§ 6. ПОЛИВЕКТОРЫ

1. Бивекторы

Как мы знаем, направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ эквиполлентны, если либо

1) $A = B$ и $A' = B'$,

либо

2) $A \neq B$, $A' \neq B'$ и

а) прямая AB параллельна прямой $A'B'$,

б) ориентация прямой AB, определенная направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, совпадает (см. конец п. 4 § 4) с ориентацией прямой $A'B'$, определенной направленным отрезком $\overrightarrow{A'B'}$,

в) длина отрезка $\overline{AB}$ равна длине отрезка $\overline{A'B'}$.

Поскольку направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ является, по определению, не чем иным, как упорядоченной парой точек (A, B), мы можем, по аналогии, ввести следующее

Определение 1. Две упорядоченные тройки точек (A, B, C) и (A', B', C') называются *эквиполлентными*, если либо

1) обе тройки коллинеарны,

либо

2) обе тройки неколлинеарны и

а) плоскость ABC (проходящая через точки A, B, C) параллельна плоскости $A'B'C'$ (проходящей через точки A', B', C'),

б) ориентация плоскости ABC, определенная тройкой (A, B, C) (см. п. 1 § 4), совпадает с ориентацией плоскости $A'B'C'$, определенной тройкой (A', B', C'),

в) площадь треугольника ABC равна площади треугольника $A'B'C'$.

Ясно, что

отношение эквиполлентности упорядоченных троек точек является отношением эквивалентности.

Определение 2. Классы эквиполлентных упорядоченных троек точек называются *бивекторами*. Бивектор, определенный тройкой (A, B, C) (содержащий эту тройку), обозначается символом $\overrightarrow{ABC}$.

По определению, все коллинеарные тройки точек составляют один бивектор. Этот бивектор называется нулевым и обозначается символом $\mathfrak{o}$.

Замечание 1. В изложенных определениях мы неявно считали, что все рассматриваемые точки являются произвольными точками пространства. Получающиеся бивекторы естественно называть поэтому *бивекторами в пространстве*. Множество всех таких бивекторов мы будем обозначать символом $\mathrm{Biv}(3)$.

Вместе с тем мы можем органичиться точками лишь некоторой плоскости П. Тогда мы получим *бивекторы в плоскости*.

Их множество мы будем обозначать символом $\mathrm{Biv}_{\Pi}(2)$ или просто $\mathrm{Biv}(2)$.

Аналогично можно, конечно, определить множество $\mathrm{Biv}(1)$ *бивекторов на прямой.* Однако этот случай неинтересен, поскольку множество $\mathrm{Biv}(1)$ состоит, очевидно, только из нулевого бивектора $\mathfrak{o}$.

Так же, как и для векторов (см. п. 4 § 1), каждый бивектор на плоскости естественным образом отождествляется с некоторым бивектором в пространстве, так что мы можем считать, что для любой плоскости Π имеет место естественное вложение

$$\mathrm{Biv}_{\Pi}(2) \subset \mathrm{Biv}(3).$$

Конечно, подмножества $\mathrm{Biv}_{\Pi}(2)$, соответствующие различным плоскостям Π, вообще говоря, различны. Они совпадают тогда, когда плоскости параллельны (а в противном случае они имеют только один общий бивектор $\mathfrak{o}$).

Пусть нам даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (на прямой, в плоскости или в пространстве). Отложив их от одной точки O, т. е. положив

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB},$$

мы можем рассмотреть бивектор $\overrightarrow{OAB}$.

Определение 3. Бивектор $\overrightarrow{OAB}$ называется *внешним произведением* векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и обозначается символом $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OAB}.$$

Конечно, это определение нуждается в проверке корректности, т. е. в доказательстве того, что бивектор $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ определяется исключительно векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ (взятыми в данном порядке) и не зависит от выбора точки O. Другими словами, нам нужно доказать, что

если для двух упорядоченных троек точек (O, A, B) *и* (O', A', B') *имеют место равенства*

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'}, \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'},$$

то

$$\overrightarrow{OAB} = \overrightarrow{O'A'B'}.$$

Задание. Докажите корректность определения внешнего произведения.

Ясно, что

векторы $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *тогда и только тогда линейно зависимы (коллинеарны), когда их внешнее произведение равно нулю:*

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \mathfrak{o}.$$

Замечание 2. Очевидно, что любой бивектор $\overrightarrow{ABC}$ является внешним произведением некоторых векторов (например, векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$). Другими словами, любой бивектор определяется заданием некоторых двух векторов (этим и объясняется термин «бивектор»).

Определение 4. Две упорядоченные пары векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и $(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}')$ называются *эквиполлентными*, если внешние произведения векторов этих пар совпадают:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}' \wedge \boldsymbol{b}'.$$

Ясно, что отношение эквиполлентности пар векторов является отношением эквивалентности.

Столь же ясно, что

пары $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *и* $(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}')$ *тогда и только тогда эквиполлентны, когда либо*

1) *векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и векторы* $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$ *линейно зависимы, либо*

2) *векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и векторы* $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$ *линейно независимы и*

а) *векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$ *параллельны одной и той же плоскости,*

б) *базисы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$ *этой плоскости одноименны,*

в) *площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, *равна площади параллелограмма, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$.

Замечание 3. Это утверждение можно принять за определение отношения эквиполлентности пар векторов и после этого определить бивекторы как классы эквиполлентных упорядоченных пар векторов.

Определение 5. Мы будем говорить, что отличный от нуля бивектор в пространстве $\mathfrak{a} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ *параллелен* плоскости П, если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны этой плоскости. Согласно условию а) предыдущего утверждения это определение корректно, т. е. не зависит от выбора векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. С точностью до параллельности плоскость П определена бивектором $\mathfrak{a}$ однозначно, а векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ составляют ее базис. Ее ориентация, определенная базисом $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, также не зависит от выбора векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Мы будем говорить, что эта ориентация *определена* бивектором $\mathfrak{a}$.

Ясно, что бивектор $\mathfrak{a}$ тогда и только тогда параллелен плоскости П, когда он принадлежит множеству $\mathrm{Biv}_{\Pi}(2)$ (рассматриваемому как подмножество множества $\mathrm{Biv}(3)$).

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, называется *площадью* (или *мерой*) бивектора $\mathfrak{a}$ и обозначается символом $|\mathfrak{a}|$. Она также зависит только от $\mathfrak{a}$. Для нулевого бивектора, по определению, полагается $|\mathfrak{a}| = 0$.

Таким образом,

$$|\mathfrak{a}|=0 \quad \textit{тогда и только тогда, когда} \quad \mathfrak{a}=\mathfrak{o}.$$

По определению, нулевой бивектор считается параллельным любой плоскости. Никакой ориентации он на этой плоскости не определяет.

Ясно, что

бивектор $\mathfrak{a}$ *однозначно определен, если известна его площадь и (при* $|\mathfrak{a}|\neq 0$*) известно, какой плоскости он параллелен и какую ориентацию на этой плоскости определяет.*

Наши определения эквиполлентности упорядоченных троек точек или упорядоченных пар векторов используют метрические понятия (площадь). Однако на самом деле можно показать, что отношение эквиполлентности имеет чисто аффинный характер. Покажем это.

Определение 6. Будем говорить, что пара векторов (a', b') получена из пары $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *элементарным преобразованием*, если выполнено одно из следующих двух условий:

1) существует такое число $k\neq 0$, что $\boldsymbol{a}'=k\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}'=\frac{1}{k}\boldsymbol{b}$,

2) существует такое число k, что либо $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}$, либо $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{a}$.

Ясно, что при применении элементарного преобразования к паре $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ни площадь бивектора $\mathfrak{a}=\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$, ни (при $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\neq\mathfrak{o}$) плоскость, которой он параллелен, ни ориентация этой плоскости, им определенная, не меняются. Другими словами, этот бивектор переходит в равный бивектор. Будучи верным для одного элементарного преобразования, это верно и для любой последовательности элементарных преобразований. Таким образом,

если пара $(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}')$ *получается из пары* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *последовательностью элементарных преобразований, то*

$$\boldsymbol{a}'\wedge\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b},$$

т. е. пары $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *и* $(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}')$ *эквиполлентны.*

Далее, легко видеть, что

каков бы ни был отличный от нуля вектор $\boldsymbol{e}$*, компланарный с линейно независимыми векторами* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$*, пару* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *можно последовательностью элементарных преобразований перевести в пару* $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{c})$*, первый вектор которой совпадает с данным вектором* $\boldsymbol{e}$.

Действительно, пусть

$$\boldsymbol{e}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}.$$

Если $k\neq 0$, то

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\sim\left(k\boldsymbol{a}, \frac{1}{k}\boldsymbol{b}\right)\sim\left(k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}, \frac{1}{k}\boldsymbol{b}\right)\sim\left(\boldsymbol{e}, \frac{1}{k}\boldsymbol{b}\right).$$

(Знаком $\sim$ мы обозначаем здесь элементарное преобразование.) Аналогично, если $k=0$, то

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \sim (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \sim (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})) \sim$$
$$\sim (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \sim (-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \sim \left(l\boldsymbol{b}, -\frac{1}{l}\boldsymbol{b}\right) \sim \left(\boldsymbol{e}, -\frac{1}{l}\boldsymbol{b}\right).$$

Кроме того, нетрудно показать, что

если отличные от нуля бивекторы $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}'$ с одинаковым первым вектором $\boldsymbol{a}$ равны, то пару $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ можно перевести в пару $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}')$ некоторым элементарным преобразованием.

Действительно, пусть $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$ и $\boldsymbol{b}'=\overrightarrow{OB'}$. Поскольку базисы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}'$ плоскости OAB одноименны, точки B и B' лежат в этой плоскости по одну сторону прямой OA. Поскольку площадь параллелограмма, построенного на отрезках $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, равна площади параллелограмма, построенного на отрезках $\overline{OA}$ и $\overline{OB'}$, точки B и B' лежат поэтому на прямой, параллельной прямой OA. Следовательно, вектор $\overrightarrow{BB'}=\boldsymbol{b}'-\boldsymbol{b}$ параллелен прямой OA и потому существует такое число k, что $\boldsymbol{b}'-\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$. Таким образом, пара $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}')$ получается из пары $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ элементарным преобразованием.

Полезно доказанное утверждение переформулировать следующим образом:

Предложение 1. *Если для вектора $\boldsymbol{a} \neq 0$ и векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b}'$ имеет место равенство*

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}',$$

то существует такое число k, что

$$\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}.$$

Заметим, что это предложение справедливо и тогда, когда $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}' = 0$ (нужно лишь, чтобы $\boldsymbol{a} \neq 0$).

Теперь уже легко доказать, что

если отличные от нуля бивекторы $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}' \wedge \boldsymbol{b}'$ равны (т. е. пары $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и $(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}')$ эквиполлентны и линейно независимы), то пару $(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}')$ можно получить из пары $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ последовательностью элементарных преобразований.

Действительно, согласно доказанному, мы можем пару $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ элементарными преобразованиями перевести в пару вида $(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'')$. При этом будет иметь место равенство $\boldsymbol{a}' \wedge \boldsymbol{b}' = \boldsymbol{a}' \wedge \boldsymbol{b}''$ и потому еще одним элементарным преобразованием мы сможем пару $(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'')$ перевести в нужную нам пару $(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}')$.

Мы видим, таким образом, что нами доказано следующее предложение, дающее чисто аффинную характеристику равенства бивекторов:

Предложение 2. *Два отличных от нуля бивектора $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}' \wedge \boldsymbol{b}'$ тогда и только тогда равны, когда пару $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ можно последовательностью элементарных преобразований перевести в пару $(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}')$.*

Резюмируя, мы получаем, что

1) бивекторы можно определять либо как классы эквиполлентных троек точек (определения 1 и 2), либо как классы эквиполлентных пар векторов (определение 4 и замечание 3);

2) при этом эквиполлентность пар неколлинеарных векторов (единственный интересный случай) равносильна тому, что одну пару можно последовательностью элементарных преобразований перевести в другую (предложение 2).

2. Линейные операции над бивекторами

Определение 1. Пусть $\mathfrak{a}$ — произвольный бивектор, а k — произвольное вещественное число. Предполагая сначала, что $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ и $k \neq 0$, мы определим *произведение* $k\mathfrak{a}$ бивектора $\mathfrak{a}$ на число k как бивектор, удовлетворяющий следующим условиям:

а) бивектор $k\mathfrak{a}$ параллелен той же плоскости, что и бивектор $\mathfrak{a}$;

б) ориентация этой плоскости, определенная бивектором $k\mathfrak{a}$, совпадает с ориентацией, определенной бивектором $\mathfrak{a}$, если $k > 0$, и противоположна этой ориентации, если $k < 0$;

в) площадь бивектора $k\mathfrak{a}$ выражается формулой

$$|k\mathfrak{a}| = |k| \cdot |\mathfrak{a}|.$$

При $k = 0$ или $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ мы, по определению, положим

$$0 \cdot \mathfrak{a} = k\mathfrak{o} = \mathfrak{o}.$$

Замечание 1. Строго говоря, это определение относится к бивекторам в пространстве. Для бивекторов на плоскости условие а) излишне.

Из определения 1 непосредственно вытекает, что при умножении одного из векторов, составляющих бивектор, на некоторое число весь бивектор умножается на это число, т. е.

для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и любого числа* k *имеют место формулы*

$$(k\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \wedge (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$$

(свойство однородности внешнего умножения).

Для доказательства достаточно заметить, что (при $k \neq 0$ и $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \neq \mathfrak{o}$) бивектор $k(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$ и, скажем, бивектор $(k\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{b}$ имеют одну и ту же площадь, параллельны одной и той же плоскости и определяют на этой плоскости одну и ту же ориентацию. При $k = 0$ или $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \mathfrak{o}$ эта формула очевидна.

Замечание 2. Формулу $k(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = (k\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{b}$ можно принять за определение произведения $k(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$. Такое определение делает непосредственно очевидным аффинный характер операции $k\mathfrak{a}$. Зато оно требует проверки корректности.

По определению, бивектор $-\mathfrak{a} = (-1)\mathfrak{a}$ имеет ту же площадь и параллелен той же плоскости (при $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$), что и бивектор $\mathfrak{a}$, но определяет на этой плоскости противоположную ориен-

тацию. Но при $\mathfrak{a} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ теми же свойствами обладает и бивектор $\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$. Поэтому

$$\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b},$$

т. е. *при перестановке множителей внешнее произведение меняет знак.*

Это свойство внешнего умножения называется его антикоммутативностью.

Определение 2. Бивекторы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ в пространстве называются *коллинеарными*, если они параллельны одной и той же плоскости. Все бивекторы на плоскости, по определению, коллинеарны. В частности, бивекторы коллинеарны, если хотя бы один из них равен нулю.

Ясно, что аналогично векторам

бивекторы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ тогда и только тогда коллинеарны, когда существует такое число k, что либо $\mathfrak{a} = k\mathfrak{b}$, либо $\mathfrak{b} = k\mathfrak{a}$.

Для определения операции сложения бивекторов нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1. *Для вектора $\boldsymbol{e}$ и бивектора $\mathfrak{a}$ тогда и только тогда существует такой вектор $\boldsymbol{a}$, что*

$$\mathfrak{a} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a},$$

когда либо бивектор $\mathfrak{a}$ равен нулю, либо вектор $\boldsymbol{e}$ отличен от нуля и параллелен плоскости бивектора $\mathfrak{a}$.

Доказательство. Если $\mathfrak{a} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}$, то (при $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$) вектор $\boldsymbol{e}$ параллелен, по определению, плоскости бивектора $\mathfrak{a}$. Обратно, пусть вектор $\boldsymbol{e}$ параллелен плоскости бивектора $\mathfrak{a}$ (мы можем считать, что $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$, поскольку при $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ за вектор $\boldsymbol{a}$ можно принять вектор $\boldsymbol{e}$). Искомый вектор $\boldsymbol{a}$ должен удовлетворять следующим условиям:

а) он параллелен плоскости бивектора $\mathfrak{a}$;

б) векторы $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{a}$ составляют положительно ориентированный базис этой плоскости (по отношению к ориентации, определенной бивектором $\mathfrak{a}$);

в) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{a}$, равна площади $|\mathfrak{a}|$ бивектора $\mathfrak{a}$.

Ясно, что вектор $\boldsymbol{a}$, удовлетворяющий этим условиям, всегда можно найти (и даже с большим произволом).

Замечание 3. Воспользовавшись произволом в выборе вектора $\boldsymbol{a}$, мы можем его выбрать *ортогональным* вектору $\boldsymbol{e}$. Тогда он будет однозначно определен (вектором $\boldsymbol{e}$ и бивектором $\mathfrak{a}$). Но эта нормализация выбора вектора $\boldsymbol{a}$ уже не будет иметь аффинного характера.

Лемма 2. *Для любых двух бивекторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ существуют такие векторы $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, что*

$$\mathfrak{a} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}, \quad \mathfrak{b} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{b}.$$

Доказательство. Если один из данных бивекторов, скажем, бивектор $\mathfrak{b}$ равен нулю, то за векторы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{a}$ можно взять произвольные векторы, обладающие тем свойством, что $\mathfrak{a} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}$, а за вектор $\boldsymbol{b}$ принять, например, вектор $\boldsymbol{e}$. Если же $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ и $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$, то за вектор $\boldsymbol{e}$ следует принять отличный от нуля вектор, параллельный плоскостям бивекторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. При таком выборе вектора $\boldsymbol{e}$ возможность требуемого представления бивекторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ немедленно обеспечивается леммой 1.

Замечание 4. Ясно, что векторы $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ мы всегда можем выбрать так, чтобы вектор $\boldsymbol{e}$ был ортогонален векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (ср. замечание 3).

Определение 3. *Суммой* бивекторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, представленных в виде $\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{b}$, называется бивектор

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \boldsymbol{e} \wedge (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$

Это определение нуждается, конечно, в проверке корректности, т. е. в доказательстве независимости бивектора от выбора векторов $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Случай 1. Бивекторы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ неколлинеарны (и, в частности, отличны от нуля). В этом случае, вектор $\boldsymbol{e}$ определен однозначно с точностью до коллинеарности (поскольку он должен быть параллелен плоскостям обоих бивекторов). Другими словами, если

$$\mathfrak{a} = \boldsymbol{e}' \wedge \boldsymbol{a}', \quad \mathfrak{b} = \boldsymbol{e}' \wedge \boldsymbol{b}',$$

то $\boldsymbol{e}' = l\boldsymbol{e}$, где l — некоторое отличное от нуля число.

По условию,

$$\boldsymbol{e}' \wedge \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}.$$

В то же время

$$\boldsymbol{e}' \wedge \boldsymbol{a}' = (l\boldsymbol{e}) \wedge \boldsymbol{a}' = l(\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}') = \boldsymbol{e} \wedge (l\boldsymbol{a}').$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{e} \wedge (l\boldsymbol{a}').$$

С другой стороны, в п. 1 было доказано (предложение 1), что при $\boldsymbol{e} \neq \mathbf{0}$ такого рода равенство возможно только тогда, когда

$$l\boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a} = k\boldsymbol{e},$$

где k — некоторое вещественное число.

Аналогично показывается, что существует такое число k_1, что

$$l\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{e}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{e}' \wedge (\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}') = \boldsymbol{e} \wedge (l(\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}')) =$$
$$= \boldsymbol{e} \wedge ((\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + (k + k_1)\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e} \wedge (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$

(Последнее равенство имеет место потому, что переход от пары $(\boldsymbol{e}, (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(k+k_1)\boldsymbol{e})$ к паре $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ является элементарным преобразованием.) Таким образом, в рассматриваемом случае бивектор $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ определен корректно.

Случай 2. Бивекторы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ коллинеарны, т. е. существует такое число l, что, скажем, $\mathfrak{b}=l\mathfrak{a}$. В этом случае

$$\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{b}=l(\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{a})=\boldsymbol{e}\wedge(l\boldsymbol{a})$$

и потому

$$l\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{e},$$

где k — некоторое вещественное число. Следовательно,

$$\boldsymbol{e}\wedge(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{e}\wedge((1+l)\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{e})=\boldsymbol{e}\wedge((1+l)\boldsymbol{a})=$$
$$=(1+l)(\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{a})=(1+l)\mathfrak{a}.$$

Таким образом, при $\mathfrak{b}=l\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=(1+l)\mathfrak{a}. \tag{1}$$

Поскольку правая часть этой формулы не зависит от выбора векторов $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, корректность определения бивектора $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ доказана и в этом случае.

Определение суммы двух бивекторов можно (несколько меняя обозначения) записать в виде равенства

$$\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c},$$

показывающего, что внешнее умножение обладает по отношению к сложению свойством дистрибутивности.

Замечание 5. Все сказанное (с соответствующими незначительными изменениями) годится, конечно, и для бивекторов на плоскости. Впрочем, в этом случае проще всего определять сумму бивекторов непосредственно формулой (1).

Из этого замечания вытекает, в частности, что для любой плоскости Π вложение множества $\mathrm{Biv}_\Pi(2)$ в множество $\mathrm{Biv}(3)$ *согласовано* с операциями над бивекторами, т. е., например, сумма двух бивекторов из $\mathrm{Biv}_\Pi(2)$ не зависит от того, рассматриваем ли мы их как бивекторы на плоскости (из $\mathrm{Biv}_\Pi(2)$) или в пространстве (из $\mathrm{Biv}(3)$) (ср. для векторов аналогичное замечание 1 в п. 2 § 3).

Теорема 1. *Построенные операции над бивекторами (на плоскости или в пространстве) обладают всеми восемью стандартными свойствами линейных операций над векторами, т. е. множества бивекторов* $\mathrm{Biv}(2)$ *и* $\mathrm{Biv}(3)$ *являются линеалами.*

Доказательство этой теоремы сводится к серии тривиальных проверок, за исключением доказательства ассоциативности сложения (свойство 1) бивекторов в пространстве, которое требует достаточно канительных и сложных геометрических рассуждений. Мы предлагаем читателю самостоятельно найти

это доказательство. Мы же докажем эту теорему косвенным способом, связав бивекторы с векторами. К сожалению, этот косвенный способ будет существенно использовать метрические соображения, хотя сама теорема имеет чисто аффинный характер. Однако, ради простоты изложения, мы за чистотой метода гнаться здесь не будем.

Пусть $\boldsymbol{e} = \overrightarrow{OE}$ — произвольный единичный вектор в пространстве. Предполагая, что пространство ориентировано, мы каждому вектору $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, ортогональному вектору $\boldsymbol{e}$, сопоставим вектор $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a})$, обладающий следующими свойствами:

1) длина вектора $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a})$ равна длине вектора $\boldsymbol{a}$:

$$|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a})| = |\boldsymbol{a}|;$$

2) вектор $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a})$ ортогонален как вектору $\boldsymbol{e}$, так и вектору $\boldsymbol{a}$;

3) базис $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a})$ пространства положительно ориентирован.

Для нулевого вектора мы положим $\boldsymbol{e}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Ясно, что эти условия однозначно определяют вектор $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a})$.

Наглядно вектор $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a})$ можно описать как вектор, получающийся вращением вектора $\boldsymbol{a}$ вокруг прямой OE на угол $\pi/2$ в направлении, положительном относительно данной ориентации пространства.

Очевидно, что

для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ортогональных вектору $\boldsymbol{e}$, и любого числа k имеют место равенства

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{e}(\boldsymbol{b}),$$
$$\boldsymbol{e}(k\boldsymbol{a}) = k\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a}).$$

Пусть $\mathfrak{a}$ — произвольный бивектор (в пространстве). Согласно лемме 1 и замечанию 3 мы можем (вообще говоря, многими способами) представить этот бивектор в виде

$$\mathfrak{a} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a},$$

где $\boldsymbol{e}$ — некоторый единичный вектор, а $\boldsymbol{a}$ — вектор, ортогональный вектору $\boldsymbol{e}$. Сделав это, мы сопоставим бивектору $\mathfrak{a}$ вектор $\mathfrak{a}^{\perp}$, определенный формулой

$$\mathfrak{a}^{\perp} = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{a}).$$

Определение 4. Вектор $\mathfrak{a}^{\perp}$ называется вектором, *ассоциированным* с бивектором $\mathfrak{a}$ (по отношению к данной ориентации пространства).

Здесь, конечно, нужно проверить корректность определения, т. е. независимость вектора $\mathfrak{a}^{\perp}$ от выбора векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{a}$. Но, как легко видеть, $\mathfrak{o}^{\perp} = \mathbf{0}$, а при $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ вектор $\mathfrak{a}^{\perp}$ обладает следующими свойствами:

1) длина $|\mathfrak{a}^{\perp}|$ вектора $\mathfrak{a}^{\perp}$ равна площади $|\mathfrak{a}|$ бивектора $\mathfrak{a}$:

$$|\mathfrak{a}^{\perp}| = |\mathfrak{a}|;$$

2) вектор $\mathfrak{a}^{\perp}$ перпендикулярен каждой плоскости, которой параллелен бивектор $\mathfrak{a}$;

3) произведение ориентации, определенной бивектором $\mathfrak{a}$, на ориентацию, определенную вектором $\mathfrak{a}^{\perp}$ (это произведение определено, поскольку соответствующие плоскость и прямая не параллельны), совпадает с данной ориентацией пространства.

Поскольку эти свойства, очевидно, однозначно определяют вектор $\mathfrak{a}^{\perp}$ (вне зависимости от выбора векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{a}$), корректность определения вектора $\mathfrak{a}^{\perp}$ тем самым полностью доказана.

Кроме того, из этих свойств немедленно вытекает, что, *сопоставив произвольному бивектору* $\mathfrak{a}$ *ассоциированный вектор* $\mathfrak{a}^{\perp}$, *мы получим биективное отображение множества всех бивекторов* Biv(3) *на множество* Vect(3) *всех векторов.*

Более того, оказывается, что

это отображение является изоморфизмом, т. е. для любых бивекторов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *и любого числа* k *имеют место соотношения*

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^{\perp}=\mathfrak{a}^{\perp}+\mathfrak{b}^{\perp},$$

$$(k\mathfrak{a})^{\perp}=k\mathfrak{a}^{\perp}.$$

Действительно, согласно лемме 2 и замечанию 4 существует такой единичный вектор $\boldsymbol{e}$ и такие векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, ортогональные вектору $\boldsymbol{e}$, что

$$\mathfrak{a}=\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{a},\quad \mathfrak{b}=\boldsymbol{e}\wedge\boldsymbol{b}$$

и потому

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\boldsymbol{e}\wedge(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

где вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ также ортогонален вектору $\boldsymbol{e}$. Следовательно,

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^{\perp}=\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{e}(\boldsymbol{b})=\mathfrak{a}^{\perp}+\mathfrak{b}^{\perp}.$$

Аналогично, $k\mathfrak{a}=\boldsymbol{e}\wedge(k\boldsymbol{a})$ и потому

$$(k\mathfrak{a})^{\perp}=\boldsymbol{e}(k\boldsymbol{a})=k\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a})=k\mathfrak{a}^{\perp}.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему об изоморфизме:

Теорема 2. *Линеал* Biv(3) *изоморфен линеалу* Vect(3).

Заметим, что построенный изоморфизм не является естественным: он зависит от выбора ориентации пространства (при переходе к противоположной ориентации ассоциированный вектор $\mathfrak{a}^{\perp}$ умножается на -1). Кроме того, он имеет существенно метрический характер.

Однако, как бы то ни было, из теоремы об изоморфизме следует, что линейные операции над бивекторами обладают всеми алгебраическими свойствами линейных операций над векторами. В частности, они обладают и интересующими нас восемью свойствами. Тем самым теорему 1 мы можем считать полностью доказанной.

Подчеркнем еще раз, что хотя мы доказали эту теорему, пользуясь метрическими соображениями, по существу она имеет чисто аффинный характер.

Замечание 6. Для бивекторов на плоскости теорема об изоморфизме имеет вид:

Линеал Biv(2) *изоморфен линеалу* Vect(1).

Для доказательства достаточно заметить, что построенный выше изоморфизм $\mathfrak{a} \longmapsto \mathfrak{a}^{\perp}$ переводит бивекторы, параллельные некоторой плоскости, в векторы, параллельные перпендикуляру к этой плоскости.

3. Линейная теория бивекторов

Понятия линейной комбинации и линейной зависимости (независимости) определяются для бивекторов точно так же, как для векторов. Все свойства этих понятий, доказанные в п. 3 § 3, сохраняются и для бивекторов, поскольку в их доказательствах мы пользовались лишь стандартными свойствами линейных операций.

Замечание 1. Все это, конечно, еще проще вытекает из теоремы об изоморфизме. Однако мы предпочли сослаться на теорему 1, чтобы подчеркнуть аффинный характер этих утверждений.

Напомним (определение 3 п. 2), что бивекторы называются коллинеарными, если они параллельны одной и той же плоскости. Выше фактически уже доказано следующее

Предложение 1. *Два бивектора тогда и только тогда коллинеарны, когда они линейно зависимы.*

Определение 1. Бивекторы называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же прямой (т. е. этой прямой параллельна каждая плоскость, параллельная хотя бы одному из этих бивекторов). Ясно, что

бивекторы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *и* $\mathfrak{c}$ *тогда и только тогда компланарны, когда существует такой отличный от нуля вектор* $\boldsymbol{e}$, *что*

$$\mathfrak{a} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}, \quad \mathfrak{b} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{b}, \quad \mathfrak{c} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{c},$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ — *некоторые векторы.*

Покажем, что справедливо следующее

Предложение 2. *Три бивектора тогда и только тогда компланарны, когда они линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть

$$\mathfrak{a} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}, \quad \mathfrak{b} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{b}, \quad \mathfrak{c} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{c}.$$

Четыре вектора $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ пространства обязательно линейно зависимы, т. е. существуют такие числа k_0, k_1, k_2, k_3, не все равные нулю, что

$$k_0\boldsymbol{e} + k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} + k_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}. \tag{1}$$

При этом числа k_1, k_2, k_3 не могут быть все равны нулю, поскольку в противном случае $k_0 \neq 0$ и $k_0 \boldsymbol{e} = \mathbf{0}$, что при $\boldsymbol{e} \neq \mathbf{0}$ невозможно.

Умножив равенство (1) внешним образом на вектор $\boldsymbol{e}$ и воспользовавшись свойствами однородности и дистрибутивности внешнего умножения (а также тем, что $\boldsymbol{e} \wedge (k_0 \boldsymbol{e}) = \mathfrak{o}$), мы немедленно получим равенство

$$k_1 (\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}) + k_2 (\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{b}) + k_3 (\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{c}) = \mathfrak{o},$$

т. е. равенство

$$k_1 \mathfrak{a} + k_2 \mathfrak{b} + k_3 \mathfrak{c} = \mathfrak{o}.$$

Следовательно, бивекторы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ линейно зависимы.

Обратно, пусть бивекторы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ линейно зависимы. Тогда один из них (скажем, бивектор $\mathfrak{c}$) линейно выражается через другие:

$$\mathfrak{c} = k_1 \mathfrak{a} + k_2 \mathfrak{b}.$$

Пусть $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — такие векторы, что

$$\mathfrak{a} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}, \quad \mathfrak{b} = \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{b}.$$

Тогда

$$\mathfrak{c} = \boldsymbol{e} \wedge (k_1 \boldsymbol{a} + k_2 \boldsymbol{b}).$$

Следовательно, бивекторы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ компланарны.

Замечание 2. Легко видеть, что

бивекторы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ тогда и только тогда компланарны, когда компланарны ассоциированные с ними векторы $\mathfrak{a}^\perp$, $\mathfrak{b}^\perp$, $\mathfrak{c}^\perp$.

Геометрически это легко усмотреть, заметив, что бивектор $\mathfrak{a}$ тогда и только тогда может быть приложен к вектору $\boldsymbol{e}$ (т. е. представлен в виде $\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{a}$), когда вектор $\mathfrak{a}^\perp$ ортогонален вектору $\boldsymbol{e}$. Более формально это вытекает в силу теоремы об изоморфизме из того, что как для векторов, так и для бивекторов компланарность равносильна линейной зависимости.

Очевидно, что аналогичное замечание справедливо и по отношению к коллинеарности.

Аналогично случаю векторов, семейство $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ трех некомпланарных (т. е. линейно независимых) бивекторов является базисом линеала Biv(3). Мы будем его называть *бивекторным базисом* в пространстве. Из теоремы об изоморфизме немедленно вытекает, что

любой бивектор $\mathfrak{a}$ линейно выражается через базис $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, т. е. существуют такие (однозначно определенные) числа a^1, a^2, a^3, что

$$\mathfrak{a} = a^1 \mathfrak{e}_1 + a^2 \mathfrak{e}_2 + a^3 \mathfrak{e}_3.$$

Чтобы подчеркнуть аффинный характер этого утверждения (и выяснить его геометрический смысл), мы дадим сейчас ему доказательство, не опирающееся на теорему об изоморфизме.

Сначала мы докажем его для бивекторных базисов некоторого специального вида.

Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — произвольный векторный базис. Ясно, что бивекторы [1])

$$\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$$

не компланарны и потому составляют некоторый бивекторный базис. Мы будем называть его бивекторным базисом, *соответствующим* данному векторному базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Представив произвольный бивектор $\mathfrak{a}$ в виде $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$, разложив векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ по векторам базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и воспользовавшись свойствами антикоммутативности, однородности и дистрибутивности внешнего умножения, мы немедленно получим, что

$$\mathfrak{a} = (a^2b^3 - a^3b^2)(\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) + (a^3b^1 - a^1b^3)(\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1) + \\ + (a^1b^2 - a^2b^1)(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2),$$

т. е. что

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) - \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1) + \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2), \quad (2)$$

где a^1, a^2, a^3 и b^1, b^2, b^3 — координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Таким образом, для бивекторных базисов, соответствующих векторным базисам, наше утверждение доказано. Чтобы доказать его в полном объеме, достаточно теперь попытаться доказать, что любой бивекторный базис $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ соответствует некоторому векторному базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Попробуем это сделать. Пусть Π_1, Π_2 и Π_3 — плоскости, параллельные бивекторам $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ и $\mathfrak{e}_3$. Эти плоскости попарно не параллельны и потому определены прямая α_1 пересечения плоскостей Π_2 и Π_3, прямая α_2 пересечения плоскостей Π_1 и Π_3 и прямая α_3 пересечения плоскостей Π_1 и Π_2. Пусть $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$ — произвольные базисы на прямых α_1, α_2 и α_3 соответственно. Ясно, что векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ не компланарны (в противном случае были бы компланарны бивекторы $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$) и потому составляют базис пространства. Кроме того, векторы $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$ составляют базис плоскости Π_1, векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_3$ — базис плоскости Π_2, а векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ — базис плоскости Π_3.

Поскольку вектор $\boldsymbol{a}_2$ параллелен плоскости Π_1, мы можем представить бивектор $\mathfrak{e}_1$ в виде внешнего произведения

$$\mathfrak{e}_1 = \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}'$$

вектора $\boldsymbol{a}_2$ и некоторого вектора $\boldsymbol{a}'$, параллельного плоскости Π_1 и потому выражающегося через векторы $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$:

$$\boldsymbol{a}' = p_1\boldsymbol{a}_2 + q_1\boldsymbol{a}_3.$$

---

[1]) Обратите внимание на порядок индексов.

Пользуясь свойствами внешнего умножения, мы находим отсюда, что

$$\mathfrak{e}_1 = \boldsymbol{a}_2 \wedge (p_1\boldsymbol{a}_2 + q_1\boldsymbol{a}_3) = q_1(\boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{a}_3).$$

Аналогично показывается, что существуют такие числа q_2 и q_3, что

$$\mathfrak{e}_2 = q_2(\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_3), \quad \mathfrak{e}_3 = q_3(\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2).$$

Постараемся теперь подобрать такие числа k_1, k_2, k_3, чтобы бивекторный базис, соответствующий векторному базису

$$\boldsymbol{e}_1 = k_1\boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{e}_2 = k_2\boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{e}_3 = k_3\boldsymbol{a}_3,$$

совпал с базисом $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$. Ясно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$q_1 = k_2k_3, \quad q_2 = -k_1k_3, \quad q_3 = k_1k_2.$$

Решая эту систему уравнений, мы получим, что

$$k_1 = \frac{\sqrt{-q_1q_2q_3}}{q_1}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{-q_1q_2q_3}}{-q_2}, \quad k_3 = \frac{\sqrt{-q_1q_2q_3}}{q_3}.$$

Эти формулы показывают, что наше построение приводит к цели только тогда, когда произведение $q_1q_2q_3$ отрицательно (в противном случае для чисел k_1, k_2, k_3 получаются мнимые значения). Таким образом, наше предположение, что любой бивекторный базис соответствует некоторому векторному базису, вообще говоря, ошибочно (или, по крайней мере, не может быть доказано изложенным методом). Тем не менее наши рассуждения показывают, что

какой бы бивекторный базис $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ *мы ни взяли, либо он, либо базис* $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $-\mathfrak{e}_3$ *соответствует некоторому векторному базису.*

Действительно, если для данного базиса $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ произведение $q_1q_2q_3$ оказалось положительным, то для базиса $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $-\mathfrak{e}_3$ аналогичное произведение будет отрицательным (ибо множитель q_3 сменит знак).

Но этого утверждения нам достаточно, поскольку бивектор, выражающийся через базис $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $-\mathfrak{e}_3$, выражается и через базис $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$. Таким образом, любой бивектор действительно можно выразить через базис $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$.

Коэффициенты a^1, a^2, a^3 линейного выражения бивектора $\mathfrak{a}$ через базис $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, естественно, называются *координатами* бивектора $\mathfrak{a}$. Так же, как для векторов, доказывается, что

координаты суммы бивекторов равны суммам координат слагаемых, а координаты произведения бивектора на число равны произведениям координат бивектора на это число.

Другими словами, выбор базиса $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ определяет, как и полагается, изоморфизм линеала $\mathrm{Biv}(3)$ всех бивекторов в пространстве на стандартный линеал $\mathbb{R}^3$ троек вещественных чисел.

Замечание 3. На практике часто встает вопрос о вычислении координат внешнего произведения $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ по координатам векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. При этом, конечно, имеются в виду координаты бивектора $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ в базисе $\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$, соответствующем базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Ответ на этот вопрос у нас фактически уже получен: он дается формулой (2).

Для запоминания этой формулы полезно заметить, что участвующие в ней определители являются минорами второго порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix},$$

составленной из координат данных векторов.

Вспомнив формулу разложения определителя третьего порядка по элементам строки (и учтя антикоммутативность внешнего умножения), мы можем формулу (2) переписать в следующем «детерминантном» виде:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}.$$

В частности, если нам дан некоторый другой векторный базис $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$, $\boldsymbol{e}_{3'}$, связанный с базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ соотношениями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{1'} &= c^1_{1'}\boldsymbol{e}_1 + c^2_{1'}\boldsymbol{e}_2 + c^3_{1'}\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_{2'} &= c^1_{2'}\boldsymbol{e}_1 + c^2_{2'}\boldsymbol{e}_2 + c^3_{2'}\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{e}_{3'} &= c^1_{3'}\boldsymbol{e}_1 + c^2_{3'}\boldsymbol{e}_2 + c^3_{3'}\boldsymbol{e}_3, \end{aligned}$$

то для соответствующего бивекторного базиса $\boldsymbol{e}_{2'} \wedge \boldsymbol{e}_{3'}$, $\boldsymbol{e}_{3'} \wedge \boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{1'} \wedge \boldsymbol{e}_{2'}$ будут иметь место равенства

$$\boldsymbol{e}_{2'} \wedge \boldsymbol{e}_{3'} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \\ c^1_{2'} & c^2_{2'} & c^3_{2'} \\ c^1_{3'} & c^2_{3'} & c^3_{3'} \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_{3'} \wedge \boldsymbol{e}_{1'} = \begin{vmatrix} c^1_{1'} & c^2_{1'} & c^3_{1'} \\ \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \\ c^1_{3'} & c^2_{3'} & c^3_{3'} \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_{1'} \wedge \boldsymbol{e}_{2'} = \begin{vmatrix} c^1_{1'} & c^2_{1'} & c^3_{1'} \\ c^1_{2'} & c^2_{2'} & c^3_{2'} \\ \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что

если некоторый бивектор $\mathfrak{x}$ *имел в базисе* $\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$ *координаты* x^1, x^2, x^3, *то в базисе* $\boldsymbol{e}_{2'} \wedge \boldsymbol{e}_{3'}$, $\boldsymbol{e}_{3'} \wedge \boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{1'} \wedge \boldsymbol{e}_{2'}$ *он будет иметь координаты* $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$, *связанные с координатами* x^1, x^2, x^3 *соотношениями*

$$x^1 = \begin{vmatrix} x^{1'} & c_{1'}^2 & c_{1'}^3 \\ x^{2'} & c_{2'}^2 & c_{2'}^3 \\ x^{3'} & c_{3'}^2 & c_{3'}^3 \end{vmatrix}, \quad x^2 = \begin{vmatrix} c_{1'}^1 & x^{1'} & c_{1'}^3 \\ c_{2'}^1 & x^{2'} & c_{2'}^3 \\ c_{3'}^1 & x^{3'} & c_{3'}^3 \end{vmatrix}, \quad x^3 = \begin{vmatrix} c_{1'}^1 & c_{1'}^2 & x^{1'} \\ c_{2'}^1 & c_{2'}^2 & x^{2'} \\ c_{3'}^1 & c_{3'}^2 & x^{3'} \end{vmatrix}.$$

Замечание 4. Конечно, аналогичные (только более простые) результаты имеют место и для бивекторов на плоскости.

Например, бивекторный базис на плоскости — это просто произвольный отличный от нуля бивектор. Каждый векторный базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ на плоскости определяет бивекторный базис $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$, причем для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на плоскости

координатой бивектора $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ *в базисе* $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$ *является определитель*

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix},$$

где a^1, a^2 *и* b^1, b^2 — *координаты векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *в базисе* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

При переходе от базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ к другому базису $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$ эта координата умножается, очевидно, на определитель $|C|$ соответствующей матрицы перехода C.

4. Метрическая теория бивекторов

Метрическая теория бивекторов изучает вопросы, связанные с площадью бивектора и с углом между бивекторами.

Площадь бивектора мы уже определили. Займемся теперь углом между двумя (отличными от нуля) бивекторами. Ясно, что это понятие (аналогично случаю векторов) сводится к понятию угла между плоскостями. Здесь мы также сталкиваемся с вопросом, какой из двух вертикальных углов между плоскостями мы должны выбрать. Для случая векторов мы преодолели аналогичную трудность, введя в рассмотрение угол между ориентированными прямыми. Сделаем то же самое и для плоскостей.

Пусть Π_1 и Π_2 — две ориентированные плоскости в пространстве. Выбрав единичный вектор $\boldsymbol{e}_1$, параллельный обеим плоскостям, подберем векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ так, чтобы векторы $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{a}_1$ составляли положительно ориентированный ортонормированный базис плоскости Π_1, а векторы $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{a}_2$ — положительно ориентированный ортонормированный базис плоскости Π_2. Угол θ между

векторами $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ мы и объявим углом между ориентированными плоскостями Π_1 и Π_2. Корректность этого определения очевидна: единственный произвол состоит в выборе орта $\boldsymbol{e}$, но при $\theta \neq 0$ его можно заменить только ортом $-\boldsymbol{e}$ и тогда векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ перейдут в векторы $-\boldsymbol{a}_1$ и $-\boldsymbol{a}_2$. Угол же между векторами $-\boldsymbol{a}_1$ и $-\boldsymbol{a}_2$ равен углу между векторами $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. При $\theta = 0$ векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ совпадают при любом выборе вектора $\boldsymbol{e}$.

Несколько иначе угол между плоскостями Π_1 и Π_2 можно определить, выбрав в пространстве некоторую ориентацию (от которой окончательный результат не будет зависеть) и сопоставив каждой ориентированной плоскости Π перпендикулярный ей вектор $\boldsymbol{n}$, направленный в положительную сторону, т. е. в такую, что произведение ориентации плоскости Π на ориентацию перпендикулярной прямой, определенной вектором $\boldsymbol{n}$, совпадает с данной ориентацией пространства (о таком векторе $\boldsymbol{n}$ принято говорить, что он является вектором *положительной нормали* к ориентированной плоскости в ориентированном пространстве). Тогда углом между ориентированными плоскостями Π_1 и Π_2 называется, по определению, угол между соответствующими векторами $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$.

Чтобы сравнить это определение с предыдущим, достаточно заметить, что в обозначениях, введенных в п. 2, вектор $\boldsymbol{n}_1$ является вектором $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a}_1)$, а вектор $\boldsymbol{n}_2$ — вектором $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{a}_2)$, и, следовательно, угол между векторами $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ совпадает с углом между векторами $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — произвольные отличные от нуля бивекторы. Рассмотрим произвольную плоскость Π_1, которой параллелен бивектор $\mathfrak{a}$, и произвольную плоскость Π_2, которой параллелен бивектор $\mathfrak{b}$. Будем считать эти плоскости снабженными ориентациями, определенными соответственно бивекторами $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Тогда угол θ между этими плоскостями мы будем называть *углом* между бивекторами $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.

Очевидно, что определение 1 корректно (не зависит от выбора плоскостей Π_1 и Π_2).

Теперь мы можем определить *скалярное произведение* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ бивекторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ той же формулой, что и для векторов:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}|\cos\theta.$$

Можно без особого труда доказать, что это скалярное произведение обладает всеми алгебраическими свойствами скалярного произведения векторов, перечисленными в теореме п. 2 § 5 (не совсем тривиально лишь доказательство свойства дистрибутивности). После этого весь материал § 5 (по крайней мере с формальной стороны) полностью может быть повторен для бивекторов. В частности, ясно, что понимать под *ортонормированным бивекторным базисом.* Все формулы, связанные с ортонормированными базисами, конечно, также остаются справедливыми. Например, квадрат площади бивектора $\mathfrak{a}$ (совпадаю-

щий с его скалярным квадратом) равен сумме квадратов его координат a_1, a_2, a_3 в произвольном ортонормированном базисе:

$$|\mathfrak{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Впрочем, все это можно установить значительно проще, если заметить, что построенный в п. 2 изоморфизм $\mathfrak{a} \longmapsto \mathfrak{a}^\perp$ сохраняет скалярное произведение (является изоморфизмом и по отношению к скалярному умножению), т. е. что

для любых бивекторов $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *имеет место равенство*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^\perp \mathfrak{b}^\perp.$$

Замечание 1. На первый взгляд это дискредитирует всю теорию бивекторов: зачем ее строить, если она изоморфна теории векторов? На самом же деле все обстоит как раз наоборот: установление изоморфизма двух математических теорий не устраняет одну из них, а лишь ликвидирует неприятную необходимость доказывать ее результаты. При этом формально одинаковые выражения могут иметь совершенно различное содержание.

Рассмотрим, например, формулу для скалярного квадрата в ортонормированном базисе. Для векторов — это формула длины, а для бивекторов — это формула площади. Очевидно, что для любого ортонормированного векторного базиса $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ соответствующий бивекторный базис также ортонормирован. Отсюда и из формулы для скалярного квадрата бивектора мы немедленно получаем (вспомнив формулу для координат бивектора $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ в базисе $\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$), что

квадрат площади s *параллелограмма, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ *и* $\boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3)$, *выражается формулой*

$$s^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2.$$

Аналогичное утверждение для плоскости гласит, что

площадь s *параллелограмма, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}(a_1, a_2)$ *и* $\boldsymbol{b}(b_1, b_2)$, *равна абсолютной величине определителя*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Хотя в этих утверждениях бивекторы явно не упоминаются, по существу любые их доказательства так или иначе должны использовать бивекторы (быть может, в завуалированном виде). При этом каждое такое «искусственное» доказательство волей-неволей будет в достаточной мере длинным и утомительным, тогда как в рамках теории бивекторов это утверждение получается «бесплатно», как изоморфный вариант уже известного факта о векторах.

Однако метрическая теория бивекторов имеет и свои специфические особенности, не имеющие аналогов в теории векторов. Мы имеем в виду, например, формулы, выражающие скалярное произведение бивекторов $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}$ через векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Прежде чем выводить эти формулы, мы рассмотрим некоторые необходимые для этого понятия.

Определение 2. Пусть $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ — две пары векторов. Их *взаимным определителем Грама* называется определитель

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{ac} & \boldsymbol{ad} \\ \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{bd} \end{vmatrix} = (\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd}) - (\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bc}). \tag{1}$$

Соответствующую матрицу

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{ac} & \boldsymbol{ad} \\ \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{bd} \end{pmatrix}$$

полезно представлять себе как «скалярное» произведение

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$$

одностолбцовой матрицы $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ и однострочечной матрицы $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$.

В случае, когда пары $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ совпадают, соответствующий определитель

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{ab} \\ \boldsymbol{ba} & \boldsymbol{b}^2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{ab})^2$$

обозначается символом $\Gamma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и называется *определителем Грама* векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

В случае, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно независимы, т. е. составляют базис соответствующей плоскости, элементами определителя Грама $\Gamma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ являются метрические коэффициенты этого базиса.

Основное свойство определителя Грама выражается следующим предложением:

Предложение 1. *Определитель Грама* (1) *зависит только от бивекторов* $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что при элементарных преобразованиях, скажем, пары $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ определитель (1) не меняется (при элементарном преобразовании $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \sim \left(k\boldsymbol{a}, \frac{1}{k}\boldsymbol{b}\right)$ его первая строка умножается на k, а вторая на $\frac{1}{k}$, так что весь определитель умножается на $k \cdot \frac{1}{k} = 1$, а при элементарном преобразовании $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \sim (\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$ к его первой строке прибавляется вторая, умноженная на k, отчего, как известно, определитель не меняется). Кроме того, если

пара $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ линейно зависима, то определитель (1), очевидно, равен нулю.

Таким образом, определитель Грама (1) является некоторой функцией бивекторов $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}$. Оказывается, что он совпадает с их скалярным произведением, так что

для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *и* $\boldsymbol{d}$ *имеет место формула*

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{ac} & \boldsymbol{ad} \\ \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{bd} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Поскольку обе части формулы (2) зависят только от бивекторов $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}$, мы можем в доказательстве этой формулы, без ограничения общности, предполагать, что векторы $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ ортогональны. Кроме того, поскольку при умножении одного из векторов на произвольное число формула (2) также остается справедливой, нам достаточно ее доказать лишь для случая, когда векторы $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ единичны (и ортогональны). Обозначив эти векторы символами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, дополним их третьим вектором $\boldsymbol{k}$ до ортонормированного базиса пространства. Пусть a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 — координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в этом базисе. Тогда, как мы знаем, бивектор $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ в базисе $\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}$ будет иметь координаты

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

а бивектор $\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d} = \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}$ — координаты

$$0, \quad 0, \quad 1.$$

Следовательно, их скалярное произведение будет равно определителю

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \tag{3}$$

(напомним, что бивекторный базис $\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}$ ортонормирован). С другой стороны, в нашем случае

$$\boldsymbol{ac} = a_1, \quad \boldsymbol{ad} = a_2,$$
$$\boldsymbol{bc} = b_1, \quad \boldsymbol{bd} = b_2,$$

так что определитель Грама (1) также равен определителю (3). Тем самым формула (2) полностью доказана.

Замечание 2. В случае коллинеарных бивекторов формула (2) сводится к формуле умножения определителей. Для неколлинеарных бивекторов она представляет собой некоторое алгебраическое тождество (для координат векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ в ортонормированном базисе), являющееся обобщением на прямоугольные матрицы формулы умножения определителей.

В этой форме оно, конечно, немедленно доказывается прямым вычислением. Мы предпочли дать более геометрическое доказательство, чтобы проиллюстрировать на этом простом примере ряд полезных приемов математического доказательства.

В частности, мы видим, что
определитель Грама $\Gamma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *пары векторов равен квадрату площади параллелограмма, построенного на этих векторах*:

$$\Gamma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = s^2.$$

Поскольку $s^2 \geqslant 0$, отсюда вытекает, что
для любых векторов $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *имеет место неравенство*

$$\Gamma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \geqslant 0,$$

причем $\Gamma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ *тогда и только тогда, когда векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *линейно зависимы.*

Это неравенство совпадает, очевидно, с неравенством Коши — Буняковского (см. п. 3 § 5). Таким образом, мы заново его доказали. Одновременно мы выяснили его геометрический смысл.

5. Тривекторы

По аналогии с векторами и бивекторами вы вводим следующее

Определение 1. Две упорядоченные четверки точек (A, B, C, D) и (A', B', C', D') называются *эквиполлентными*, если либо

1) обе четверки компланарны,

либо

2) обе четверки некомпланарны и

а) определяют одну и ту же ориентацию пространства,

б) объем тетраэдра $ABCD$ равен объему тетраэдра $A'B'C'D'$.

Ясно, что отношение эквиполлентности четверок является отношением эквивалентности. Соответствующие классы эквивалентности называются *тривекторами.* Тривектор, содержащий четверку (A, B, C, D), обозначается символом $\overrightarrow{ABCD}$.

По определению, все компланарные четверки составляют один тривектор. Этот тривектор называется *нулевым* и обозначается символом $\mathfrak{O}$.

Замечание 1. Тривекторы имеет смысл рассматривать только в пространстве, поскольку на плоскости (и тем более на прямой) имеется только один тривектор — нулевой.

Множество всех тривекторов в пространстве мы будем обозначать символом $\mathrm{Triv}(3)$.

Любой упорядоченной тройке векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ мы можем отнести некоторый тривектор $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$, отложив векторы от одной точки:

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$$

и положив

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OABC}.$$

Определение 2. Тривектор $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$ называется *внешним произведением* векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Легко видеть, что внешнее произведение трех векторов определено корректно, т. е. не зависит от выбора точки O.

Ясно, что

векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ тогда и только тогда линейно зависимы (компланарны), когда их внешнее произведение равно нулю:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \mathfrak{O}.$$

Подобно тому, как бивекторы можно отождествить с классами эквиполлентных пар векторов, тривекторы можно считать не классами упорядоченных четверок точек, а классами упорядоченных троек векторов. При этом две тройки $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ и $(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}')$ тогда и только тогда определяют один тривектор (*эквиполлентны*), когда либо

1) они обе компланарны,

либо

2) они обе некомпланарны и

а) базисы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$ одноименны,

б) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$.

Об ориентации, определенной базисом $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, говорят, что она *определяется* тривектором $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$, а объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, называется *объемом* (или *мерой*) тривектора $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$. Ввиду условий а) и б) эти определения корректны. Объем тривектора $\mathfrak{A}$ обозначается символом $|\mathfrak{A}|$.

Объем нулевого тривектора, по определению, считается равным нулю. Никакой ориентации нулевой тривектор не определяет.

Ясно, что

тривектор $\mathfrak{A}$ однозначно определен, если известны его объем $|\mathfrak{A}|$ и (при $|\mathfrak{A}| \neq 0$) определяемая им ориентация.

Упражнение. Дайте «аффинное» определение равенства тривекторов, вводя для этого соответствующие элементарные преобразования (ср. § 6, п. 1, определение 4 и замечание 3).

Определение 3. *Произведением* $k\mathfrak{A}$ тривектора $\mathfrak{A}$ на число k называется тривектор, имеющий объем $|k| \cdot |\mathfrak{A}|$ и (при $|k| \cdot |\mathfrak{A}| \neq 0$) определяющий ту же ориентацию, что и тривектор

$\mathfrak{A}$, когда $k > 0$, и противоположную ориентацию, когда $k < 0$. Тривектор $(-1)\,\mathfrak{A}$ обозначается символом $-\mathfrak{A}$ и называется *противоположным* тривектором (к тривектору $\mathfrak{A}$). Он имеет тот же объем, что и тривектор $\mathfrak{A}$; но (при $|\mathfrak{A}| \neq 0$) определяет противоположную ориентацию.

Ясно, что

для любых двух тривекторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ существует такое число k, что либо $\mathfrak{A} = k\mathfrak{B}$, либо $\mathfrak{B} = k\mathfrak{A}$.

Другими словами, можно сказать, что любые два тривектора «коллинеарны».

Без труда проверяется, что

для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и любого числа k имеют место равенства

$$(k\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge (k\boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge (k\boldsymbol{c}) = k(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$$

(свойство однородности внешнего умножения).

Так как при транспозиции векторов базиса его ориентация меняется на противоположную, а объем построенного на них параллелепипеда остается прежним, то

для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ имеют место равенства

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} = \\ = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$$

(свойство антикоммутативности внешнего умножения)

Определение 4. Пусть $\mathfrak{a} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — произвольные бивектор и вектор. Их *внешним произведением* $\mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c}$ мы будем называть тривектор

$$\mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}.$$

Кроме того, по определению, мы положим

$$\boldsymbol{c} \wedge \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c}.$$

Необходимо, конечно, проверить корректность определения тривектора $\mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c}$, т. е. его независимость от выбора векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. С этой целью мы заметим, что тривектор $\mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c}$ обладает, очевидно, следующими свойствами:

1) его объем выражается формулой

$$|\mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c}| = |\mathfrak{a}| \cdot h,$$

где $|\mathfrak{a}|$ — площадь бивектора $\mathfrak{a}$, а h — длина проекции вектора $\boldsymbol{c}$ параллельно плоскости бивектора $\mathfrak{a}$ на прямую, перпендикулярную этой плоскости;

2) определяемая им ориентация (при $|\mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c}| \neq 0$) является произведением ориентации, определяемой бивектором $\mathfrak{a}$, и ориентации, определяемой вектором $\boldsymbol{c}$.

Поскольку эти свойства однозначно характеризуют тривектор $\mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c}$ и поскольку они не зависят от выбора векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, определение тривектора $\mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c}$ корректно.

Из этого определения непосредственно вытекает следующее предложение, аналогичное предложению 1 п. 1:

Предложение 1. *Равенство* $\mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c} = \mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c}'$ (*при* $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$) *имеет место тогда и только тогда, когда вектор* $\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{c}$ *параллелен плоскости бивектора* $\mathfrak{a}$.

Кроме того, ясно, что аналог леммы 1 из п. 2 также справедлив, т. е.

для любого тривектора $\mathfrak{A}$ *и любого отличного от нуля бивектора* $\mathfrak{a}$ *существует такой вектор* $\boldsymbol{c}$, *что*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c}.$$

Обратим внимание, что для операции внешнего умножения бивектора на вектор свойство однородности также, очевидно, выполнено, т. е. для любого числа k имеют место равенства

$$(k\mathfrak{a}) \wedge \boldsymbol{c} = \mathfrak{a} \wedge (k\boldsymbol{c}) = k(\mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c}).$$

Формулу, определяющую тривектор $\mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{c}$, запишем в виде:

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}.$$

Кроме того, поскольку

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a}$$

и

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a},$$

то

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}.$$

Таким образом,

для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *имеют место равенства*

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$$

(свойство ассоциативности внешнего умножения).

Заметим, что в последней формуле знак $\wedge$ употребляется в трех различных смыслах.

Определение 5. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные тривекторы. Выбрав некоторый отличный от нуля бивектор $\mathfrak{e}$, положим

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{e} \wedge \boldsymbol{a}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{e} \wedge \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — некоторые векторы. Мы определим *сумму* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ тривекторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ формулой

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{e} \wedge (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$$

(ср. аналогичное определение для бивекторов в п. 2).

Чтобы доказать корректность этого определения, мы вспомним, что существует такое число k, что, скажем $\mathfrak{B} = k\mathfrak{A}$

(причем за исключением случая, когда $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}$ и $\mathfrak{B} = \mathfrak{O}$, это число однозначно определено). Тогда

$$\mathfrak{e} \wedge \boldsymbol{b} = k(\mathfrak{e} \wedge \boldsymbol{a}) = \mathfrak{e} \wedge (k\boldsymbol{a})$$

и потому вектор $k\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (k+1)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ параллелен плоскости бивектора $\mathfrak{e}$. Следовательно,

$$\mathfrak{e} \wedge (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \mathfrak{e} \wedge (k+1)\boldsymbol{a}.$$

Заметив, наконец, что

$$\mathfrak{e} \wedge (k+1)\boldsymbol{a} = (k+1)(\mathfrak{e} \wedge \boldsymbol{a}) = (k+1)\mathfrak{A},$$

мы окончательно получим, что при $\mathfrak{B} = k\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = (k+1)\mathfrak{A}. \tag{1}$$

Следовательно, определение тривектора $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ корректно.

Очевидным образом проверяется (с использованием формулы (1)), что

построенные линейные операции над тривекторами обладают всеми восемью стандартными свойствами линейных операций над векторами, т. е. что множество Triv(3) *всех тривекторов является линеалом.*

Поэтому, в частности, для тривекторов сохраняется вся теория линейной зависимости, построенная в п. 3 § 3. Впрочем, как уже отмечалось, эта теория для тривекторов вырождается в тривиальность, поскольку любые два тривектора линейно зависимы.

Произвольный отличный от нуля тривектор $\mathfrak{E}$ называется (тривекторным) *базисом.* Ясно, что любой другой тривектор $\mathfrak{A}$ единственным образом представляется в виде

$$\mathfrak{A} = a\mathfrak{E}.$$

Число a называется, естественно, *координатой* тривектора $\mathfrak{A}$ в базисе $\mathfrak{E}$. Ясно, что соответствие $\mathfrak{A} \longmapsto a$ определяет изоморфизм линеала Triv(3) на стандартный линеал $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$.

Заметим, что по определению внешнее произведение $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$ обладает свойством дистрибутивности по отношению к последнему множителю:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge (\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}_2.$$

Однако, поскольку это произведние антикоммутативно, оно будет обладать этим свойством и по отношению к первым двум множителям:

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}_2 \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c},$$
$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}_1 \wedge \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}_2 \wedge \boldsymbol{c}.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \wedge \boldsymbol{c} = \mathfrak{a}_1 \wedge \boldsymbol{c} + \mathfrak{a}_2 \wedge \boldsymbol{c}.$$

Для любого векторного базиса e_1, e_2, e_3 тривектор $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ отличен от нуля, т. е. является тривекторным базисом. Очевидное вычисление (использующее свойства однородности, дистрибутивности и антикоммутативности внешнего умножения) показывает, что

для любых трех векторов $a = a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3$, $b = b^1 e_1 + b^2 e_2 + b^3 e_3$ *и* $c = c^1 e_1 + c^2 e_2 + c^3 e_3$ *имеет место равенство*

$$a \wedge b \wedge c = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3).$$

Из этой связи между тривекторами и определителями можно без труда вывести все основные свойства определителей (только свойство равноправности строк и столбцов получить на этом пути трудно).

Если базис e_1, e_2, e_3 ортонормирован, то объем тривектора $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ равен единице. Отсюда вытекает, что

объем параллелепипеда, построенного на векторах $a(a_1, a_2, a_3)$, $b(b_1, b_2, b_3)$ *и* $c(c_1, c_2, c_3)$, *равен абсолютной величине определителя*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Заметим, что в этом утверждении понятие тривектора в явном виде не фигурирует.

Определитель (2) (с точностью до транспонировании) представляет собой определитель матрицы перехода от ортонормированного базиса e_1, e_2, e_3 к базису a, b, c. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 2. *Объем параллелепипеда, построенного на векторах некоторого базиса, равен абсолютной величине определителя* $|C|$ *матрицы перехода к данному базису от некоторого ортонормированного базиса.*

Определение 6. Пусть (a, b, c) и (a_1, b_1, c_1) — произвольные упорядоченные тройки векторов. Их *взаимным определителем Грама* называется определитель вида

$$\begin{vmatrix} aa_1 & ab_1 & ac_1 \\ ba_1 & bb_1 & bc_1 \\ ca_1 & cb_1 & cc_1 \end{vmatrix}.$$

Матрицу

$$\begin{pmatrix} aa_1 & ab_1 & ac_1 \\ ba_1 & bb_1 & bc_1 \\ ca_1 & cb_1 & cc_1 \end{pmatrix}$$

этого определителя полезно представлять себе в виде «скалярного» произведения

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (a_1, b_1, c_1)$$

одностолбцовой матрицы $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ на однострочечную матрицу (a_1, b_1, c_1).

В случае, когда тройки (a, b, c) и (a_1, b_1, c_1) совпадают, соответствующий определитель

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{vmatrix}$$

называется *определителем Грама* тройки (a, b, c) и обозначается символом $\Gamma(a, b, c)$. Его матрица для линейно независимой тройки (базиса) a, b, c является не чем иным, как матрицей метрических коэффициентов этого базиса.

Определение 7. Скалярным произведением $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ двух тривекторов называется произведение их длин, взятое со знаком плюс, если эти тривекторы определяют одну и ту же ориентацию пространства, и со знаком минус — в противном случае.

Точно так же, как для бивекторов, доказывается, что

скалярное произведение тривекторов $a \wedge b \wedge c$ *и* $a_1 \wedge \wedge b_1 \wedge c_1$ *равно взаимному определителю Грама троек* (a, b, c) *и* (a_1, b_1, c_1):

$$(a \wedge b \wedge c)(a_1 \wedge b_1 \wedge c_1) = \begin{vmatrix} aa_1 & ab_1 & ac_1 \\ ba_1 & bb_1 & bc_1 \\ ca_1 & cb_1 & cc_1 \end{vmatrix}.$$

Впрочем, быть может, это проще доказать, заметив, что скалярное произведение тривекторов, выраженное через координаты в ортонормированном базисе, сводится к умножению определителей.

Применив это предложение к случаю одинаковых тривекторов, мы немедленно получим, что

для любых трех векторов a, b, c *квадрат* v^2 *объема параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен их определителю Грама*:

$$v^2 = \Gamma(a, b, c).$$

Отсюда вытекает, что

для любых трех векторв a, b *и* c *имеет место неравенство*

$$\Gamma(a, b, c) \geqslant 0,$$

вырождающееся в равенство тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *линейно зависимы.*

В частности, мы видим, что

для любого базиса пространства определитель матрицы его метрических коэффициентов положителен:

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Об этом факте мы уже имели случай упомянуть в п. 4 § 5.

6. Векторное и смешанное произведения

Воспользовавшись изоморфизмом между бивекторами и векторами, мы при желании можем вообще исключить какое-либо упоминание о бивекторах, заменяя их всюду ассоциированными векторами. Например, вместо того чтобы говорить о бивекторе $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$, мы можем говорить о векторе $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})^{\perp}$.

Определение 1. Вектор $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})^{\perp}$ называется *векторным произведением* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и обозначается символом $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Таким образом, векторное произведение линейно зависимых (коллинеарных) векторов равно нулю; если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, векторное произведение $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ отлично от нуля и определяется следующими условиями:

1) его длина равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

2) он перпендикулярен плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

3) базис $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ положительно ориентирован (по отношению к данной ориентации пространства).

Свойства векторного умножения немедленно вытекают из соответствующих свойств внешнего умножения. В частности,

векторное умножение антикоммутативно и дистрибутивно относительно сложения.

Для любого положительно ориентированного ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ имеют место, очевидно, формулы

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.$$

Поэтому

в положительно ориентированном ортонормированном базисе вектор $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ *имеет координаты*

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

где a_1, a_2, a_3 — *координаты вектора* $\boldsymbol{a}$, а b_1, b_2, b_3 — *координаты вектора* $\boldsymbol{b}$.

Воспользовавшись формулой разложения определителя по элементам строки, мы можем этот факт записать в виде следующей компактной формулы:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Полезно также иметь в виду, что

квадрат $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2$ *длины* $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ *векторного произведения* $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ *равен определителю Грама* $\Gamma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

Векторное произведение имеет то преимущество, что оно оставляет нас в рамках чистой теории векторов. Однако его смысл и значение могут быть полностью выяснены лишь с «бивекторных» позиций. (В частности, прямое доказательство его свойств по существу использует бивекторы, хотя и в неявном виде.) Кроме того, его определение имеет тот неустранимый недостаток, что оно содержит элемент произвола (выбор ориентации пространства). Мы не говорим уже о его сугубо метрическом характере, скрадывающем аффинный характер понятия бивектора [1]).

Аналогично, воспользовавшись изоморфизмом между линеалами Triv(3) и $\mathbb{R}$, мы можем всюду заменить тривекторы соответствующими числами (координатами). При этом, конечно, возникает элемент произвола, связанный с выбором тривекторного базиса $\mathfrak{E}$, определяющего данный изоморфизм, т. е. с выбором эталона объема и, что более существенно, ориентации пространства.

Определение 2. Координата тривектора $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$ называется *смешанным* (или *тройным*) *произведением* векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и обозначается символом $\boldsymbol{abc}$.

Смешанное произведение является таким же заменителем внешнего произведения $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$, каким векторное произведение $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ является по отношению к внешнему произведению $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$. Его свойства немедленно вытекают из соответствующих свойств внешнего произведения. В частности,

смешанное произведение антикоммутативно и дистрибутивно по каждому сомножителю.

В положительно ориентированном ортонормированном базисе смешанное произведение выражается формулой

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

---

[1]) Не последнюю роль играет и тот факт, что в n-мерных пространствах при $n > 3$ векторное произведение двух векторов вообще нельзя определить, тогда как теория бивекторов полностью сохраняется.

Впрочем, для справедливости этой формулы ортонормированность базиса является, очевидно, слишком сильным требованием: достаточно, чтобы объем параллелепипеда, построенного на векторах базиса, был бы равен единице.

Упражнение. Докажите, что смешанное произведение следующим образом выражается через векторное и скалярное произведения:

$$abc = a(b \times c).$$

(Этим и объясняется термин «смешанное произведение».)

Подчеркнем, что смешанное произведение зависит от выбора ориентации пространства: при смене ориентации оно меняет знак.

§ 7. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Отображения и преобразования

В этом вводном пункте мы напоминаем некоторые общематематические факты, связанные с понятием отображения. Эти факты читателю почти наверняка известны, но мы все же их вкратце изложим, хотя бы для того, чтобы уточнить терминологию.

Определение 1. Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Отображением φ: $X \to Y$ множества X в множество Y называется[1]) произвольное правило, позволяющее каждому элементу $x \in X$ сопоставить некоторый однозначно определенный элемент $y \in Y$. Элемент y называется *образом* элемента x при отображении φ и обозначается символом $\varphi(x)$.

Для отображений φ: $X \to Y$ и ψ: $Y \to Z$ определена их *композиция*

$$\psi \circ \varphi\colon X \to Z$$

(иногда называемая также их *произведением*), задаваемая формулой

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in X.$$

Без труда проверяется, что композиция отображений *ассоциативна*, т. е. для любых трех отображений φ: $X \to Y$, ψ: $Y \to Z$ и χ: $Z \to U$ отображения $(\chi \circ \psi) \circ \varphi$ и $\chi \circ (\psi \circ \varphi)$ совпадают:

$$(\chi \circ \psi) \circ \varphi = \chi \circ (\psi \circ \varphi).$$

Поэтому обычно скобки опускают и пишут просто $\chi \circ \psi \circ \varphi$.

Определение 2. Множество всех элементов $y \in Y$, для которых существует такой элемент $x \in X$, что $\varphi(x) = y$, называется *образом* отображения φ и обозначается символом $\varphi(X)$. Если $\varphi(X) = Y$, то отображение φ называется *надъективным*.

Если для любых двух различных элементов x_1, $x_2 \in X$ элементы $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2) \in Y$ также различны, отображение φ называется *инъективным*.

---

[1]) Это, конечно, не определение, а скорее описание. Дать строгое определение понятию отображения по существу так же трудно, как и понятию множества.