$

То же самое определение мы сохраним и для векторов на плоскости или в пространстве. Оно, конечно, нуждается в проверке корректности, т. е. в доказательстве того, что

[1]) Более четкое определение аффинной геометрии мы дадим ниже, когда у нас будет подготовлен необходимый для этого материал.

эквиполлентные направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{A_1B_1}$ *имеют равные длины.*

Но это очевидно. Действительно, если отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ расположены на одной прямой, то равенство их длин уже доказано в п. 2 § 2. Если же эти отрезки расположены на различных прямых (и потому, в частности, невырождены), то они являются противоположными сторонами некоторого параллелограмма и потому их длины одинаковы.

Заметим, что

длина $|\boldsymbol{a}|$ *вектора* $\boldsymbol{a}$ *тогда и только тогда равна нулю, когда* $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

Перейдем теперь к углу между векторами.

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два отличных от нуля вектора на плоскости. Отложив их от некоторой точки O, мы можем написать, что $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$. Рассмотрим прямые $\alpha = OA$ и $\beta = OB$, ориентированные таким образом, чтобы векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рассматриваемые как векторы на прямых) были положительно ориентированными (см. п. 1 § 2).

Определение 1. Угол θ между ориентированными прямыми α и β (см. дополнение к § 4) называется *углом между векторами* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ и обозначается символом $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$.

Это определение нуждается, конечно, в проверке корректности, т. е. в доказательстве того, что угол $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ не зависит от выбора точки O. Мы докажем корректность, выразив этот угол через величины, от точки O заведомо не зависящие.

Рассмотрим с этой целью проекцию $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB'}$ вектора $\boldsymbol{b}$ на прямую α (на направление вектора $\boldsymbol{a}$) параллельно прямой, перпендикулярной прямой α. (Такого рода проекции называются *ортогональными* или *прямоугольными проекциями*; они должны быть знакомы читателю из школьного курса геометрии. В этом параграфе никаких проекций, кроме ортогональных, мы рассматривать не будем.)

Предположим сначала, что прямые α и β не параллельны и не перпендикулярны. Тогда среди двух элементарно-геометрических углов θ_1 и θ_2 между этими прямыми можно выделить наименьший (острый) угол. Обозначим этот угол символом θ'.

Угол θ' является не чем иным, как углом при вершине O в прямоугольном треугольнике OBB', и потому

$$\cos\theta' = \frac{|OB'|}{|OB|} = \frac{|\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{b}|}.$$

С углом θ угол θ' связан, очевидно, соотношениями

$$\theta = \begin{cases} \theta', & \text{если угол } \theta \text{ острый,} \\ \pi - \theta', & \text{если угол } \theta \text{ тупой.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$\cos\theta = \begin{cases} \cos\theta', & \text{если угол } \theta \text{ острый,} \\ -\cos\theta', & \text{если угол } \theta \text{ тупой.} \end{cases}$$

С другой стороны, ясно, что если угол θ острый, то базисы $\boldsymbol{a}$ и $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ прямой α одноименны, а если угол θ тупой, то эти базисы разноименны. (Наглядно этот факт очевиден — достаточно сделать чертеж; формальное доказательство мы опустим.) Другими словами, для величины $(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b})$ вектора $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ (см. п. 2 § 2) на ориентированной указанным выше образом прямой α имеют место равенства

$$(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}) = \begin{cases} |\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}|, & \text{если угол } \theta \text{ острый,} \\ -|\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}|, & \text{если угол } \theta \text{ тупой.} \end{cases}$$

Сопоставляя все сказанное, мы немедленно получаем, что как при тупом, так и при остром угле θ справедливо равенство

$$\cos\theta = \frac{(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|}. \tag{1}$$

Эта формула остается справедливой и тогда, когда прямые α и β перпендикулярны $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$, поскольку в этом случае обе ее стороны равны нулю, а также когда прямые α и β параллельны ($\theta = 0$ или π), поскольку при $\theta = 0$ обе ее стороны равны, очевидно, $+1$, а при $\theta = \pi$ равны -1.

Таким образом, мы доказали, что

для угла θ между любыми двумя (отличными от нуля) векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ справедлива формула (1).

Поскольку, по определению, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, косинус $\cos\theta$ однозначно определяет угол θ, и следовательно,

формула (1) *однозначно определяет угол между векторами.*

В частности, это доказывает корректность определения угла θ, поскольку величина

$$\frac{(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|}$$

не зависит от выбора точки O.

Замечание 1. Можно «обратить» предыдущие рассуждения и принять формулу (1) за о п р е д е л е н и е угла θ между векторами. После этого можно определить угол между двумя ориентированными прямыми как угол между их любыми положительно ориентированными базисами (это определение нуждается, конечно, в проверке корректности). Это доставляет нам уже вполне строгое определение угла между прямыми.

Угол можно определить и между векторами на прямой. Именно, угол $\theta = (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ считается, по определению, равным нулю, если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ одноименны (см. п. 1 § 2), и равным π в противном случае. Формула (1) сохраняется и для векторов на прямой, если под вектором $(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b})$ понимать вектор $\boldsymbol{b}$.

Таким образом, угол между двумя коллинеарными векторами на плоскости, т. е. векторами, параллельными некоторой прямой α, не зависит от того, рассматриваем ли мы эти векторы как векторы на плоскости или как векторы на прямой α. В обоих случаях этот угол равен нулю, если векторы «одинаково направлены» (их отношение положительно), и равен π, если они «противоположно направлены» (их отношение отрицательно).

Наконец, угол между векторами в пространстве сводится к углу между векторами на плоскости, поскольку любые два вектора параллельны некоторой плоскости. (Независимость этого угла от выбора плоскости очевидна, поскольку для неколлинеарных векторов эта плоскость определена — с точностью до параллельности — единственным образом, а угол между коллинеарными векторами сводится к углу между векторами на прямой.) Для угла между векторами в пространстве формула (1) также сохраняется (только, конечно, под $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b}$ следует теперь понимать проекцию параллельно плоскости, перпендикулярной прямой $\alpha = OA$).

По самому определению, угол между двумя векторами в пространстве не зависит от того, рассматриваем ли мы эти векторы как векторы в пространстве или как векторы в соответствующей плоскости.

Угол между векторами, среди которых хотя бы один равен нулю, не определяется.

На ориентированной плоскости наряду с углом θ между векторами $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ можно рассматривать также угол φ *от вектора* $\boldsymbol{a}$ *к вектору* $\boldsymbol{b}$. По определению, он равен (ориентированному) углу от прямой $\alpha = OA$ к прямой $\beta = OB$. С углом θ при $0 \leqslant \theta < \pi$ этот угол связан соотношениями

$$\varphi = \pm \theta;$$

при $\theta = \pi$ имеем $\varphi = \pi$. Угол φ однозначно определен, если известны его тригонометрические функции $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$.

Пусть α — ориентированная прямая и $\boldsymbol{b}$ — произвольный отличный от нуля вектор. Ясно, что для любого положительно ориентированного вектора $\boldsymbol{a}$ прямой α угол от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$ не зависит от выбора вектора $\boldsymbol{a}$, т. е. определяется исключительно прямой α и вектором $\boldsymbol{b}$. Этот угол называется *наклоном* вектора $\boldsymbol{b}$ к прямой α.

2. Скалярное произведение векторов

По самому определению угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не зависит от их порядка, т. е. равен углу между векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}$. Сопоставляя это замечание с формулой (1) предыдущего пункта, мы немедленно получаем, что для любых двух отличных от нуля векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (на прямой, в плоскости или в пространстве) имеет место соотношение

$$\frac{(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|}.$$

Умножив это равенство на произведение $|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$ длин данных векторов, мы получим соотношение

$$|\boldsymbol{a}| \cdot (\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}| \cdot (\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}). \tag{1}$$

Предположим теперь, что один из рассматриваемых векторов (скажем, вектор $\boldsymbol{a}$) равен нулю, тогда как другой вектор (вектор $\boldsymbol{b}$) по-прежнему отличен от нуля. В этом случае имеет смысл только выражение $|\boldsymbol{b}| \cdot (\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a})$ (причем оно равно нулю), тогда как выражение $|\boldsymbol{a}| \cdot (\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b})$ смысла не имеет (ибо вектор $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b}$ при $\boldsymbol{a} = 0$ не определен). В связи с этим удобно принять следующее общее

Соглашение. Произведение двух величин, одна из которых равна нулю, а другая не определена, считается, по определению, равным нулю.

Это соглашение оправдывается тем, что как бы мы не доопределили второй множитель, произведение все равно будет равно нулю (за счет равенства нулю первого множителя).

В соответствии с этим соглашением мы можем теперь утверждать, что

равенство (1) *справедливо для любых двух векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$.

Определение 1. Число $|\boldsymbol{a}| \cdot (\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b})$ (или $|\boldsymbol{b}| \cdot (\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a})$) называется *скалярным произведением* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и обозначается символом $\boldsymbol{ab}$ (а также символом $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$):

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}| \cdot (\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}| \cdot (\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}).$$

Замечание 1. Эпитет «скалярное» обязан своим происхождением тому, что числа (а значение скалярного произведения, по определению, является числом) часто называются *скалярами.*

Пользуясь формулой (1) предыдущего пункта, мы можем формулу для скалярного произведения записать в следующем более симметричном виде:

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}). \tag{2}$$

В соответствии с принятым выше общим соглашением эта формула справедлива для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Таким образом,

скалярное произведение векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними.

Если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, то $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})=0$, и потому

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2. \tag{3}$$

Таким образом,

скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

Эту формулу удобно писать «наоборот»:

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}. \tag{3'}$$

Таким образом,

длина вектора равна корню квадратному из его скалярного квадрата.

Аналогично, написав «наоборот» формулу (2), мы получим для угла $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ формулу

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}. \tag{2'}$$

Таким образом,

косинус угла между (отличными от нуля) векторами равен их скалярному произведению, деленному на произведение их длин.

Замечание 2. Мы видим, что через скалярное произведение выражаются обе основные метрические характеристики векторов (длина и угол).

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=0.$$

Таким образом,

векторы ортогональны, если хотя бы один из них равен нулю или если эти векторы перпендикулярны (угол между ними равен $\pi/2$).

Докажем теперь следующую важную теорему:

Теорема 1. *Для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и любого числа k имеют место соотношения*

1. $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$,
2. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}$,
3. $(k\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})$,
4. $\boldsymbol{a}^2\geqslant 0$, *причем* $\boldsymbol{a}^2=0$ *тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

Доказательство. Свойство 1 очевидно. Свойство 2 непосредственно вытекает из соответствующего свойства величин проекций:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}))=|\boldsymbol{c}|((\mathrm{pr}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a})+(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}))=$$
$$=|\boldsymbol{c}|(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a})+|\boldsymbol{c}|(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}.$$

Свойство 3 доказывается аналогично:

$$(k\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|(\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\, k\boldsymbol{a}) = k|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = k(\boldsymbol{ab}).$$

Наконец, свойство 4 непосредственно вытекает из формулы (3).

Свойство 1 — это свойство коммутативности, свойство 2 — свойство дистрибутивности, свойство 3 — свойство однородности, а свойство 4 — свойство положительной определенности. Вместе свойства 2 и 3 называются свойством линейности. Свойства коммутативности и линейности показывают, что вычисления со скалярным произведением подчиняются обычным правилам арифметики (раскрытие скобок и т. п.).

В дальнейшем мы постараемся (когда это возможно) пользоваться только доказанными четырьмя свойствами скалярного умножения и не будем обращаться к его определению (2).

3. Применение скалярного умножения к доказательству геометрических теорем

Пользуясь скалярным умножением, можно чисто алгебраически доказывать разнообразные теоремы геометрии, связанные с понятиями длины и угла.

Пример 1. Пусть ABC — произвольный прямоугольный треугольник (с прямым углом в вершине C). Рассмотрим векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{CB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB}$. Так как $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{ab} = 0$, то $|\boldsymbol{c}|^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2$, т. е. $|AB|^2 = |CB|^2 + |AC|^2$. Тем самым мы доказали теорему Пифагора (квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов).

Заметим, что «в векторной форме» теорему Пифагора можно, таким образом, сформулировать в следующем виде:

для любых двух ортогональных векторов $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *имеет место равенство*

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2.$$

В этой форме она, очевидно, справедлива и в случае, когда хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{b}$ равен нулю.

Пример 2. Пусть $ABCD$ — произвольный параллелограмм. Рассмотрим векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BD}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$ и $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{AD}$. Ясно, что $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{a}$. Поэтому

$$|\boldsymbol{b}|^2 = \boldsymbol{b}^2 = (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{a})^2 = \boldsymbol{d}^2 - 2\,\boldsymbol{da} + \boldsymbol{a}^2,$$

$$|\boldsymbol{c}|^2 = \boldsymbol{c}^2 = (\boldsymbol{d} + \boldsymbol{a})^2 = \boldsymbol{d}^2 + 2\,\boldsymbol{da} + \boldsymbol{a}^2,$$

и следовательно,

$$|\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{c}|^2 = 2(|\boldsymbol{d}|^2 + |\boldsymbol{a}|^2),$$

т. е.

$$|BD|^2 + |AC|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + |AB|^2 + |CD|^2.$$

Тем самым мы доказали известную теорему о диагоналях параллелограмма (сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон).

Заметим, что в «векторной форме» эта теорема сводится к тривиальному алгебраическому тождеству $(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a})^2=2(\boldsymbol{d}^2+\boldsymbol{a}^2)$.

Пример 3. Рассмотрим два произвольных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Возводя равенство (2) п. 2 в квадрат и учитывая, что $\cos^2\theta\leqslant 1$, мы немедленно получим, что

$$(\boldsymbol{ab})^2\leqslant|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2,$$

т. е. что

$$|\boldsymbol{ab}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|,$$

или иначе — что

$$(\boldsymbol{ab})^2\leqslant\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2. \qquad (1)$$

Это важное неравенство называется неравенством Коши — Буняковского.

Легко видеть, что

неравенство Коши — Буняковского тогда и только тогда вырождается в равенство, когда векторы $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *коллинеарны.*

Замечание 1. Мы доказали неравенство Коши — Буняковского, пользуясь определением скалярного произведения. Однако его можно легко доказать и лишь на основе перечисленных в теореме 1 п. 2 свойств. Действительно, рассмотрим вектор $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$, где t — произвольное вещественное число. Согласно свойству 4 для любого t имеет место неравенство $(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})^2\geqslant 0$, т. е. неравенство

$$\boldsymbol{a}^2+2(\boldsymbol{ab})t+\boldsymbol{b}^2t^2\geqslant 0.$$

Но из алгебры известно, что если квадратный трехчлен принимает лишь неотрицательные значения, то его дискриминант (подкоренное выражение в формуле для корней квадратного уравнения) не положителен. В нашем случае этот дискриминант равен $(\boldsymbol{ab})^2-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$, так что $(\boldsymbol{ab})^2-\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\leqslant 0$, т. е. $(\boldsymbol{ab})^2\leqslant\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$.

Из неравенства Коши — Буняковского вытекает, что

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2\leqslant|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|^2=(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2$$

и аналогично

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2\geqslant|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|^2=(|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|)^2.$$

Извлекая квадратный корень, мы получаем, что

для любых векторов $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *имеют место неравенства*

$$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|. \qquad (2)$$

При этом легко видеть, что

для неколлинеарных векторов оба неравенства (2) — *строгие.*

Неравенства (2) выражают (для неколлинеарных векторов) известную теорему о сторонах треугольника (длина стороны треугольника меньше суммы длин других его сторон и больше их разности). Поэтому неравенство (2) называется обычно **неравенством треугольника** (даже и в случае коллинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$).

Для векторов на прямой неравенство (2) равносильно известному неравенству для абсолютной величины суммы двух вещественных чисел.

4. Выражение скалярного произведения в координатах

Определение 1. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — произвольный базис (на прямой, в плоскости или в пространстве). Попарные скалярные произведения

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j$$

векторов этого базиса называются его *метрическими коэффициентами.*

Таким образом, при $n = 1$ (случай прямой) имеется только один метрический коэффициент g_{11}, равный квадрату длины единственного базисного вектора e_1, при $n = 2$ (случай плоскости) имеется четыре метрических коэффициента $g_{11} = \boldsymbol{e}_1^2$, $g_{12} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$, $g_{21} = \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1$, $g_{22} = \boldsymbol{e}_2^2$, которые мы будем записывать в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

и, наконец, при $n = 3$ (случай пространства) имеется девять метрических коэффициентов, составляющих матрицу

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Эти метрические коэффициенты не независимы. Именно, во-первых, ясно, что они симметрично зависят от индексов, т. е.

$$g_{ij} = g_{ji}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, при $n = 2$ имеется на самом деле только три метрических коэффициента: g_{11}, g_{22} и $g_{12} = g_{21}$, а при $n = 3$ — только шесть: g_{11}, g_{22}, g_{33} и $g_{12} = g_{21}$, $g_{23} = g_{32}$, $g_{13} = g_{31}$.

Во-вторых, метрические коэффициенты должны удовлетворять некоторым неравенствам, вытекающим из положительной определенности скалярного произведения. Например, поскольку $g_{11} = \boldsymbol{e}_1^2$, то

$$g_{11} > 0. \tag{1}$$

Далее, согласно неравенству Коши — Буняковского $(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)^2 < \boldsymbol{e}_1^2\boldsymbol{e}_2^2$, т. е.

$$g_{12}^2 < g_{11}g_{22}.$$

Это условие можно переписать также в следующем «детерминантном» виде:

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0. \qquad (2)$$

Можно показать (мы это сделаем позже; см. п. 5 § 6), что при $n = 3$ выполняется аналогичное неравенство

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0. \qquad (3)$$

Оказывается, что этих условий уже достаточно, т. е. *для любой квадратной симметрической матрицы* (g_{ij}) *порядка* $n \leqslant 3$, *удовлетворяющей условию* (1) *при* $n = 1$, *условиям* (1) *и* (2) *при* $n = 2$ *и условиям* (1), (2) *и* (3) *при* $n = 3$, *существует базис* (*соответственно на прямой, в плоскости или в пространстве*), *матрицей метрических коэффициентов которого эта матрица является.*

Упражнение. Докажите это утверждение.

Над матрицами с векторными элементами мы можем производить те же действия, что и над векторами. В частности, умея перемножать векторы, мы можем перемножать и матрицы с векторными элементами.

Рассмотрим, например, матрицу-строку

$$\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n),$$

составленную из векторов данного базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, и транспонированную матрицу-столбец

$$\boldsymbol{e}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}.$$

Умножая «скалярно» матрицу $\boldsymbol{e}^{\mathsf{T}}$ на матрицу $\boldsymbol{e}$, мы, очевидно, как раз и получим матрицу метрических коэффициентов $G = (g_{ij})$. Таким образом, мы можем написать, что

$$G = \boldsymbol{e}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{e}.$$

Пользуясь этой записью матрицы G, можно сразу же получить ответ на вопрос, как меняется эта матрица при изменении базиса.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ — два базиса (на прямой, в плоскости или в пространстве) и пусть G — матрица метрических коэффициентов базиса $e_1, \ldots, e_n$, а G' — матрица метрических коэффициентов базиса $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$. Кроме того, пусть C — матрица перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$. Тогда

$$G = e^{\top} e, \quad G' = e'^{\top} e'$$

и

$$e' = eC,$$

где

$$e = (e_1, \ldots. e_n), \quad e' = (e_{1'}, \ldots, e_{n'}).$$

Поэтому

$$G' = (eC)^{\top}(eC) = (C^{\top} e^{\top})(eC) = C^{\top}(e^{\top} e) C = C^{\top} G C.$$

Таким образом,

$$G' = C^{\top} G C.$$

Это и есть формула преобразования матрицы G при изменении базиса.

Пусть e_1 — базис на прямой, а g_{11} — его метрический коэффициент. Тогда для любых двух векторов $x = x^1 e_1$ и $y = y^1 e_1$

$$xy = (x^1 e_1)(y^1 e_1) = e_1^2 x^1 y^1 = g_{11} x^1 y^1.$$

Аналогично, если e_1, e_2 — базис на плоскости и $g_{11}, g_{22}, g_{12} = g_{21}$ — его метрические коэффициенты, то для любых векторов $x = x^1 e_1 + x^2 e_2$ и $y = y^1 e_1 + y^2 e_2$

$$\begin{aligned} xy &= (x^1 e_1 + x^2 e_2)(y^1 e_1 + y^2 e_2) = \\ &= (x^1 e_1)(y^1 e_1) + (x^1 e_1)(y^2 e_2) + (x^2 e_2)(y^1 e_1) + (x^2 e_2)(y^2 e_2) = \\ &= g_{11} x^1 y^1 + g_{12}(x^1 y^2 + x^2 y^1) + g_{22} x^2 y^2. \end{aligned}$$

Наконец, если e_1, e_2, e_3 — базис в пространстве, то в аналогичных обозначениях

$$\begin{aligned} xy &= (x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3)(y^1 e_1 + y^2 e_2 + y^3 e_3) = \\ &= g_{11} x^1 y^1 + g_{22} x^2 y^2 + g_{33} x^3 y^3 + \\ &+ g_{12}(x^1 y^2 + x^2 y^1) + g_{13}(x^1 y^3 + x^3 y^1) + g_{23}(x^2 y^3 + x^3 y^2). \end{aligned}$$

Таким образом,

скалярное произведение выражается в координатах следующими формулами:

$xy = g_{11} x^1 y^1$ *(на прямой),*

$xy = g_{11} x^1 y^1 + g_{12}(x^1 y^2 + x^2 y^1) + g_{22} x^2 y^2$ *(на плоскости),*

$xy = g_{11} x^1 y^1 + g_{22} x^2 y^2 + g_{33} x^3 y^3 + g_{12}(x^1 y^2 + x^2 y^1) + g_{13}(x^1 y^3 + x^3 y^1) + g_{23}(x^2 y^3 + x^3 y^2)$ *(в пространстве).*

Эти формулы можно переписать также в следующем более симметричном виде:

$$\boldsymbol{xy} = g_{11}x^1y^1,$$
$$\boldsymbol{xy} = g_{11}x^1y^1 + g_{12}x^1y^2 + \\ + g_{21}x^2y^1 + g_{22}x^2y^2,$$
$$\boldsymbol{xy} = g_{11}x^1y^1 + g_{12}x^1y^2 + g_{13}x^1y^3 + \\ + g_{21}x^2y^1 + g_{22}x^2y^2 + g_{23}x^2y^3 + \\ + g_{31}x^3y^1 + g_{32}x^3y^2 + g_{33}x^3y^3.$$

Пользуясь знаком $\sum$ суммы, последние формулы можно записать совсем коротко:

$$\boldsymbol{xy} = \sum_{i,\, j=1}^{n} g_{ij}x^iy^j.$$

Можно также (как и в п. 7 § 3) ввести в рассмотрение одностолбцовые матрицы

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^n \end{pmatrix},$$

состоящие из координат данных векторов. Тогда предыдущую формулу можно с помощью матричного умножения записать в следующем компактном виде:

$$\boldsymbol{xy} = x^{\top}Gy,$$

где G — матрица метрических коэффициентов, а $x^{\top}$ — одно-строчечная матрица, полученная транспонированием матрицы x.

В этом виде формула для $\boldsymbol{xy}$ доказывается (для любого n) одной строчкой вычислений:

$$\boldsymbol{xy} = (\boldsymbol{e}x)(\boldsymbol{e}y) = (\boldsymbol{e}x)^{\top}(\boldsymbol{e}y) = (x^{\top}\boldsymbol{e}^{\top})(\boldsymbol{e}y) = x^{\top}(\boldsymbol{e}^{\top}\boldsymbol{e})\,y = x^{\top}Gy$$

(здесь мы воспользовались тем, что для матрицы $\boldsymbol{e}x$ первого порядка справедливо равенство $(\boldsymbol{e}x)^{\top} = \boldsymbol{e}x$).

Умея вычислять через координаты скалярное произведение, мы, используя формулы (3′) и (2′) п. 2, можем вычислять через координаты длины векторов и углы между ними. Например, в матричной записи формула для длины вектора имеет вид

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x^{\top}Gx}$$

(имеется в виду арифметический корень), а формула для угла между векторами — вид

$$\cos\theta = \frac{x^{\top}Gy}{\sqrt{x^{\top}Gx}\,\sqrt{y^{\top}Gy}}.$$

В развернутом виде мы напишем эти формулы только для случая плоскости:

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{g_{11}(x^1)^2 + 2g_{12}x^1x^2 + g_{22}(x^2)^2},$$

$$\cos\theta = \frac{g_{11}x^1y^1 + g_{12}(x^1y^2 + x^2y^1) + g_{22}x^2y^2}{\sqrt{g_{11}(x^1)^2 + 2g_{12}x^1x^2 + g_{22}(x^2)^2}\sqrt{g_{11}(y^1)^2 + 2g_{12}y^1y^2 + g_{22}(y^2)^2}}.$$

5. Ортонормированные базисы

Формулы для скалярного произведения приобретают особенно простой вид, когда для рассматриваемого базиса матрица метрических коэффициентов является единичной матрицей, т. е. когда

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Определение 1. Базис, матрица метрических коэффициентов которого является единичной, называется *ортонормированным*.

Ясно, что

базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ тогда и только тогда ортонормирован, когда каждый его вектор имеет длину, равную единице, и любые два (различных) его вектора ортогональны.

Векторы, длина которых равна единице, называются *единичными векторами* или *ортами*. Таким образом, каждый ортонормированный базис состоит из n попарно ортогональных ортов.

Для обозначения векторов ортонормированного базиса принято использовать символы $\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n$. В частности, ортонормированный базис на прямой (т. е. некоторый орт) обозначается символом $\boldsymbol{i}_1$ или просто $\boldsymbol{i}$. (Заметим, что на прямой существует только два ортонормированных базиса $\boldsymbol{i}$ и $-\boldsymbol{i}$.) Аналогично, векторы ортонормированного базиса на плоскости (т. е. два ортогональных орта) обозначаются символами $\boldsymbol{i}_1$ и $\boldsymbol{i}_2$ (иногда используются также обозначения $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$), а векторы ортонормированного базиса в пространстве (три ортогональных орта) — символами $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$ и $\boldsymbol{i}_3$ (или же символами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$).

Координаты вектора в ортонормированном базисе принято обозначать, помещая индекс внизу (т. е. принято писать не $x^1, \ldots, x^n$, как в общем случае, а $x_1, \ldots, x_n$). Более того, часто пользуются и безындексным обозначением координат (например, символом x на прямой, символами x, y на плоскости и символами x, y, z в пространстве). Так, например, в пространстве разложение вектора $\boldsymbol{x}$ по векторам ортонормированного базиса обычно пишется в следующем виде:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}$$

или

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

(впрочем, последняя форма записи редко бывает удобна).

Формула для скалярного произведения в ортонормированном базисе имеет, очевидно, вид

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \qquad (n = 1, 2, 3).$$

Для длины вектора и угла между двумя векторами получаем формулы

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

$$\cos\theta = \frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}}.$$

Например, на плоскости

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

$$\cos\theta = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}.$$

Ортонормированные базисы обладают тем приятным свойством, что координаты $x_1, \ldots, x_n$ произвольного вектора в явном виде выражаются через этот вектор. Именно, легко видеть, что справедливо следующее

Предложение 1. *Для любого ортонормированного базиса* $\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n$ *(на прямой, в плоскости или в пространстве) координаты* $x_1, \ldots, x_n$ *произвольного вектора* $\boldsymbol{x}$ *равны скалярным произведениям этого вектора на векторы базиса:*

$$x_1 = \boldsymbol{x}\boldsymbol{i}_1, \ \ldots, \ x_n = \boldsymbol{x}\boldsymbol{i}_n.$$

Доказательство. Скалярно умножая равенство $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{i}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{i}_n$, скажем, на $\boldsymbol{i}_1$ и учитывая, что $\boldsymbol{i}_1^2 = 1$ и $\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_k = 0$ при $k > 1$, мы немедленно получим, что $x_1 = \boldsymbol{x}\boldsymbol{i}_1$.

Определение 2. Пусть $\boldsymbol{x}$ — произвольный отличный от нуля вектор (на прямой, в плоскости или в пространстве) и пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — углы, образованные этим вектором с ортами $\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n$ некоторого ортонормированного базиса. Косинусы

$$\cos\alpha_1, \ \ldots, \ \cos\alpha_n$$

этих углов называются *направляющими косинусами* вектора $\boldsymbol{x}$.

Впрочем, рассмотрение этих косинусов по существу интересно только в пространстве (т. е. при $n = 3$). Действительно, на прямой единственный направляющий косинус равен ± 1, а на плоскости имеют место равенства

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha,$$

$$\cos\alpha_2 = \sin\alpha,$$

где α — угол от вектора $\boldsymbol{i}_1 = \boldsymbol{i}$ к вектору $\boldsymbol{x}$ (здесь имеется в виду, что на плоскости выбрана ориентация, определяемая данным базисом $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$).

В пространстве направляющие косинусы обычно обозначаются символами

$$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma.$$

Поскольку $\boldsymbol{x}\boldsymbol{i}_k = |\boldsymbol{x}|\cos\alpha_k$, $k = 1, \ldots, n$, мы видим, что *координаты $x_1, \ldots, x_n$ вектора $\boldsymbol{x}$ в ортонормированном базисе выражаются через его длину и через его направляющие косинусы по формулам*

$$x_1 = |\boldsymbol{x}|\cos\alpha_1, \ \ldots, \ x_n = |\boldsymbol{x}|\cos\alpha_n.$$

Таким образом, на плоскости,

$$x_1 = |\boldsymbol{x}|\cos\alpha, \quad x_2 = |\boldsymbol{x}|\sin\alpha,$$

а в пространстве

$$x_1 = |\boldsymbol{x}|\cos\alpha, \quad x_2 = |\boldsymbol{x}|\cos\beta, \quad x_3 = |\boldsymbol{x}|\cos\gamma.$$

Два вектора тогда и только тогда имеют одинаковые направляющие косинусы, когда они отличаются положительным множителем. Для орта (единичного вектора) направляющие косинусы совпадают с его координатами.

Поскольку для любого вектора $\boldsymbol{x}$ имеет место формула $|\boldsymbol{x}|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, то

$$\cos^2\alpha_1 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1.$$

При $n = 1$ это соотношение тривиально, при $n = 2$ оно сводится к известному тригонометрическому тождеству

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

а при $n = 3$ имеет вид

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Подставив в формулу для косинуса угла между двумя векторами выражения их координат через направляющие косинусы, мы немедленно получим, что

угол θ между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ с направляющими косинусами $\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n$ и $\cos\beta_1, \ldots, \cos\beta_n$ удовлетворяет соотношению

$$\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\beta_1 + \ldots + \cos\alpha_n\cos\beta_n.$$

В частности, в пространстве (обозначив направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{x}$ через $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$, а направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{y}$ через $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$) мы получаем формулу

$$\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2,$$

а на плоскости (в аналогичных обозначениях) — формулу

$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 = \cos(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Впрочем, последняя формула нам не дает ничего нового, поскольку угол $\alpha_2 - \alpha_1$ равен, очевидно, углу φ от вектора $\boldsymbol{x}$ к вектору $\boldsymbol{y}$ (в ориентации плоскости, определенной базисом $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$) и потому либо он совпадает с углом θ, либо отличается от него знаком.

Тот факт, что $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, позволяет без труда найти формулы для вычисления угла φ по координатам векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Действительно,

$$\sin\varphi = \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos\alpha_2 \sin\alpha_1 - \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|}.$$

Поскольку

$$\cos\varphi = \cos\theta = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|},$$

тем самым доказано, что

для угла φ от вектора $\boldsymbol{x}(x_1, x_2)$ к вектору $\boldsymbol{y}(y_1, y_2)$ (в ориентации, задаваемой базисом $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$) имеют место формулы

$$\sin\varphi = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}.$$

Напомним, что величины $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ однозначно определяют угол φ.

Пусть λ — произвольная ориентированная прямая (для определенности, в пространстве). Ее направляющими косинусами

$$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma$$

называются направляющие косинусы ее произвольного положительно ориентированного вектора $\boldsymbol{a}$. (Очевидно, что это определение корректно.)

По определению, для величины $(\mathrm{pr}_\lambda \boldsymbol{x})$ ортогональной проекции $\mathrm{pr}_\lambda \boldsymbol{x}$ произвольного вектора $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, x_3)$ на прямую λ имеют место равенства

$$(\mathrm{pr}_\lambda \boldsymbol{x}) = (\mathrm{pr}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3}{|\boldsymbol{a}|} =$$
$$= x_1\cos\alpha + x_2\cos\beta + x_3\cos\gamma.$$

Таким образом,

величина $(\mathrm{pr}_\lambda \boldsymbol{x})$ ортогональной проекции произвольного вектора $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, x_3)$ на ориентированную прямую λ с направляющими косинусами $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ выражается формулой

$$(\mathrm{pr}_\lambda \boldsymbol{x}) = x_1\cos\alpha + x_2\cos\beta + x_3\cos\gamma.$$

Аналогичная формула на плоскости имеет вид

$$(\mathrm{pr}_\lambda \boldsymbol{x}) = x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha.$$

6. Ортогональные матрицы

Пусть $\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n$ и $\boldsymbol{i}'_1, \ldots, \boldsymbol{i}'_n$ — два ортонормированных базиса (на прямой, в плоскости или в пространстве) и пусть C — матрица перехода от первого базиса ко второму. Как мы знаем (п. 4), матрицы метрических коэффициентов преобразуются при изменении базиса по формуле

$$G' = C^{\mathsf{T}} G C.$$

Но в нашем случае $G' = G = E$. Следовательно,

матрица C перехода от одного ортонормированного базиса к другому удовлетворяет соотношению

$$C^{\mathsf{T}} C = E. \qquad (1)$$

Определение 1. Матрицы, удовлетворяющие соотношению (1), называются *ортогональными.*

Таким образом, мы показали, что

матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому является ортогональной матрицей.

Легко видеть, что верно и обратное:

если матрица C перехода от одного базиса к другому ортогональна и если первый базис ортонормирован, то второй базис также ортонормирован.

Действительно, матрица метрических коэффициентов второго базиса имеет вид $C^{\mathsf{T}}GC$, где G — матрица метрических коэффициентов первого базиса. Но по условию $G = E$ и $C^{\mathsf{T}}C = E$. Поэтому эта матрица является единичной матрицей E, и следовательно, второй базис также ортонормирован.

Перейдя в равенстве (1), определяющем ортогональные матрицы, к определителям и вспомнив, что $|C^{\mathsf{T}}| = |C|$ (при транспонировании определитель не меняется), мы немедленно получим, что

определитель произвольной ортогональной матрицы C равен ± 1:

$$|C| = \pm 1.$$

Определение 2. Ортогональные матрицы C, для которых $|C| = 1$, называются *собственными* ортогональными матрицами (а матрицы с $|C| = -1$ соответственно — *несобственными*).

Вспоминая определение одноименных базисов, мы немедленно получаем, что

собственные ортогональные матрицы (*и только они*) *являются матрицами перехода между одноименными ортонормированными базисами.*

Умножив равенство (1) справа на C^{-1}, мы немедленно получим, что $C^{\top} = C^{-1}$. Обратно, если $C^{\top} = C^{-1}$, то $C^{\top}C = E$ и, следовательно, матрица C ортогональна. Таким образом,

матрица C тогда и только тогда ортогональна, когда транспонированная матрица $C^{\top}$ является обратной матрицей C^{-1}:

$$C^{\top} = C^{-1}. \tag{2}$$

Умножив равенство (2) слева на C, мы получим, что $CC^{\top} = E$. Обратно, если $CC^{\top} = E$, то $C^{\top} = C^{-1}$ и, следовательно, матрица C ортогональна. Таким образом,

матрица C тогда и только тогда ортогональна, когда она удовлетворяет соотношению

$$CC^{\top} = E. \tag{3}$$

В развернутом виде соотношение (1) означает, что сумма квадратов элементов каждого столбца матрицы C равна единице, а сумма попарных произведений соответственных элементов двух любых столбцов равна нулю. Соотношение (3) означает, что тем же свойством обладают и строки матрицы C.

Ясно, что

для любой ортогональной матрицы C обратная матрица C^{-1} также является ортогональной матрицей.

Действительно, если матрица C была матрицей перехода от одного ортонормированного базиса к другому, то матрица C^{-1} будет матрицей перехода от второго базиса к первому.

Аналогично показывается, что

произведение C_1C_2 двух ортогональных матриц C_1 и C_2 также является ортогональной матрицей.

Последние два утверждения означают, что

совокупность $\mathrm{O}(n)$ *всех ортогональных матриц порядка n является группой по умножению.*

Замечание 1. Это утверждение можно доказать и чисто алгебраически, пользуясь лишь определением ортогональной матрицы как такой матрицы, для которой

$$C^{\top}C = E.$$

Действительно, из курса алгебры известно, что

$$(C_1C_2)^{\top} = C_2^{\top}C_1^{\top}.$$

Поэтому, если

$$C_1^{\top}C_1 = E, \quad C_2^{\top}C_2 = E,$$

то

$$(C_1C_2)^{\top}(C_1C_2) = C_2^{\top}\left(C_1^{\top}C_1\right)C_2 = C_2^{\top}C_2 = E.$$

Аналогично, если

$$C^{\top}C = E,$$

то

$$C^\top (C^\top)^\top = E,$$

и, следовательно, матрица $C^\top = C^{-1}$ ортогональна.

Это доказательство проходит для любого n (в том числе и при $n > 3$).

Поскольку определитель произведения двух матриц равен произведению определителей сомножителей, то

произведение двух ортогональных матриц тогда и только тогда является собственной ортогональной матрицей, когда оба сомножителя являются одновременно либо собственными, либо несобственными ортогональными матрицами.

В частности, мы видим, что

совокупность $O^+(n)$ *всех собственных ортогональных матриц является подгруппой группы* $O(n)$.

Эта подгруппа обозначается также символом $SO(n)$.

Замечание 2 (для читателей, знакомых с теорией групп). Очевидно, что группа $SO(n)$ является не только подгруппой, но даже и нормальным делителем группы $O(n)$.

Что же касается совокупности $O^-(n)$ всех несобственных ортогональных матриц, то она обладает тем свойством, что для любых ее элементов C_1 и C_2 матрицы $C_1^{-1}C_2$ и $C_1C_2^{-1}$ принадлежат группе $SO(n) = O^+(n)$. На языке теории групп это означает, что

множество $O^-(n)$ *всех несобственных ортогональных матриц порядка* n *является двусторонним смежным классом группы* $O(n)$ *по подгруппе* $O^+(n)$.

Пусть c_{ij} — элементы ортогональной матрицы C. При $n=1$ условие ортогональности сводится к равенству

$$c_{11}^2 = 1.$$

Следовательно, единственными ортогональными матрицами первого порядка являются числа ± 1. Это вполне согласуется с тем, что на прямой существует только два ортонормированных базиса: $\boldsymbol{i}$ и $-\boldsymbol{i}$.

Числа $+1$ и -1 составляют группу по умножению. Обозначая эту группу символом S^0, мы можем, следовательно, сказать, что

группа $O(1)$ *изоморфна группе* S^0.

В частности, мы видим, что единственной собственной ортогональной матрицей первого порядка является единичная матрица 1.

При $n=2$ условия ортогональности имеют вид

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{21}^2 &= 1, \\ c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} &= 0, \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 &= 1. \end{aligned}$$

Общее решение первого уравнения выражается, очевидно, формулами

$$c_{11} = \cos\alpha, \quad c_{21} = \sin\alpha,$$

где α — некоторый угол, $-\pi < \alpha \leqslant \pi$, а общее решение третьего уравнения — аналогичными формулами

$$c_{12} = \cos\beta, \quad c_{22} = \sin\beta, \quad -\pi < \beta \leqslant \pi.$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение, мы получим, что

$$\cos(\beta - \alpha) = 0.$$

Следовательно, $\beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}$ и потому либо $\cos\beta = -\sin\alpha$, $\sin\beta = \cos\alpha$, либо $\cos\beta = \sin\alpha$, $\sin\beta = -\cos\alpha$. В первом случае определитель матрицы C равен $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, а во втором — равен $-\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$.

Таким образом,

произвольная ортогональная матрица второго порядка имеет либо вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

и в этом случае она — собственная, либо вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix},$$

и тогда она несобственная.

Если матрица C является матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ к базису $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$, то угол α является не чем иным, как углом φ от вектора $\boldsymbol{i}$ к вектору $\boldsymbol{i}'$ (в ориентации, определенной базисом $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$).

Действительно, по определению

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\sin\alpha$$

и потому для угла φ от вектора $\boldsymbol{i}$ к вектору $\boldsymbol{i}'$ имеют место формулы (см. конец п. 5)

$$\sin\varphi = 1\cdot\sin\alpha - 0\cdot\cos\alpha = \sin\alpha,$$
$$\cos\varphi = 1\cdot\cos\alpha + 0\cdot\sin\alpha = \cos\alpha,$$

и, следовательно, $\varphi = \alpha$.

При вращении плоскости на угол α (в положительном направлении) вектор $\boldsymbol{i}$ переходит, таким образом, в вектор $\boldsymbol{i}'$, а вектор $\boldsymbol{j}$ — в вектор $\boldsymbol{j}'$, если базисы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ одноименны, и в вектор $-\boldsymbol{j}'$, если эти базисы разноименны.

В частности, мы видим, что любые два одноименных базиса плоскости мы можем перевести друг в друга некоторым вращением.

По формуле умножения матриц

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

при умножении собственных ортогональных матриц второго порядка соответствующие углы складываются.

Рассмотрим множество S^1 всех комплексных чисел $z = e^{i\alpha}$, по модулю равных единице. Это множество является группой по умножению, причем

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Это показывает, что

соответствие

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \longmapsto e^{i\alpha}$$

представляет собой изоморфизм группы $SO(2)$ *на группу* S^1.

В частности мы видим, что *группа* $SO(2)$ — *абелева.*

При $n = 3$ условия ортогональности имеют вид

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 = 1, &\quad c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} = 0, \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 = 1, &\quad c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{33} = 0, \\ c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 = 1, &\quad c_{12}c_{13} + c_{22}c_{23} + c_{32}c_{33} = 0. \end{aligned}$$

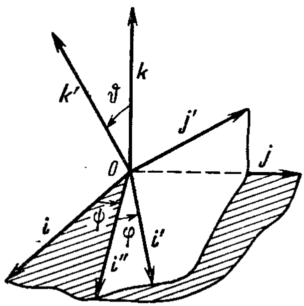
Аналитическое исследование этой системы уравнений, хотя и возможно, но крайне канительно. Поэтому мы воспользуемся наглядными геометрическими соображениями. При этом мы будем для простоты считать, что рассматриваемая ортогональная матрица C — собственная, т. е. осуществляет переход от некоторого ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ к одноименному ортонормированному базису $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$.

Более формальное (и более изящное) исследование этой системы уравнений мы проведем в п. 4 § 2 гл. 7.

Будем считать, что все векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ отложены от некоторой точки O:

$$\boldsymbol{i} = \overrightarrow{OP}, \quad \boldsymbol{j} = \overrightarrow{OQ}, \quad \boldsymbol{k} = \overrightarrow{OR},$$
$$\boldsymbol{i}' = \overrightarrow{OP'}, \quad \boldsymbol{j}' = \overrightarrow{OQ'}, \quad \boldsymbol{k}' = \overrightarrow{OR'}.$$

Пусть орты $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}'$ неколлинеарны ($\boldsymbol{k}' \neq \pm\boldsymbol{k}$). Тогда плоскости OPQ и $OP'Q'$ различны и потому пересекаются по некоторой прямой λ. Пусть $\boldsymbol{i}'' = \overrightarrow{OP''}$ — орт этой прямой. Он ортогонален ортам $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}'$ и потому им не компланарен, т. е. орты $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$, $\boldsymbol{i}''$ составляют некоторый базис пространства (неортонормированный). С равным правом вместо орта $\boldsymbol{i}''$ мы могли бы взять орт $-\boldsymbol{i}''$. Чтобы устранить эту неопределенность, мы потребуем, чтобы базис $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$, $\boldsymbol{i}''$ был одноименен с базисом $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Тогда орт $\boldsymbol{i}''$ будет однозначно определен. В случае, когда орты $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}'$ коллинеарны, мы за орт $\boldsymbol{i}''$ примем орт $\boldsymbol{i}'$.



Пусть ψ — угол от орта $\boldsymbol{i}$ до орта $\boldsymbol{i}''$ в плоскости OPQ (ориентация которой определяется базисом $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$) и пусть $\boldsymbol{j}'' = \overrightarrow{OQ''}$ — такой орт плоскости OPQ, что угол от орта $\boldsymbol{j}$ до орта $\boldsymbol{j}''$ также равен ψ. Иными словами, $\boldsymbol{j}''$ — это такой орт плоскости OPQ, что базис $\boldsymbol{i}''$, $\boldsymbol{j}''$ этой плоскости получается из базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ вращением плоскости (вокруг точки O) в положительном направлении на угол ψ. Согласно сказанному выше отсюда следует, что матрица перехода от базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ к базису $\boldsymbol{i}''$, $\boldsymbol{j}''$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}.$$

Поэтому в пространстве матрица C_1 перехода от базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ к базису $\boldsymbol{i}''$, $\boldsymbol{j}''$, $\boldsymbol{k}$ выражается формулой

$$C_1 = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad -\pi < \psi \leqslant \pi.$$

Заметим, что базис $\boldsymbol{i}''$, $\boldsymbol{j}''$, $\boldsymbol{k}$ получается из базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ вращением пространства на угол ψ вокруг прямой OR.

Рассмотрим теперь плоскость ORR', перпендикулярную прямой λ. Пусть θ — угол между векторами $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}'$ этой плоскости ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$). Поворот на угол θ плоскости ORR' (вокруг точки O), совмещающий вектор $\boldsymbol{k}$ с вектором $\boldsymbol{k}'$, переводит вектор $\boldsymbol{j}''$ (также принадлежащий плоскости ORR') в некоторый вектор $\boldsymbol{j}'''$. Отсюда, как и выше, следует, что матрица C_2 перехода от базиса $\boldsymbol{i}''$, $\boldsymbol{j}''$, $\boldsymbol{k}$ к базису $\boldsymbol{i}''$, $\boldsymbol{j}'''$, $\boldsymbol{k}'$ выражается формулой

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

При этом базис $\boldsymbol{i}''$, $\boldsymbol{j}'''$, $\boldsymbol{k}'$ получается из базиса $\boldsymbol{i}''$, $\boldsymbol{j}''$, $\boldsymbol{k}$ вращением пространства вокруг прямой λ на угол θ.

Чтобы теперь перейти от базиса $\boldsymbol{i}''$, $\boldsymbol{j}'''$, $\boldsymbol{k}'$ к нужному нам базису $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$, достаточно в плоскости $OP'Q'$ перейти от базиса $\boldsymbol{i}''$, $\boldsymbol{j}'''$ к (очевидно, одноименному) базису $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$. Это означает, что переход от базиса $\boldsymbol{i}''$, $\boldsymbol{j}'''$, $\boldsymbol{k}'$ к базису $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ описывается матрицей

$$C_3=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad -\pi<\varphi\leqslant\pi,$$

где φ — угол от вектора $\boldsymbol{i}''$ к вектору $\boldsymbol{i}'$ в ориентированной плоскости $OP'Q'$. При этом базис $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ получается из базиса $\boldsymbol{i}''$, $\boldsymbol{j}'''$, $\boldsymbol{k}'$ вращением пространства вокруг прямой OR' на угол φ.

Таким образом, мы видим, что базис $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ получается из базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ тремя последовательными вращениями. Следовательно, переход от базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ к базису $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ описывается произведением $C_1C_2C_3$ матриц перехода C_1, C_2 и C_3.

Тем самым доказано следующее

Предложение 1. *Любая собственная ортогональная матрица C третьего порядка допускает разложение вида*

$$C=\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

где $-\pi<\psi\leqslant\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$.

Углы ψ, θ, φ называются *углами Эйлера* ортогональной матрицы C (или базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ относительно базиса $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$). Они «независимы» в том смысле, что любым их значениям (в указанных пределах) отвечает некоторая (однозначно определенная) ортогональная матрица.

Вообще говоря, нельзя утверждать, что углы ψ, θ, φ однозначно определены матрицей C. Это верно лишь тогда, когда угол θ отличен от нуля и от π. Если же $\theta=0$ или $\theta=\pi$, то матрица C однозначно определяет соответственно либо сумму $\varphi+\psi$, либо разность $\varphi-\psi$. Поэтому при $\theta=0$ или $\theta=\pi$ один из углов φ или ψ может иметь (для данной матрицы C) произвольное значение.

Конечно, в формуле (4) можно фактически осуществить умножение матриц и тем самым получить в явном виде выражение элементов матрицы C через углы Эйлера. Мы этого делать не будем, поскольку получающиеся формулы в достаточной мере громоздки и практически не запоминаемы.

Чтобы получить аналогичное описание несобственных ортогональных матриц, достаточно в разложении (1) один из столбцов какой-нибудь матрицы умножить на -1.