Впрочем, для справедливости этой формулы ортонормированность базиса является, очевидно, слишком сильным требованием: достаточно, чтобы объем параллелепипеда, построенного на векторах базиса, был бы равен единице.

Упражнение. Докажите, что смешанное произведение следующим образом выражается через векторное и скалярное произведения:

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}).$$

(Этим и объясняется термин «смешанное произведение».)

Подчеркнем, что смешанное произведение зависит от выбора ориентации пространства: при смене ориентации оно меняет знак.

§ 7. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Отображения и преобразования

В этом вводном пункте мы напоминаем некоторые общематематические факты, связанные с понятием отображения. Эти факты читателю почти наверняка известны, но мы все же их вкратце изложим, хотя бы для того, чтобы уточнить терминологию.

Определение 1. Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Отображением $\varphi\colon X \to Y$ множества X в множество Y называется[1]) произвольное правило, позволяющее каждому элементу $x \in X$ сопоставить некоторый однозначно определенный элемент $y \in Y$. Элемент y называется *образом* элемента x при отображении φ и обозначается символом $\varphi(x)$.

Для отображений $\varphi\colon X \to Y$ и $\psi\colon Y \to Z$ определена их *композиция*

$$\psi \circ \varphi\colon X \to Z$$

(иногда называемая также их *произведением*), задаваемая формулой

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)), \qquad x \in X.$$

Без труда проверяется, что композиция отображений *ассоциативна*, т. е. для любых трех отображений $\varphi\colon X \to Y$, $\psi\colon Y \to Z$ и $\chi\colon Z \to U$ отображения $(\chi \circ \psi) \circ \varphi$ и $\chi \circ (\psi \circ \varphi)$ совпадают:

$$(\chi \circ \psi) \circ \varphi = \chi \circ (\psi \circ \varphi).$$

Поэтому обычно скобки опускают и пишут просто $\chi \circ \psi \circ \varphi$.

Определение 2. Множество всех элементов $y \in Y$, для которых существует такой элемент $x \in X$, что $\varphi(x) = y$, называется *образом* отображения φ и обозначается символом $\varphi(X)$. Если $\varphi(X) = Y$, то отображение φ называется *надъективным*.

Если для любых двух различных элементов $x_1, x_2 \in X$ элементы $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2) \in Y$ также различны, отображение φ называется *инъективным*.

[1]) Это, конечно, не определение, а скорее описание. Дать строгое определение понятию отображения по существу так же трудно, как и понятию множества.

Отображение φ называется *биективным* (или *взаимно однозначным*), если оно одновременно инъективно и надъективно. В этом случае для любого элемента $y \in Y$ существует единственный элемент $x \in X$, обладающий тем свойством, что

$$\varphi(x) = y.$$

Поэтому формула

$$\varphi^{-1}(y) = x$$

определяет некоторое отображение

$$\varphi^{-1}\colon Y \to X,$$

называемое отображением, *обратным* к отображению $\varphi\colon X \to Y$.

Обратное отображение также биективно, причем отображением, обратным к нему, служит отображение φ:

$$(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi.$$

Примером биективного отображения может служить *тождественное отображение* 1_X (или просто 1) множества X на себя, определяемое формулой

$$1_X(x) = x, \qquad x \in X.$$

Определение 3. Отображение $\varphi\colon X \to Y$ называется *обратимым слева* (соответственно *обратимым справа*), если существует такое отображение $\varphi'\colon Y \to X$ (такое отображение $\varphi''\colon Y \to X$), что $\varphi' \circ \varphi = 1_X$ (соответственно $\varphi \circ \varphi'' = 1_Y$). Отображение называется *обратимым*, если оно обратимо слева и справа.

Легко видеть, что

отображение $\varphi\colon X \to Y$ *тогда и только тогда обратимо слева* (*справа*), *когда оно инъективно* (*надъективно*).

Действительно, пусть отображение φ обратимо слева, т. е. пусть существует такое отображение $\varphi'\colon Y \to X$, что

$$\varphi' \circ \varphi = 1_X,$$

и пусть x_1, x_2 — такие элементы множества X, что

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2).$$

Применяя к обеим частям этого равенства отображение φ' и учитывая, что, по определению, для любого элемента $x \in X$

$$(\varphi' \circ \varphi)(x) = 1_X(x) = x,$$

мы немедленно получаем, что

$$x_1 = x_2.$$

Следовательно, отображение φ инъективно.

Обратно, пусть отображение φ инъективно. Тогда для любого элемента $y \in \varphi(X)$ существует единственный элемент x_y, для которого $\varphi(x_y) = y$. Выбрав в X произвольный элемент x_0, мы определим отображение

$$\varphi'\colon Y \to X$$

формулой

$$\varphi'(y)=\begin{cases} x_y, & \text{если} \quad y\in\varphi(X), \\ x_0, & \text{если} \quad y\notin\varphi(X). \end{cases}$$

Тогда $\varphi'\circ\varphi=1_X$, так что отображение φ обратимо слева.

Пусть теперь отображение φ обратимо справа, т. е. пусть существует такое отображение $\varphi''\colon Y\to X$, что

$$\varphi\circ\varphi''=1_Y.$$

Тогда для любого элемента $y\in Y$ элемент $x=\varphi''(y)\in X$ будет обладать тем свойством, что $\varphi(x)=y$, и следовательно, отображение φ надъективно.

Наконец, пусть отображение φ надъективно. Тогда для любого элемента $y\in Y$ существует (вообще говоря, не один) элемент $x\in X$, обладающий тем свойством, что $\varphi(x)=y$. Выбрав (произвольно) один такой элемент, обозначим его символом $\varphi''(y)$. Тем самым мы получим некоторое отображение $\varphi''\colon Y\to X$, обладающее тем свойством, что $\varphi\circ\varphi''=1_Y$.

В частности, мы видим, что

отображение $\varphi\colon X\to Y$ *тогда и только тогда обратимо, когда оно биективно.*

При этом для биективного отображения φ отображения φ' и φ'' определяются единственным образом н совпадают с обратным отображением φ^{-1}. Таким образом, биективное отображение $\varphi\colon X\to Y$ можно определить как такое отображение, для которого существует отображение $\varphi^{-1}\colon Y\to X$, удовлетворяющее соотношениям

$$\varphi^{-1}\circ\varphi=1_X,\quad \varphi\circ\varphi^{-1}=1_Y.$$

Легко видеть, что композиция двух надъективных (инъективных) отображений также надъективна (инъективна). Следовательно,

композиция $\psi\circ\varphi$ *двух биективных отображений является биективным отображением.*

При этом

$$(\psi\circ\varphi)^{-1}=\varphi^{-1}\circ\psi^{-1}.$$

Определение 4. Биективные отображения множества X на себя называются его *преобразованиями.*

Непустое множество преобразований называется *группой преобразований,* если

1) вместе с двумя преобразованиями φ и ψ оно содержит и их композицию $\psi\circ\varphi$;

2) вместе с преобразованием φ оно содержит и обратное преобразование φ^{-1}.

Поскольку группа преобразований непуста, из условия 2) вытекает, что она обязательно содержит тождественное преобразование 1_X.

Замечание 1. Группы преобразований являются частным случаем известного из алгебры общего понятия (абстрактной) группы. В отличие от определения абстрактных групп, в определение групп преобразований включать требование ассоциативности не нужно, поскольку для умножения преобразований оно выполнено автоматически.

Замечание 2. В дальнейшем (например, в гл. 7) мы изредка будем пользоваться некоторыми простейшими понятиями абстрактной теории групп. Напомним их определения, отсылая за подробностями к курсу высшей алгебры. Определение группы мы будем считать известным.

Подмножество H группы G называется

а) *подгруппой*, если $h_1h_2 \in H$ и $h^{-1} \in H$ для любых элементов h_1, h_2, $h \in H$;

б) *нормальным делителем*, если H — подгруппа и если $ghg^{-1} \in H$ для любых элементов $h \in H$, $g \in G$;

в) *смежным классом* (левым) по подгруппе K, если $h_1^{-1}h_2 \in K$ для любых элементов h_1, $h_2 \in H$.

Отображение

$$\varphi\colon G \to G'$$

одной группы в другую называется *гомоморфизмом*, если

$$\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\,\varphi(g_2) \quad \text{для любых} \quad g_1, g_2 \in G.$$

Инъективный гомоморфизм называется *мономорфизмом*, надъективный — *эпиморфизмом*, а биективный — *изоморфизмом*.

Пусть e' — единица группы G'. Множество всех элементов $g \in G$, для которых $\varphi(g) = e'$, называется *ядром* гомоморфизма φ. Оно всегда является нормальным делителем. Гомоморфизм тогда и только тогда инъективен (является мономорфизмом), когда его ядро состоит только из единицы e группы G.

Множество смежных классов группы G по подгруппе H обозначается символом G/H. В случае, когда H является нормальным делителем, умножение смежных классов «по представителям» корректно определено и превращает множество G/H в группу. Эта группа называется *факторгруппой* группы G по нормальному делителю H.

Теорема о гомоморфизмах утверждает, что если существует эпиморфизм $\varphi\colon G \to G'$, то группа G' изоморфна факторгруппе группы G по ядру эпиморфизма φ.

2. Кольцо линейных операторов

Определение 1. Отображения линеала $\mathrm{Vect}(n)$ в себя (где, как всегда, $n = 1, 2, 3$) принято называть *операторами*. Оператор $\boldsymbol{A}$, переводящий вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $\boldsymbol{Ax}$, называется *линейным*, если

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Ay}$$

для любых векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ (это свойство иногда называют свойством аддитивности), и

$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x}) = k(\boldsymbol{Ax})$$

для любого вектора $\boldsymbol{x}$ и любого числа k (это свойство называется свойством однородности).

Примером линейного оператора является *тождественный оператор* $\boldsymbol{E}$, оставляющий каждый вектор на месте:

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x},$$

а также *нулевой оператор* $\boldsymbol{O}$, переводящий каждый вектор в нулевой вектор:

$$\boldsymbol{O}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

Более общий пример мы получим, рассмотрев для произвольного вещественного числа k оператор $k\boldsymbol{E}$, действующий по формуле

$$(k\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x},$$

т. е. умножающий каждый вектор на число k. Этот оператор, очевидно, линеен. При $k = 1$ он превращается в тождественный оператор $\boldsymbol{E}$, а при $k = 0$ — в нулевой оператор $\boldsymbol{O}$.

Множество всех линейных операторов, действующих в $\mathrm{Vect}(n)$, мы будем обозначать символом $\mathrm{Lin}(n)$.

Композиция операторов обычно называется их *произведением* и в ее обозначении опускается знак $\circ$. Таким образом, если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — операторы, то их произведение $\boldsymbol{AB}$ действует на любом векторе $\boldsymbol{x}$ по формуле

$$(\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx}).$$

Тождественный оператор является единицей этого умножения, т. е.

$$\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{EA} = \boldsymbol{A}$$

для любого оператора $\boldsymbol{A}$.

Ясно, что

произведение $\boldsymbol{AB}$ *двух линейных операторов* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *также является линейным оператором.*

Действительно,

$$\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx}+\boldsymbol{By}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx}) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{By}) = (\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{y}$$

и

$$\boldsymbol{AB}(k\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}(k\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{Bx}) = k\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx}) = k(\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{x}.$$

В отличие от отображений произвольных множеств для операторов определена также операция сложения.

Определение 2. *Суммой* $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ двух операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется оператор, определенный формулой

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bx}.$$

Легко видеть, что

сумма $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ *двух линейных операторов* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *также является линейным оператором.*

Действительно,

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=$$
$$=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{y}$$

и

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(k\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}(k\boldsymbol{x})=k\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=$$
$$=k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})=k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}.$$

Эта операция сложения, очевидно, *ассоциативна* ($(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$), *коммутативна* ($\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$), *обладает нулем* (которым служит нулевой оператор $\boldsymbol{O}$) и для любого оператора $\boldsymbol{A}$ существует противоположный оператор $-\boldsymbol{A}$ (определяемый формулой $(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$). Кроме того, легко видеть, что сложение операторов *дистрибутивно* относительно умножения ($(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$ для любых операторов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$). Поскольку умножение операторов ассоциативно ($(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$), все это на языке алгебры, означает что справедливо следующее

Предложение 1. *Совокупность* $\mathrm{Lin}(n)$ *всех линейных операторов в* $\mathrm{Vect}(n)$ *является кольцом с единицей.*

Подчеркнем, что это кольцо *некоммутативно* (т. е., вообще говоря, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$).

3. Описание линейных операторов

Пусть

$$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$$

— произвольный базис линеала $\mathrm{Vect}(n)$. Линейный оператор $\boldsymbol{A}$ переводит векторы этого базиса в некоторые векторы

$$\boldsymbol{e}'_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n.$$

Легко видеть, что

векторы $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ *однозначно определяют линейный оператор* $\boldsymbol{A}$.

Действительно, любой вектор $\boldsymbol{x}$ однозначно разлагается по векторам базиса:

$$\boldsymbol{x}=x^1\boldsymbol{e}_1+\ldots+x^n\boldsymbol{e}_n.$$

Применив к этому равенству оператор $\boldsymbol{A}$ и воспользовавшись линейностью, мы немедленно получим, что

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x^1\boldsymbol{e}'_1+\ldots+x^n\boldsymbol{e}'_n.$$

Таким образом, зная векторы $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$, мы можем вычислить вектор $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$. Но это и означает, что векторы $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ однозначно определяют оператор $\boldsymbol{A}$.

Столь же легко показывается, что *для любой системы векторов*

$$e'_1, \ldots, e'_n$$

существует (по доказанному, единственный) линейный оператор $\mathcal{A}$, *для которого*

$$e'_1 = \mathcal{A}e_1, \ldots, e'_n = \mathcal{A}e_n.$$

Действительно, рассмотрим оператор $\mathcal{A}$, определенный для любого вектора

$$x = x^1e_1 + \ldots + x^ne_n$$

формулой

$$\mathcal{A}x = x^1e'_1 + \ldots + x^ne'_n.$$

В силу единственности разложения векторов по векторам базиса это определение корректно. Кроме того, ясно, что так построенный оператор обладает тем свойством, что

$$\mathcal{A}e_1 = e'_1, \ldots, \mathcal{A}e_n = e'_n.$$

Поэтому для завершения доказательства нужно только показать, что построенный оператор $\mathcal{A}$ линеен, т. е. для него справедливы соотношения

$$\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y,$$
$$\mathcal{A}(kx) = k(\mathcal{A}x).$$

Но проверка этих соотношений производится совершенно автоматически: если

$$x = x^1e_1 + \ldots + x^ne_n, \quad y = y^1e_1 + \ldots + y^ne_n,$$

то

$$x + y = (x^1 + y^1)e_1 + \ldots + (x^n + y^n)e_n,$$

и потому

$$\mathcal{A}(x + y) = (x^1 + y^1)e'_1 + \ldots + (x^n + y^n)e'_n =$$
$$= (x^1e'_1 + \ldots + x^ne'_n) + (y^1e'_1 + \ldots + y^ne'_n) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y.$$

Аналогично, так как

$$kx = (kx^1)e_1 + \ldots + (kx^n)e_n,$$

то

$$\mathcal{A}(kx) = (kx^1)e'_1 + \ldots + (kx^n)e'_n = k(x^1e'_1 + \ldots + x^ne'_n) = k(\mathcal{A}x).$$

Резюмируя, мы получаем следующее

Предложение 1. *Выбор базиса*

$$e_1, \ldots, e_n$$

устанавливает биективное соответствие между линейными операторами и произвольными системами из n векторов

$$e'_1, \ldots, e'_n.$$

Линейный оператор $\boldsymbol{A}$, *соответствующий такой системе, определяется формулой*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}'_1 + \ldots + x^n\boldsymbol{e}'_n, \quad \boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x^n\boldsymbol{e}_n,$$

а система, соответствующая линейному оператору $\boldsymbol{A}$, *состоит из векторов*

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n.$$

Системе n векторов

$$\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$$

мы сопоставим квадратную матрицу порядка n, столбцы которой состоят из координат этих векторов (в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$). Поскольку это соответствие между системами векторов и матрицами, очевидно, биективно, мы получаем, что

линейные операторы и квадратные матрицы находятся в биективном соответствии.

Определение 1. Матрица A, соответствующая указанным образом линейному оператору $\boldsymbol{A}$, называется *матрицей оператора* $\boldsymbol{A}$ *в базисе* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

По определению, если

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 = a_1^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_1^n\boldsymbol{e}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n = a_n^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_n^n\boldsymbol{e}_n, \end{gathered} \tag{1}$$

то

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Подчеркнем, что координаты векторов $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$ расположены по с т о л б ц а м этой матрицы.

Введя в рассмотрение векторные матрицы-строки

$$\begin{gathered} \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n), \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n), \end{gathered}$$

мы можем формулы (1) записать в следующем удобном для запоминания виде:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}A. \tag{1'}$$

Легко видеть, что

для любых двух линейных операторов $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *матрицей оператора* $\boldsymbol{AB}$ *является произведение* AB *матриц* A *и* B *операторов* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$, *а матрицей оператора* $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ — *сумма* $A+B$ *матриц* A *и* B.

Действительно, ввиду линейности оператора $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}B) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{e})B.$$

Поэтому

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{e} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}B) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{e})B = \boldsymbol{e}(AB).$$

Аналогично,

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{e} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}A+\boldsymbol{e}B = \boldsymbol{e}(A+B).$$

Доказанное утверждение означает, что справедлива следующая

Теорема 1. *Соответствие*

$$\text{«линейный оператор»} \longmapsto \text{«его матрица»}$$

устанавливает изоморфизм кольца $\operatorname{Lin}(n)$ *линейных операторов на кольцо всех квадратных матриц порядка* n.

В частности, тождественному оператору $\boldsymbol{E}$ соответствует единичная матрица E, а нулевому оператору $\boldsymbol{O}$ — нулевая матрица O. Вообще, оператору $k\boldsymbol{E}$ умножения на число k соответствует скалярная матрица

$$kE = \begin{pmatrix} k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Мы видим, что матрица оператора $k\boldsymbol{E}$ — одна и та же во всех базисах.

Упражнение. Покажите, что операторы вида $k\boldsymbol{E}$ являются единственными операторами, обладающими тем свойством, что матрица такого оператора — одна и та же во всех базисах.

Формула разложения

$$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x^n\boldsymbol{e}_n$$

произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ по векторам базиса имеет в матричной записи вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}x,$$

где x — матрица-столбец

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Аналогично, формула

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x^n\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$$

может быть записана в следующем виде:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{e})\,x.$$

Подставив сюда из формулы (1′) выражение для $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}$, мы немедленно получим, что

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}Ax.$$

Сравнив эту формулу с формулой разложения

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}y$$

вектора

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

мы получим, далее, что

$$y = Ax, \tag{2}$$

или, в развернутом виде, что

$$\begin{aligned} y^1 &= a^1_1x^1 + \ldots + a^1_nx^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^n &= a^n_1x^1 + \ldots + a^n_nx^n. \end{aligned} \tag{2′}$$

Таким образом, мы видим, что координаты преобразованного вектора $y = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ линейно выражаются через координаты исходного вектора $\boldsymbol{x}$ с матрицей коэффициентов A.

Подчеркнем, что коэффициентами выражения i-й координаты являются элементы i-й строки матрицы A.

Резюмируя, мы видим, что предложение 1 может быть переформулировано в следующем виде:

Предложение 2. *Выбор базиса*

$$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$$

устанавливает изоморфизм кольца линейных операторов на кольцо квадратных матриц порядка n. Столбцы матрицы A, соответствующей при этом изоморфизме линейному оператору $\boldsymbol{A}$, состоят из координат векторов

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n.$$

Линейный оператор $\boldsymbol{A}$, соответствующий матрице A, переводит произвольный вектор $x = x^1e_1 + \ldots + x^ne_n$ в вектор $y = y^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y^ne_n$ с координатами (2′).

При $n = 1$ мы получаем отсюда, что

линейные операторы на прямой (т. е. в линеале Vect(1)) *исчерпываются операторами $k\boldsymbol{E}$ умножения на числа.*

Построенный изоморфизм между кольцами линейных операторов и квадратных матриц зависит от выбора базиса. Найдем, как меняется матрица оператора при изменении базиса.

Пусть

$$f_1, \ldots, f_n$$

— другой базис в $\mathrm{Vect}(n)$ и пусть C — матрица перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $f_1, \ldots, f_n$. По определению (см. п. 7 § 3) это означает, что векторные матрицы-строки

$$e = (e_1, \ldots, e_n),$$
$$f = (f_1, \ldots, f_n)$$

связаны формулой

$$f = eC.$$

Применив к этой формуле линейный оператор $\mathbf{A}$ и заметив, что в силу линейности

$$\mathbf{A}(eC) = (\mathbf{A}e)\,C,$$

мы получим, что

$$\mathbf{A}f = (\mathbf{A}e)\,C,$$

т. е. что

$$fA' = (eA)\,C,$$

где A' — матрица оператора $\mathbf{A}$ в базисе $f_1, \ldots, f_n$, а A, как и выше, — матрица оператора $\mathbf{A}$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Подставив сюда выражение для f, мы получим, далее, что

$$e\,(CA') = e\,(AC),$$

откуда следует, что

$$CA' = AC,$$

т. е. что

$$A' = C^{-1}AC.$$

Таким образом, мы доказали следующее

Предложение 3. *Если в базисе*

$$e_1, \ldots, e_n$$

линейный оператор $\mathbf{A}$ *имеет матрицу* A, *то в базисе*

$$f_1, \ldots, f_n$$

его матрицей будет матрица

$$C^{-1}AC,$$

где C — *матрица перехода от базиса* $e_1, \ldots, e_n$ к *базису* $f_1, \ldots, f_n$.

4. Обратимые линейные операторы

Определение 1. Линейный оператор $\mathbf{A}$ называется *обратимым слева* (*справа*), если существует такой линейный оператор $\mathbf{B}$ (линейный оператор $\mathbf{C}$), что $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$ (соответственно, $\mathbf{AC} = \mathbf{E}$). Оператор $\mathbf{A}$ называется *обратимым*, если он обратим и слева, и справа.

Обратим внимание на то, что несмотря на полное внешнее сходство определений, это понятие обратимости отличается априори от обратимости в смысле п. 1. Дело здесь в том, что оператор A обратим, например, слева в смысле п. 1 (т. е. инъективен), если существует какой-то оператор B, удовлетворяющий соотношению $BA = E$, тогда как теперь мы требуем, чтобы этот оператор был линейным. Таким образом, если оператор обратим в нашем теперешнем смысле, то он заведомо обратим в смысле п. 1, но обратное пока неясно.

Замечательным фактом теории линейных операторов является то обстоятельство, что на самом деле оба понятия обратимости совпадают. Еще более удивительно то, что для линейных операторов из обратимости слева или справа вытекает обратимость (т. е. обратимость и слева, и справа). Другими словами, справедлива

Теорема 1. *Следующие свойства линейного оператора A равносильны:*

1°. *Оператор A обратим слева.*
2°. *Оператор A инъективен.*
3°. *Оператор A обратим справа.*
4°. *Оператор A надъективен.*
5°. *Оператор A обратим.*
6°. *Оператор A биективен.*

Доказательство. Пусть

$$e_1, \ldots, e_n$$

— произвольный базис линеала $\mathrm{Vect}(n)$ и пусть, как и в предыдущем пункте,

$$e_1' = Ae_1, \ \ldots, \ e_n' = Ae_n.$$

Мы добавим к свойствам 1°—6° еще следующее свойство:

7°. *Векторы $e_1', \ldots, e_n'$ образуют базис.*

Ясно, что теорема будет доказана, если мы докажем следующую систему импликаций:

$$\begin{tikzcd} 1^\circ \arrow[rr, Rightarrow] & & 2^\circ \arrow[dl, Rightarrow] \\ & 7^\circ \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & \\ 3^\circ \arrow[rr, Rightarrow] & & 4^\circ \arrow[ul, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Импликация $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Эта импликация имеет общий характер (справедлива для любых отображений, см. п. 1).

Импликация $2^\circ \Rightarrow 7^\circ$. Предположим, что векторы $e_1', \ldots, e_n'$ не образуют базиса. Тогда они линейно зависимы и потому существуют такие числа $k_1, \ldots, k_n$ (не все равные нулю), что

$$k_1e_1' + \ldots + k_ne_n' = 0.$$

Рассмотрим вектор

$$k = k_1 e_1 + \ldots + k_n e_n.$$

В силу линейности оператора A этот вектор обладает тем свойством, что

$$Ak = 0.$$

Но ясно, что $A0 = 0$. Поэтому в силу инъективности оператора A должно иметь место равенство $k = 0$, что невозможно, поскольку векторы $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы. Полученное противоречие доказывает, что $2° \Rightarrow 7°$.

Импликация $7° \Rightarrow 1°$. Определим линейный оператор B требованием, чтобы векторы $e'_1, \ldots, e'_n$ он переводил соответственно в векторы $e_1, \ldots, e_n$. Поскольку векторы $e'_1, \ldots, e'_n$ образуют базис, такой оператор B существует и однозначно определен (см. п. 3). Тогда оператор BA будет переводить базис $e_1, \ldots, e_n$ в себя и потому будет совпадать с тождественным оператором E.

Импликация $3° \Rightarrow 4°$. Подобно импликации $1° \Rightarrow 2°$ эта импликация справедлива из общих соображений (см. п. 1).

Импликация $4° \Rightarrow 7°$. По условию, для любого вектора y существует такой вектор x, что $Ax = y$. Разложим вектор x по векторам базиса:

$$x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n.$$

Применив к этому равенству оператор A, мы немедленно получим, что

$$y = x^1 e'_1 + \ldots + x^n e'_n.$$

Это показывает, что семейство векторов $e'_1, \ldots, e'_n$ полно. Так как оно содержит n векторов, то, следовательно, оно является базисом.

Импликация $7° \Rightarrow 3°$. Положим $C = B$, где B — линейный оператор, построенный при доказательстве импликации $7° \Rightarrow 1°$. Ясно, что $AC = E$.

Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Заметим, что одновременно мы также доказали, что

линейный оператор A тогда и только тогда обратим, когда он обладает свойством 7°.

Поскольку столбцы матрицы оператора A состоят, по определению, из координат векторов $e'_1, \ldots, e'_n$, свойство 7° равносильно следующему свойству:

8°. *Матрица оператора A невырождена.*

Таким образом,

линейный оператор A тогда и только тогда обратим, когда его матрица (в произвольном базисе) невырождена.

Поскольку обратимый оператор $\boldsymbol{A}$ биективен, для него существует обратный оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$. Легко видеть, что

обратный оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$ *линеен.*

Действительно, по условию существует такой линейный оператор $\boldsymbol{B}$, что

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{EA}^{-1} = (\boldsymbol{BA})\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AA}^{-1}) = \boldsymbol{BE} = \boldsymbol{B}.$$

Поэтому оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$ линеен.

Впрочем, линейность оператора $\boldsymbol{A}^{-1}$ непосредственно вытекает и из определений. На самом деле, если $\boldsymbol{Ax}_1 = \boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{Ax}_2 = \boldsymbol{y}_2$, то $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$ и потому $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, т. е.

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}_2.$$

Аналогично, если $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$, то $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x}) = k\boldsymbol{y}$, и потому $\boldsymbol{A}^{-1}(k\boldsymbol{y}) = k\boldsymbol{x}$, т. е.

$$\boldsymbol{A}^{-1}(k\boldsymbol{y}) = k\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}.$$

Матрицей оператора $\boldsymbol{A}^{-1}$ является, очевидно, матрица A^{-1}, обратная к матрице A оператора $\boldsymbol{A}$.

Тот факт, что оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$ линеен, означает, что *обратимые линейные операторы* (действующие в $\mathrm{Vect}(n)$ при данном n) *образуют группу*. Мы будем обозначать эту группу символом $\mathrm{Op}(n)$.

Из сказанного выше о соответствии между линейными операторами и их матрицами непосредственно вытекает, что

соответствие

$$\text{«линейный оператор»} \mapsto \text{«его матрица»}$$

определяет изоморфизм группы $\mathrm{Op}(n)$ *обратимых линейных операторов на группу* $\mathrm{GL}(n)$ *всех невырожденных квадратных матриц порядка* n.

Заметим, что хотя группы операторов и матриц изоморфны, отождествлять их нельзя, поскольку никакого естественного (не зависящего от выбора базиса) изоморфизма между ними не имеется.

Докажем в заключение следующее предложение, часто полезное при доказательстве необратимости конкретных операторов.

Предложение 1. *Линейный оператор* $\boldsymbol{A}$ *тогда и только тогда необратим, когда существует такой отличный от нуля вектор* $\boldsymbol{x}_0$, *что*

$$\boldsymbol{Ax}_0 = 0. \qquad (1)$$

Доказательство. Если оператор A обратим, то, применив к равенству (1) оператор A^{-1}, мы получим, что

$$x_0 = 0$$

(поскольку оператор A^{-1} линеен, то $A^{-1}0 = 0$). Следовательно, если вектор $x_0 \neq 0$, удовлетворяющий соотношению (1), существует, то оператор A необратим.

Обратно, пусть оператор A необратим. Тогда согласно доказанному выше он обязательно неинъективен, т. е. существуют такие различные векторы x_1 и x_2, что

$$Ax_1 = Ax_2.$$

Положив

$$x_0 = x_2 - x_1,$$

мы и получим вектор $x_0 \neq 0$, удовлетворяющий соотношению (1).

5. Операторы, действующие по равенству координат

Обратим внимание на то, что равенства

$$\begin{aligned} e'_1 &= a_1^1 e_1 + \ldots + a_1^n e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n &= a_n^1 e_1 + \ldots + a_n^n e_n, \end{aligned}$$

выражающие векторы

$$e'_1 = Ae_1, \ \ldots, \ e'_n = Ae_n$$

через векторы базиса

$$e_1, \ \ldots, \ e_n,$$

лишь обозначениями отличаются от формул (1) п. 7 § 3, выражающих векторы базиса

$$e_{1'}, \ \ldots, \ e_{n'}$$

через векторы базиса

$$e_1, \ \ldots, \ e_n.$$

Таким образом, на эти формулы (при невырожденной матрице A) возможны две «сопряженные» точки зрения: их можно рассматривать либо как формулы перехода от одного («старого») базиса к другому («новому»), либо как формулы, описывающее действие некоторого обратимого линейного оператора на векторах данного базиса.

Аналогично, формулы

$$\begin{aligned} y^1 &= a_1^1 x^1 + \ldots + a_n^1 x^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^n &= a_1^n x^1 + \ldots + a_n^n x^n \end{aligned}$$

также можно истолковывать двояко в зависимости от того, что понимается под величинами $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^n$. При одном истолковании величины $x^1, \ldots, x^n$ являются координатами произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, а величины $y^1, \ldots, y^n$ — координатами в том же базисе преобразованного вектора $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. При другом истолковании величины $x^1, \ldots, x^n$ являются координатами произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ в «новом» базисе $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$, а величины $y^1, \ldots, y^n$ — координатами того же вектора $\boldsymbol{x}$ в «старом» базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Замечание 1. Подчеркнем, что при первом истолковании величины $x^1, \ldots, x^n$ являются координатами вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, а при втором — в базисе $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$.

Таким образом, одна и та же алгебраическая конструкция (линейное преобразование неизвестных) имеет два различных (хотя и тесно между собой связанных) геометрических истолкования.

Объяснение этого факта можно получить, сравнив формулу

$$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x^n\boldsymbol{e}_n$$

с формулой

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}'_1 + \ldots + x^n\boldsymbol{e}'_n.$$

Мы видим, что

преобразованный вектор $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ имеет в преобразованном базисе $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ те же координаты, что и исходный вектор $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Чтобы описать это явление, введем следующее

Определение 1. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ — два базиса в $\mathrm{Vect}(n)$. Говорят, что оператор $\boldsymbol{A}$ *действует по равенству координат* (в данных базисах), если произвольному вектору $\boldsymbol{x}$ он сопоставляет вектор $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, имеющий в базисе $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ те же координаты, что и вектор $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

В этой терминологии доказанное выше утверждение означает, что

любой обратимый линейный оператор действует по равенству координат в некоторых базисах.

Замечание 2. Легко видеть, что и, обратно,

любой оператор, действующий по равенству координат, является, во-первых, линейным, а во-вторых, обратимым оператором.

Задание. Докажите это утверждение.

Если мы теперь хотим найти координаты вектора $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ не в базисе $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$, а в исходном базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, нам достаточно воспользоваться формулами преобразования координат при переходе от базиса $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ к базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Это и объясняет, почему линейные преобразования координат могут быть истолкованы и как преобразования, описывающие действие линейных операторов.

Замечание 3. Подчеркнем, что такого рода «двойное» истолкование возможно лишь для линейных преобразований неизвестных с невырожденной матрицей A. Линейные преобразования с вырожденной матрицей A описывают в координатах действия необратимых линейных операторов, но никакого отношения к замене базисов не имеют.

6. Обратимые линейные операторы и ориентации

Пусть

$$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$$

и

$$\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$$

— два базиса в $\operatorname{Vect}(n)$ и пусть C — матрица перехода от первого базиса ко второму. По определению, это означает, что для векторных матриц-строк

$$\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$$

$$\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$$

имеет место равенство

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}C.$$

Применив к этому равенству линейный оператор $\boldsymbol{A}$, мы получим равенство

$$\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{e}'C,$$

где

$$\boldsymbol{f}' = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_n),$$

$$\boldsymbol{e}' = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n).$$

Если оператор $\boldsymbol{A}$ обратим, то семейства $\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_n$ и $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$ также являются базисами, и доказанная формула означает, что эти базисы связаны той же самой матрицей перехода C.

Таким образом, мы доказали, что

если два базиса связаны матрицей перехода C, то базисы, получающиеся из данных воздействием некоторого обратимого линейного оператора $\boldsymbol{A}$, также связаны матрицей перехода C.

Вспомним теперь, что два базиса называются одноименными (определяющими одну и ту же ориентацию), если определитель, связывающий их матрицы перехода, положителен. Отсюда и из только что доказанного утверждения непосредственно вытекает, что

обратимые линейные операторы переводят одноименные базисы в одноименные, а разноименные — в разноименные.

Это означает, что, сопоставив ориентации o, задаваемой базисом

$$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n,$$

ориентацию o', задаваемую базисом

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n,$$

мы получим корректно определенное соответствие между ориентациями. Мы будем говорить, что это соответствие *индуцировано* обратимым линейным оператором $\boldsymbol{A}$. Ориентацию o' мы будем обозначать символом $\boldsymbol{A}(o)$.

Поскольку обратимый линейный оператор переводит разноименные базисы в разноименные, то противоположные ориентации линейный оператор переводит в противоположные:

$$\boldsymbol{A}(-o) = -\boldsymbol{A}(o).$$

Отсюда вытекает, что либо

$$\boldsymbol{A}(o) = o$$

для любой ориентации o, либо

$$\boldsymbol{A}(o) = -o$$

также для любой ориентации o.

В первом случае говорят, что обратимый линейный оператор *сохраняет ориентации*, а во втором — что он *обращает ориентации*.

Множество всех обратимых линейных операторов, сохраняющих ориентации, мы будем обозначать символом $\mathrm{Op}^+(n)$, а дополнительное множество обратимых линейных операторов, обращающих ориентации, — символом $\mathrm{Op}^-(n)$.

Ясно, что

1) *если обратимые линейные операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ оба сохраняют или обращают ориентации, то их произведение $\boldsymbol{AB}$ сохраняет ориентации, а если один из операторов $\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{B}$ сохраняет ориентации, а другой обращает, то оператор $\boldsymbol{AB}$ обращает ориентации;*

2) *если обратимый линейный оператор $\boldsymbol{A}$ сохраняет (обращает) ориентации, то обратный оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$ также сохраняет (соответственно обращает) ориентации.*

На языке теории групп это означает, что

множество $\mathrm{Op}^+(n)$ обратимых линейных операторов, сохраняющих ориентации, является подгруппой (даже нормальным делителем) группы $\mathrm{Op}(n)$, а множество $\mathrm{Op}^-(n)$ является смежным классом группы $\mathrm{Op}(n)$ по подгруппе $\mathrm{Op}^+(n)$.

Тот факт, что обратимый линейный оператор $\boldsymbol{A}$ сохраняет (обращает) ориентации, означает, что произвольный базис

$$\boldsymbol{e}_1, \ldots \boldsymbol{e}_n$$

он переводит в одноименный (разноименный) базис

$$e'_1 = Ae_1, \ \ldots, \ e'_n = Ae_n.$$

Но, как мы знаем, матрицей перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, \ldots, e'_n$ служит матрица A оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Следовательно,

обратимый линейный оператор тогда и только тогда сохраняет (обращает) ориентации, когда в произвольном базисе его матрица имеет положительный (соответственно отрицательный) определитель.

Пусть $GL^+(n)$ — совокупность всех квадратных матриц порядка n с положительным определителем, а $GL^-(x)$ — совокупность всех квадратных матриц порядка n с отрицательным определителем. Из того, что при умножении матриц их определители перемножаются, непосредственно вытекает, что

по отношению к умножению матриц множество $GL^+(n)$ является подгруппой (даже нормальным делителем) группы $GL(n)$, а множество $GL^-(n)$ — смежным классом по этой подгруппе.

При этом согласно сказанному выше справедлива следующая

Теорема 1. *Соответствие*

$$\text{«линейный оператор»} \mapsto \text{«его матрица»}$$

определяет изоморфизм группы $Op^+(n)$ на группу $GL^+(n)$.

Семейство матриц $A(t)$, зависящих от числового параметра t, называется *непрерывным семейством*, если каждый элемент матрицы $A(t)$ является непрерывной функцией параметра t. В соответствии с этим семейство $\boldsymbol{A}(t)$ линейных операторов называется *непрерывным семейством*, если матрицы $A(t)$ операторов $\boldsymbol{A}(t)$ (в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$) образуют непрерывное семейство. Поскольку при изменении базиса матрицы $A(t)$ переходят (см. п. 2) в матрицы $C^{-1}A(t)C$ и поскольку семейство матриц $C^{-1}A(t)C$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно семейство $A(t)$, то свойство непрерывности семейства линейных операторов определено корректно (не зависит от выбора базиса).

Пусть, для определенности, числовой параметр t пробегает отрезок $[0, 1]$.

Определение 1. Если

$$\boldsymbol{A}(0) = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A}(1) = \boldsymbol{B},$$

то непрерывное семейство обратимых линейных операторов $\boldsymbol{A}(t)$ мы будем называть *деформацией*, связывающей обратимый линейный оператор $\boldsymbol{A}$ с обратимым линейным оператором $\boldsymbol{B}$. Обратимые линейные операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ мы будем называть *деформируемыми* друг в друга, если существует хотя бы одна деформация, связывающая один оператор с другим.

Понятие деформации обратимых линейных операторов тесно связано с введенным в п. 1 § 4 понятием деформации базисов. Действительно, легко видеть, что

семейство $\boldsymbol{A}(t)$ обратимых линейных операторов тогда и только тогда является деформацией, связывающей оператор $\boldsymbol{A}$ с оператором $\boldsymbol{B}$, когда для любого базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ вектор-функции

$$\boldsymbol{a}_1(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{e}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{a}_n(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{e}_n$$

составляют деформацию, связывающую базис

$$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$$

с базисом

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{b}_n=\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_n.$$

Но, как было показано в п. 1 § 4, два базиса тогда и только тогда деформируемы друг в друга, когда они одноименны. Следовательно,

обратимые линейные операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ тогда и только тогда деформируемы друг в друга, когда для любого базиса

$$\boldsymbol{e}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{e}_n$$

базисы

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$$

и

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_n$$

одноименны.

Последнее условие, очевидно, означает, что операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ одновременно либо сохраняют, либо обращают ориентации. Тем самым мы доказали следующее

Предложение 1. *Обратимые линейные операторы тогда и только тогда деформируемы друг в друга, когда они оба либо сохраняют, либо обращают ориентации.*

Другими словами,

обратимые линейные операторы, принадлежащие одновременно либо подгруппе $\mathrm{Op}^+(n)$, *либо смежному классу* $\mathrm{Op}^-(n)$, *деформируемы друг в друга, а обратимые линейные операторы, один из которых принадлежит подгруппе* $\mathrm{Op}^+(n)$, *а другой — смежному классу* $\mathrm{Op}^-(n)$, *друг в друга не деформируемы.*

В частности, мы видим, что

обратимый линейный оператор тогда и только тогда сохраняет ориентации (принадлежат подгруппе $\mathrm{Op}^+(n)$), *когда он может быть продеформирован в тождественный оператор $\boldsymbol{E}$.*

Для матриц доказанные утверждения означают, что

две квадратные невырожденные матрицы тогда и только тогда могут быть продеформированы друг в друга, когда их определители имеют один и тот же знак.

В частности,

квадратная невырожденная матрица тогда и только тогда может быть продеформирована в единичную матрицу, когда ее определитель положителен.

7. Изометричные операторы

Определение 1. Линейный оператор U называется *изометричным*, если он сохраняет скалярное произведение, т. е. для любых двух векторов x и y имеет место равенство

$$Ux \cdot Uy = xy.$$

Предложение 1. *Линейный оператор U тогда и только тогда изометричен, когда он сохраняет длины векторов, т. е.*

$$|Ux| = |x|$$

для любого вектора x.

Доказательство. Если оператор изометричен, то, в частности,

$$(Ux)^2 = x^2$$

для любого вектора x, т. е.

$$|Ux| = |x|.$$

Заметим, что линейностью оператора U мы здесь не пользовались.

Обратно, пусть оператор U сохраняет длины векторов. Тогда для любых векторов x и y

$$|Ux| = |x|, \quad |Uy| = |y|, \quad |U(x+y)| = |x+y|,$$

т. е.

$$(Ux)^2 = x^2, \quad (Uy)^2 = y^2, \quad (U(x+y))^2 = (x+y)^2.$$

Но в силу линейности

$$U(x+y) = Ux + Uy,$$

и потому

$$(U(x+y))^2 = (Ux)^2 + 2Ux \cdot Uy + (Uy)^2.$$

С другой стороны,

$$(U(x+y))^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (Ux)^2 + 2xy + (Uy)^2.$$

Поэтому

$$Ux \cdot Uy = xy,$$

так что оператор U изометричен.

Из этого предложения непосредственно вытекает, что

любой изометричный оператор U обратим.

Действительно, если $Ux_0 = 0$, то $|x_0| = |Ux_0| = |0| = 0$, и потому $x_0 = 0$.

Далее, ясно, что

для любого изометричного оператора U и любого ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ векторы

$$e_1' = Ue_1, \ \ldots, \ e_n' = Ue_n$$

составляют ортонормированный базис.

Обратно,

если для линейного оператора U и некоторого ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ векторы

$$e_1' = Ue_1, \ \ldots, \ e_n' = Ue_n$$

составляют ортонормированный базис, то оператор U изометричен.

Действительно, для любого вектора

$$x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n$$

вектор Ux выражается формулой

$$Ux = x^1 e_1' + \ldots + x^n e_n'.$$

Поскольку векторы $e_1', \ldots, e_n'$ составляют ортонормированный базис, отсюда следует, что

$$|Ux| = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = |x|$$

и, следовательно, оператор U изометричен.

Оба последних утверждения мы можем объединить в следующем предложении:

Предложение 2. *Оператор U тогда и только тогда изометричен, когда он действует по равенству координат в двух ортонормированных базисах.*

Как мы знаем, матрица оператора U является матрицей перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e_1', \ldots, e_n'$. Но (см. п. 6 § 5) матрица тогда и только тогда является матрицей перехода от одного ортонормированного базиса к другому, когда она ортогональна. Следовательно, имеет место следующее

Предложение 3. *Линейный оператор тогда и только тогда изометричен, когда в некотором (а потому и в любом) ортонормированном базисе его матрица ортогональна.*

Ясно, что произведение двух изометричных операторов, а также оператор, обратный к изометричному оператору, являются изометричными операторами. Это означает, что

совокупность $\mathrm{Iso}(n)$ *всех изометричных операторов является группой.*

Любой линейный изометричный оператор либо сохраняет ориентации, либо их обращает. Ясно, что

совокупность $\mathrm{Iso}^+(n)$ *всех линейных изометричных операторов, сохраняющих ориентации, является подгруппой (даже нормальным делителем) группы* $\mathrm{Iso}(n)$, *а совокупность*

$\mathrm{Iso}^-(n)$ *всех линейных изометричных операторов, обращающих ориентации, является смежным классом группы* $\mathrm{Iso}(n)$ *по этой подгруппе.*

Выбор ортонормированного базиса устанавливает изоморфизм группы $\mathrm{Iso}(n)$ на группу $\mathrm{O}(n)$ всех ортогональных матриц порядка n. Подгруппе $\mathrm{Iso}^+(n)$ соответствует при этом изоморфизме подгруппа $\mathrm{O}^+(n) = \mathrm{SO}(n)$ всех собственных ортогональных матриц.

8. Свойства изометричных операторов

В этом пункте мы докажем несколько лемм об изометричных операторах, которые нам понадобятся в гл. 7.

Сначала мы рассмотрим изометричные операторы на плоскости.

Лемма 1. *Для любого нетождественного сохраняющего ориентации изометричного оператора* $\boldsymbol{U}$ *на плоскости* (*т. е. в* $\mathrm{Vect}(2)$) *оператор* $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{U}$ *обратим.*

Доказательство. Выбрав на плоскости ортонормированный базис, рассмотрим матрицу оператора $\boldsymbol{U}$. Как мы знаем, эта матрица является собственной ортогональной матрицей, и потому (см. п. 6 § 5) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

При этом $\alpha \neq 0$ (поскольку по условию $\boldsymbol{U} \neq \boldsymbol{E}$). Следовательно, матрица оператора $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{U}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{pmatrix}$$

и ее определитель $(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 2(1-\cos\alpha)$ отличен от нуля. Таким образом, матрица оператора $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{U}$ невырождена и потому этот оператор обратим.

Лемма 2. *Для любого обращающего ориентации изометричного оператора* $\boldsymbol{U}$ *на плоскости* (*в* $\mathrm{Vect}(2)$) *оператор* $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{U}$ *необратим.*

Доказательство. В произвольном ортонормированном базисе матрица оператора $\boldsymbol{U}$, являясь несобственной ортогональной матрицей, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix},$$

и потому матрица оператора $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{U}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-\cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1+\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1+\cos\alpha \end{vmatrix} = 1-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 0,$$

оператор $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{U}$ необратим.

Замечание 1. Тот факт, что оператор $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{U}$ необратим, означает (см. п. 4), что существует такой вектор $\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{0}$, что

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{U})\,\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0},$$

т. е. такой, что

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1.$$

Ясно, что этот вектор мы можем считать единичным (при $|\boldsymbol{e}_1| \neq 1$ достаточно разделить его на $|\boldsymbol{e}_1|$).

Дополнив этот вектор ортогональным единичным вектором $\boldsymbol{e}_2$ до базиса, мы получим ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, в котором первый столбец матрицы оператора $\boldsymbol{U}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в этом базисе $\alpha = 0$, так что матрицей оператора $\boldsymbol{U}$ является матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тем самым мы доказали

Следствие. *Для любого обращающего ориентации изометричного оператора* $\boldsymbol{U}$ *на плоскости существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора* $\boldsymbol{U}$ *имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перейдем теперь к операторам в пространстве. Начнем с леммы, справедливой для любых (не обязательно изометричных) операторов.

Лемма 3. *Для любого линейного оператора* $\boldsymbol{A}$ *в пространстве* (в $\mathrm{Vect}(3)$) *существует отличный от нуля вектор* $\boldsymbol{x}_0$, *коллинеарный вектору* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0$, *т. е. такой, что*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \lambda\boldsymbol{x}_0, \tag{1}$$

где λ — *некоторое число (возможно, равное нулю).*

Доказательство. Вводя оператор $\lambda\boldsymbol{E}$ умножения векторов на число λ, мы можем соотношение (1) переписать в следующем «операторном» виде:

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

Существование вектора $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$, удовлетворяющего этому уравнению, означает, что оператор $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$ необратим (см. п. 3), т. е. что его матрица (в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$) вырождена. Но мы знаем, что матрицей этого оператора является матрица

$$A-\lambda E,$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}$$

— матрица оператора $\boldsymbol{A}$, а

$$\lambda E=\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

— матрица оператора $\lambda\boldsymbol{E}$.

Поэтому векторное уравнение (2) тогда и только тогда имеет нетривиальное (отличное от нуля) решение $\boldsymbol{x}_0$, когда число λ таково, что определитель $|A-\lambda E|$ матрицы $A-\lambda E$ равен нулю.

Равенство

$$|A-\lambda E|=0,$$

т. е. равенство

$$\begin{vmatrix} a_1^1-\lambda & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2-\lambda & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

является относительно λ уравнением третьей степени с вещественными коэффициентами и потому имеет хотя бы один вещественный корень.

Принимая в соотношении (2) за λ этот корень, мы получим, следовательно, уравнение, имеющее нетривиальное решение. Это решение и является искомым вектором $\boldsymbol{x}_0$.

Следствие. *Для любого изометричного линейного оператора $\boldsymbol{U}$ в* Vect(3) *существует такой отличный от нуля вектор $\boldsymbol{x}_0$, что*

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}_0 \quad \textit{или} \quad \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_0=-\boldsymbol{x}_0.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу изометричности оператора $\boldsymbol{U}$ векторы $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{x}_0$ должны иметь одну и ту же длину, и потому число λ в равенстве (1) должно быть равно ± 1.

Оказывается, что для изометричных операторов справедлива даже следующая более сильная

Лемма 4. *Для любого изометричного линейного оператора* $\boldsymbol{U}$ *в* Vect(3) *существует такой отличный от нуля вектор* $\boldsymbol{e}$, *что*

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{e}=\begin{cases}\boldsymbol{e}, & \text{если } \boldsymbol{U} \text{ сохраняет ориентации,}\\ -\boldsymbol{e}, & \text{если } \boldsymbol{U} \text{ обращает ориентации.}\end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную плоскость П, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{x}_0$. Линеал $\mathrm{Vect}_\Pi(2)$ векторов, параллельных этой плоскости, состоит, таким образом, из всех векторов, ортогональных вектору $\boldsymbol{x}_0$, т. е. из векторов $\boldsymbol{x}\in\mathrm{Vect}(3)$, удовлетворяющих соотношению

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_0=0.$$

Поскольку оператор $\boldsymbol{U}$ изометричен и $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_0=\pm\boldsymbol{x}_0$, для любого такого вектора $\boldsymbol{x}$ будет иметь место равенство

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}_0=\pm\,\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_0=\pm\,\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_0=0,$$

показывающее, что

если $\boldsymbol{x}\in\mathrm{Vect}_\Pi(2)$, *то* $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\in\mathrm{Vect}_\Pi(2)$.

Это позволяет нам построить в $\mathrm{Vect}_\Pi(2)$ *индуцированный оператор* $\boldsymbol{U}'$, определяющийся формулой

$$\boldsymbol{U}'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}\in\mathrm{Vect}_\Pi(2)$$

(его отличие от оператора $\boldsymbol{U}$ состоит только в том, что он действует в $\mathrm{Vect}_\Pi(2)$, а не в Vect(3)).

Ясно, что оператор $\boldsymbol{U}'$ также изометричен.

Рассмотрим теперь произвольный ортонормированный базис

$$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3,$$

последний вектор $\boldsymbol{e}_3$ которого коллинеарен вектору $\boldsymbol{x}_0$. Векторы

$$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$$

образуют ортонормированный базис линеала $\mathrm{Vect}_\Pi(2)$ и в этом базисе оператор $\boldsymbol{U}'$ имеет некоторую матрицу U'.

Что же касается вектора $\boldsymbol{e}_3$, то в силу линейности оператора $\boldsymbol{U}$ он будет обладать тем же свойством, что и коллинеарный ему вектор $\boldsymbol{x}_0$, т. е. для него будет справедливо равенство

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{e}_3=\lambda\boldsymbol{e}_3,$$

где $\lambda=\pm1$.

Отсюда непосредственно вытекает, что матрица U оператора $\boldsymbol{U}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{U'} & 0\\ & & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$|U| = |U'| \cdot \lambda,$$

и потому

$$|U'| = |U| \cdot \lambda$$

(напомним, что $\lambda = \pm 1$ и, следовательно, $\lambda^{-1} = \lambda$).

Случай 1. $|U'| = 1$. В этом случае $\lambda = 1$, если оператор $\boldsymbol{U}$ сохраняет ориентации ($|U| = 1$), и $\lambda = -1$, если оператор $\boldsymbol{U}$ обращает ориентации ($|U| = -1$). Поэтому за вектор $\boldsymbol{e}$ мы можем принять вектор $\boldsymbol{x}_0$ (или любой вектор, ему коллинеарный, скажем, вектор $\boldsymbol{e}_3$).

Случай 2. $|U'| = -1$. В этом случае оператор $\boldsymbol{U}'$ является линейным изометричным оператором на плоскости, обращающим ориентации. Поэтому (см. выше следствие к лемме 2) в $\mathrm{Vect}_{\Pi}(2)$ существует ортонормированный базис $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, в котором матрица этого оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е. такой, что

$$\boldsymbol{U}'\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{f}_1,$$
$$\boldsymbol{U}'\boldsymbol{f}_2 = -\boldsymbol{f}_2.$$

Для завершения доказательства остается за вектор $\boldsymbol{e}$ принять вектор $\boldsymbol{f}_1$, если оператор $\boldsymbol{U}$ сохраняет ориентации, и вектор $\boldsymbol{f}_2$, если оператор $\boldsymbol{U}$ обращает ориентации.

Тем самым лемма 4 полностью доказана.

Если мы теперь рассмотрим ортонормированный базис

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3,$$

последний вектор $\boldsymbol{e}_3$ которого коллинеарен вектору $\boldsymbol{e}$, то, по сказанному выше, матрица оператора $\boldsymbol{U}$ в этом базисе будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{U'}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

если оператор $\boldsymbol{U}$ сохраняет ориентации, и вид

$$\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{U'}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

если оператор $\boldsymbol{U}$ обращает ориентации, где U' — матрица некоторого сохраняющего ориентации изометричного оператора в

$\mathrm{Vect}_\Pi(2)$, т. е. некоторая собственная ортогональная матрица

$$U' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Тем самым мы доказали

Следствие. *Для любого линейного изометричного оператора* U *в* Vect(3) *существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет вид*

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad -\pi < \alpha \leqslant \pi,$$

если оператор сохраняет ориентации, и вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \end{pmatrix}, \qquad -\pi < \alpha \leqslant \pi,$$

если оператор обращает ориентации.

Из этого следствия непосредственно вытекает

Лемма 5. *Для любого сохраняющего ориентации изометричного оператора* U *в пространстве оператор* $E - U$ *необратим.*

Доказательство. Согласно следствию существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора U имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому оператор $E - U$ будет иметь в этом базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, будет необратим.

Обратим внимание на аналогию между леммами 5 и 2: отличие состоит только в том, что лемма 2 относится к операторам, обращающим ориентации, а лемма 5 — к операторам, сохраняющим ориентации. Естественно ожидать, что в пространстве справедлива и лемма, аналогичная лемме 1 (и относящаяся, конечно, к изометричным операторам, обращающим ориентации). Тем не менее оказывается, что такая лемма неверна: в пространстве существуют обращающие ориентации изометричные операторы U, для которых оператор $E - U$ необратим. Примером может служить оператор, имеющий в некотором ортонормированном базисе матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Однако оказывается, что такого рода операторы являются единственными исключениями.

Лемма 6. *Для любого обращающего ориентации изометричного оператора* U *в* Vect(3), *обладающего тем свойством, что ни в одном ортонормированном базисе его матрица не имеет вида* (3), *оператор* $E - U$ *обратим.*

Доказательство. Согласно следствию к лемме 4 существует ортонормированный базис, в котором оператор U имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, оператор $E - U$ — матрицу

$$\begin{pmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(1-\cos\alpha)$$

и поскольку, согласно условию, $\alpha \neq 0$, лемма 6 тем самым полностью доказана.