Глава 2

МЕТОД КООРДИНАТ

§ 1. КООРДИНАТЫ НА ПРЯМОЙ, В ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Аффинные координаты

Пусть на прямой, в плоскости или в пространстве задана некоторая точка O.

Определение 1. Для любой точки A вектор $\overrightarrow{OA}$ называется ее *радиус-вектором* (относительно точки O). Сама точка O называется при этом *начальной* (или *нулевой*) точкой.

Ясно, что, сопоставив каждой точке ее радиус-вектор, мы получим биективное соответствие

$$\text{точка } A \longmapsto \text{ее радиус-вектор } \boldsymbol{r}_A \tag{1}$$

между множеством всех точек (прямой, плоскости или пространства) и множеством всех векторов (т. е. соответствующим линеалом $\mathrm{Vect}(n)$, где, как всегда, $n = 1, 2$ или 3).

Подчеркнем, что соответствие (1) зависит от выбора точки O.

Это соответствие обладает, очевидно, тем свойством, что

произвольный вектор $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{AB}$ является разностью радиус-вектора $\boldsymbol{r}_B$ его конца B и радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_A$ его начала A:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A. \tag{2}$$

Действительно,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Определение 2. Упорядоченная система $n + 1$ точек $OE_1 \ldots E_n$ общего положения ($n = 1, 2, 3$) называется *аффинным координатным репером* (на прямой, на плоскости или в пространстве).

Таким образом,

на прямой репером является пара OE_1 различных точек,

на плоскости — тройка OE_1E_2 неколлинеарных точек,

в пространстве — четверка $OE_1E_2E_3$ некомпланарных точек.

Замечание об обозначениях. Реперы принято записывать, не разделяя точки никакими знаками препинания (и без скобок).

Так, например, хотя стандартным обозначением упорядоченной тройки точек является запись вида (O, E_1, E_2), но когда мы эту тройку рассматриваем как репер, она обозначается символом OE_1E_2.

Заметим, что тем же символом OE_1E_2 мы обозначаем плоскость, проходящую через точки O, E_1 и E_2. Эта двусмысленность обозначений ни к каким недоразумениям, как правило, не приводит.

Каждый репер $OE_1 \ldots E_n$ однозначно определяет некоторый базис линеала $\mathrm{Vect}\ (n)$, а именно, базис, состоящий из векторов

$$\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{OE}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{e}_n = \overrightarrow{OE}_n. \tag{3}$$

Обратно, задание точки O и произвольного базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линеала $\mathrm{Vect}(n)$ однозначно определяет некоторый репер (а именно, репер $OE_1 \ldots E_n$, связанный с векторами $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ формулами (3)).

На этом основании аффинными координатными реперами называются также системы вида $O\boldsymbol{e}_1 \ldots \boldsymbol{e}_n$, состоящие из некоторой точки O и базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линеала $\mathrm{Vect}\ (n)$.

Понимаемые в этом смысле реперы имеют на прямой вид $O\boldsymbol{e}_1$, на плоскости — вид $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ и в пространстве — вид $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$.

Пусть нам задан произвольный репер $O\boldsymbol{e}_1 \ldots \boldsymbol{e}_n$. Тогда радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$ каждой точки A мы можем разложить по базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\overrightarrow{OA} = x^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x^n\boldsymbol{e}_n. \tag{4}$$

Определение 3. Определяемые формулой (4) числа $x^1, \ldots, x^n$ называются *(аффинными) координатами* точки A в репере $O\boldsymbol{e}_1 \ldots \boldsymbol{e}_n$. Для любого вектора $\boldsymbol{x}$ его координатами в репере $O\boldsymbol{e}_1 \ldots \boldsymbol{e}_n$ называются его координаты в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Согласно формуле (2)

координаты $x^1, \ldots, x^n$ вектора $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{AB}$ выражаются через координаты его концов по формулам

$$x^1 = x_2^1 - x_1^1, \ \ldots, \ x^n = x_2^n - x_1^n, \tag{5}$$

где $x_1^1, \ldots, x_1^n$ — координаты точки A, а $x_2^1, \ldots, x_2^n$ — координаты точки B.

Строчка $(x^1, \ldots, x^n)$ координат произвольной точки представляет собой элемент множества $\mathbb{R}^n$, состоящего из n-членных последовательностей вещественных чисел. Таким образом, задание репера $O\boldsymbol{e}_1 \ldots \boldsymbol{e}_n$ определяет некоторое (очевидно, биективное) отображение

$$\text{«точка»} \longmapsto \text{«строчка ее координат»} \tag{6}$$

прямой, плоскости или пространства на множество $\mathbb{R}^n$ (с соответствующим $n = 1, 2, 3$).

Определение 4. Биективное отображение (6) называется *аффинной координатной системой*, определенной репером $Oe_1 \dots e_n$. Эту систему принято обозначать символом $Ox_1 \dots x_n$.

На прямой имеется только одна координата x^1, на плоскости — две координаты x^1, x^2 и в пространстве — три координаты x^1, x^2, x^3. Координата x^1 обычно обозначается (во всех трех случаях) символом x и называется *абсциссой* точки A. Аналогично, координата x^2 обозначается символом y и называется *ординатой*, а координата x^3 — символом z и называется *аппликатой*.

Когда координатная система фиксирована, точку A с координатами $x^1, \dots, x^n$ бывает удобно обозначать символом $A(x^1, \dots, x^n)$ (на прямой — символом $A(x)$, на плоскости — $A(x, y)$, в пространстве — $A(x, y, z)$).

Прямая, на которой задана аффинная координатная система Ox, часто обозначается тем же символом Ox. Аналогично, символ Oxy может обозначать как аффинную координатную систему на плоскости, так и саму эту плоскость, а символ $Oxyz$ — как аффинную координатную систему в пространстве, так и само это пространство (с заданной в нем аффинной координатной системой).

Обратим внимание на то, что

прямая, плоскость или пространство, для которых задана аффинная координатная система, автоматически ориентированы.

Именно, ориентация в них задается базисом $e_1, \dots, e_n$.

В частности, мы видим, что прямая, на которой задана аффинная координатная система, является осью.

Определение 5. Две аффинные координатные системы называются *одноименными*, если одноименны (в смысле определения 4 п. 1 § 4 гл. 1) их реперы $OE_1 \dots E_n$ и $O'E_{1'} \dots E_n$ или (что равносильно) если одноименны базисы $e_1, \dots, e_n$ и $e_{1'}, \dots, e_{n'}$.

Ясно, что

отношение одноименности аффинных координатных систем является отношением эквивалентности, и соответствующие классы эквивалентности естественным образом отождествляются с ориентациями (прямой, плоскости или пространства).

Определение 6. Начальная точка O аффинной координатной системы Ox на прямой разбивает эту прямую на две полупрямые, называемые *полуосями*. Точки одной полуоси характеризуются условием $x > 0$ (и эта полуось называется *положительной*), а точки другой полуоси — условием $x < 0$ (и эта полуось называется *отрицательной*). Сама точка O характеризуется равенством $x = 0$.

Пусть на плоскости задана аффинная координатная система Oxy с репером e_1, e_2. Точка O и вектор e_1 составляют, очевидно, координатный репер Oe_1 прямой, проходящей через точку O параллельно вектору e_1. Эта прямая, снабженная соответствующей ориентацией, называется *первой координатной осью* или *осью абсцисс* рассматриваемой аффинной координатной системы. Аналогично определяется *вторая координатная ось* (или *ось ординат*) с координатным репером Oe_2.

Координата x является координатой на оси абсцисс в репере Oe_1, а координата y — координатой на оси ординат в репере Oe_2. Поэтому, в соответствии с введенными выше обозначениями, ось абсцисс обычно обозначается символом Ox, а ось ординат — символом Oy.

Ось абсцисс разбивает плоскость на две полуплоскости. Точки одной полуплоскости характеризуются условием $y > 0$, а другой — условием $y < 0$. Принято полуплоскость $y > 0$ называть *верхней* полуплоскостью, а полуплоскость $y < 0$ — *нижней* полуплоскостью. Для точек оси абсцисс $y = 0$.

Аналогично, ось ординат разбивает плоскость на *правую* полуплоскость, для которой $x > 0$, и *левую* полуплоскость, для которой $x < 0$. Для точек самой оси ординат $x = 0$.

Координатные оси вместе разбивают плоскость на четыре части, называемые *квадрантами*. Точки одного квадранта, называемого *первым*, характеризуются условиями $x > 0$, $y > 0$, точки следующего квадранта, называемого *вторым*, — условиями $x < 0$, $y > 0$, точки *третьего* квадранта — условиями $x < 0$, $y < 0$ и, наконец, точки *четвертого* квадранта — условиями $x > 0$, $y < 0$:

коорд. / квадр.	x	y
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

Аналогично, в пространстве определяются (по отношению к заданной аффинной координатной системе $Oxyz$ с репером $Oe_1e_2e_3$) *ось абсцисс* Ox с репером Oe_1, *ось ординат* Oy с репером Oe_2 и *ось аппликат* (или *третья координатная ось*) Oz с репером Oe_3.

Координата x является координатой на оси Ox в репере Oe_1, координата y — координатой на оси Oy в репере Oe_2, а координата z — координатой на оси Oz в репере Oe_3.

Плоскости, проходящие через пары координатных осей, называются *координатными плоскостями*. Всего имеются три координатные плоскости Oxy, Oxz и Oyz. Репер Oe_1e_2 является координатным репером на плоскости Oxy, репер Oe_1e_3 — координатным репером на плоскости Oxz и репер Oe_2e_3 — координатным репером на плоскости Oyz.

Плоскость Oxy разбивает пространство на два полупространства. Точки одного полупространства характеризуются условием $z > 0$, а точки другого — условием $z < 0$. Точки самой плоскости Oxy характеризуются условием $z = 0$.

Аналогично, плоскость Oxz разбивает пространство на два полупространства $y > 0$ и $y < 0$, а плоскость Oyz — на полупространства $x > 0$ и $x < 0$. Для точек первой плоскости $y = 0$, а для точек второй плоскости $x = 0$.

Координатные плоскости вместе разбивают пространство на восемь частей, называемых *октантами*. Две точки тогда и только тогда принадлежат одному октанту, когда все три их координаты имеют одинаковые знаки. Октанты нумеруются в соответствии со следующим распределением знаков координат:

коорд. / окт.	x	y	z
I	+	+	+
II	−	+	+
III	−	−	+
IV	+	−	+
V	+	+	−
VI	−	+	−
VII	−	−	−
VIII	+	−	−

Замечание 1. Обратим внимание на то, что, например, координата x является координатой не только на оси Ox, но и на любой прямой, параллельной этой оси. Соответствующий репер имеет вид $O'e_1$, где O' — точка пересечения этой прямой с осью Oy (на плоскости) или с плоскостью Oyz (в пространстве).

Более того, легко видеть, что координата x является координатой и на любой прямой, не параллельной оси Oy (или плоскости Oyz). Соответствующий репер имеет вид $O'e_1'$, где e_1' — проекция вектора e_1 на рассматриваемую прямую параллельно оси Oy (плоскости Oyz).

Аналогичные утверждения справедливы, конечно, и для координат y и z.

В пространстве, скажем, координаты x, y являются координатами на любой плоскости, параллельной координатной плоскости Oxy, и вообще на любой плоскости, не параллельной оси Oz.

Введем еще одно полезное определение:

Определение 7. Точка E координатного репера OE на прямой называется его *единичной точкой* (она имеет координату $x = 1$). В соответствии с этим точки E_1, E_2 (и E_3) координатного репера OE_1E_2 (репера $OE_1E_2E_3$) на плоскости (в пространстве) называются *единичными точками его координатных осей.* Таким образом,

E_1 — единичная точка оси абсцисс,
E_2 — единичная точка оси ординат,
E_3 — единичная точка оси аппликат.

Точка O называется (на прямой, в плоскости и в пространстве) *нулевой* (или *начальной*) точкой координатного репера (ср. определение 1).

2. Замена аффинных координат

Пусть $O\boldsymbol{e}_1 \ldots \boldsymbol{e}_n$ и $O'\boldsymbol{e}_{1'} \ldots \boldsymbol{e}_{n'}$ — два координатных репера ($n = 1, 2, 3$) и пусть $x^1, \ldots, x^n$ — координаты относительно репера $O\boldsymbol{e}_1 \ldots \boldsymbol{e}_n$, а $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$—координаты относительно репера $O'\boldsymbol{e}_{1'} \ldots \boldsymbol{e}_{n'}$.

В этом пункте мы найдем формулы, выражающие координаты $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ через координаты $x^1, \ldots, x^n$.

Сначала мы рассмотрим частный случай, когда $O' = O$, т. е. когда рассматриваемые реперы имеют одну и ту же начальную точку и отличаются только векторными базисами.

В этом случае каждая точка A имеет в обоих реперах один и тот же радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$ и потому ее координаты $x^1, \ldots, x^n$ и $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ являются не чем иным, как координатами одного и того же вектора $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OA}$ в двух различных базисах. Поэтому (см. п. 7 § 3 гл. 1) эти координаты связаны соотношениями вида

$$\begin{gathered} x^{1'} = c_1^{1'}x^1 + \ldots + c_n^{1'}x^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{n'} = c_1^{n'}x^1 + \ldots + c_n^{n'}x^n \end{gathered}$$

или в матричной записи

$$x' = Cx,$$

где $C = (c_i^{i'})$—матрица перехода от «нового» базиса $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ к «старому» базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, а x' и x — одностолбцовые матрицы, составленные из координат $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ и $x^1, \ldots, x^n$ соответственно. (Заметим, что в п. 7 § 3 гл. 1 символом C обозначалась не эта, а обратная матрица.)

Пусть теперь, наоборот, реперы $Oe_1 \dots e_n$ и $O'e_{1'} \dots e_{n'}$ отличаются лишь точками O и O' (так что $e_{1'} = e_1, \dots, e_{n'} = e_n$). Тогда для любой точки A

$$\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O'O}$$

и потому ее координаты $x^1, \dots, x^n$ в репере $Oe_1 \dots e_n$ связаны с ее координатами $x^{1'}, \dots, x^{n'}$ в репере $O'e_1 \dots e_n$ соотношениями

$$x^{1'} = x^1 + a^1,$$
$$\dots\dots$$
$$x^{n'} = x^n + a^n,$$

где $a^1, \dots, a^n$ — координаты «старого» начала O в «новом» координатном репере $O'e_1 \dots e_n$. В матричной форме эти соотношения имеют вид

$$x' = x + a,$$

где a — одностолбцовая матрица

$$a = \begin{pmatrix} a^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a^n \end{pmatrix}.$$

В общем случае переход от репера $Oe_1 \dots e_n$ к реперу $O'e_{1'} \dots e_{n'}$ может быть осуществлен в два этапа: сначала мы меняем базис, т. е. переходим от репера $Oe_1 \dots e_n$ к реперу $Oe_{1'} \dots e_{n'}$, а затем меняем точку O, т. е. переходим от репера $Oe_{1'} \dots e_{n'}$ к реперу $O'e_{1'} \dots e_{n'}$. Ясно, что соответствующие формулы перехода являются комбинациями полученных выше формул перехода и имеют вид

$$\begin{aligned} x^{1'} &= c_1^{1'} x^1 + \dots + c_n^{1'} x^n + a^{1'}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{n'} &= c_1^{n'} x^1 + \dots + c_n^{n'} x^n + a^{n'}, \end{aligned} \tag{1}$$

или в матричной записи —

$$x' = Cx + a, \tag{1'}$$

где $C = (c_i^{i'})$—матрица перехода от базиса $e_{1'}, \dots, e_{n'}$ к базису $e_1, \dots, e_n$, а $a = (a^{i'})$ — одностолбцовая матрица, составленная из координат «старого» начала O в «новом» репере $O'e_{1'} \dots e_{n'}$.

На языке алгебры это означает, что

переход от одной аффинной координатной системы к другой выражается неоднородным линейным преобразованием координат.

Замечание 1. Для конкретных значений n формулы (1) обычно пишутся в более наглядных обозначениях. Например, при $n=2$ (случай плоскости) можно писать

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1,$$
$$y' = a_2 x + b_2 y + c_2$$

(здесь, естественно, x, y — координаты в «старом» репере, а x', y' — в «новом»).

Определение 1. Прямоугольную матрицу (C, a), получающуюся приписыванием к матрице C столбца a, мы будем называть *матрицей перехода* от аффинной координатной системы с репером $O\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n$ к аффинной координатной системе с репером $O'\mathbf{e}_{1'} \dots \mathbf{e}_{n'}$.

Ясно, что

прямоугольная матрица (*размера* $n \times (n+1)$) *тогда и только тогда является матрицей перехода от одной аффинной координатной системы к другой, когда квадратная матрица, получающаяся вычеркиванием ее последнего столбца, невырождена.*

Пусть нам даны три системы аффинных координат

(i) $x^1, \dots, x^n$,

(ii) $x^{1'}, \dots, x^{n'}$,

(iii) $x^{1''}, \dots, x^{n''}$

и пусть

$$x' = Cx + a, \qquad x'' = C'x' + a'$$

— формулы перехода от первой системы ко второй и от второй к третьей. Тогда

$$x'' = C'(Cx + a) + a' = C'Cx + (C'a + a').$$

Тем самым доказано следующее

Предложение 1. Если переход от координатной системы (i) *к координатной системе* (ii) *описывается матрицей* (C, a), *а переход от координатной системы* (ii) *к координатной системе* (iii) *описывается матрицей* (C', a'), *то переход от координатной системы* (i) *к координатной системе* (iii) *описывается матрицей* $(C'C, C'a + a')$.

В частности, отсюда вытекает

Следствие. *Если переход от координатной системы* $x^1, \dots, x^n$ *к координатной системе* $x^{1'}, \dots, x^{n'}$ *описывается матрицей* (C, a), *то обратный переход от координатной системы* $x^{1'}, \dots, x^{n'}$ *к координатной системе* $x^1, \dots, x^n$ *описывается матрицей* $(C^{-1}, -C^{-1}a)$.

Действительно, пусть (C', a') — матрица, описывающая переход от координатной системы $x^{1'}, \dots, x^{n'}$ к координатной системе $x^1, \ldots, x^n$. Тогда согласно предложению 1 переход от системы $x^1, \ldots, x^n$ к самой себе будет описываться матрицей $(C'C, C'a + a')$. Но, с другой стороны, этот переход описывается матрицей $(E, 0)$. Следовательно,

$$C'C = E, \quad C'a + a' = 0.$$

Поэтому

$$C' = C^{-1}, \quad a' = -C'a = -C^{-1}a.$$

3. Деление отрезка в данном отношении

Используя координатные системы, мы можем задавать точки числами и любое геометрическое построение свести к вычислению над этими числами.

Рассмотрим, например, так называемую задачу о *делении отрезка в данном отношении*.

Пусть $\overline{A_0A_1}$ — произвольный отрезок прямой α. В элементарной геометрии говорят, что точка A отрезка $\overline{A_0A_1}$ делит его в отношении k, если отношение длин отрезков $\overline{A_0A}$ и $\overline{AA_1}$ равно k. Таким образом, $0 < k < \infty$.

Заметим, что фактически отрезок $\overline{A_0A_1}$ считается здесь направленным (ибо при перестановке точек A_0 и A_1 отношение k перейдет в отношение $1/k$). Таким образом, речь здесь на самом деле идет о делении в данном отношении направленного отрезка $\overrightarrow{A_0A_1}$ (предполагаемого невырожденным).

С другой стороны, поскольку векторы $\overrightarrow{A_0A}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ одноименны (для точек A отрезка $\overline{A_0A_1}$), отношение их длин k совпадает с их отношением $\overrightarrow{A_0A} : \overrightarrow{AA_1}$. Поскольку это отношение определено для любой точки A прямой α (отличной от точки A_1), оказывается удобным ввести следующее общее

Определение 1. Говорят, что точка $A \neq A_1$ прямой α *делит* невырожденный направленный отрезок $\overrightarrow{A_0A_1}$ *в отношении* k, если

$$\overrightarrow{A_0A} : \overrightarrow{AA_1} = k. \tag{1}$$

При этом по-прежнему для точек A отрезка $\overline{A_0A_1}$ имеет место соотношение $0 < k < \infty$. В то же время соотношение $k < 0$ характеризует точки A, лежащие вне отрезка $\overline{A_0A_1}$; для точек A, предшествующих точке A_0 (в ориентации, в которой $A_0 \prec A_1$), имеют место неравенства $-1 < k < 0$, а для точек A, следующих за точкой A_1, — неравенства $-\infty < k < -1$.

При приближении точки A к точке A_1 по отрезку $\overline{A_0A_1}$ (т. е. так, что все время $A \prec A_1$) отношение k стремится к $+\infty$, а при приближении точки A к точке A_1 с другой стороны отношение k стремится к $-\infty$. Можно поэтому условно говорить, что точка A_1 делит отрезок $\overrightarrow{A_0A_1}$ в отношении ∞ (без знака!).

При $A=A_0$ отношение k равно нулю.

Поставим задачу о вычислении аффинных координат точки A по известным координатам точек A_0 и A_1 (и числу k).

Пусть O — начальная точка координатного репера. Тогда

$$\overrightarrow{A_0A}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA_0}, \quad \overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA},$$

т. е.

$$\overrightarrow{A_0A}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0, \quad \overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r},$$

где

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{r}_0=\overrightarrow{OA_0}, \quad \boldsymbol{r}_1=\overrightarrow{OA_1}.$$

Поэтому соотношение (1), определяющее точку A, мы можем записать в следующем виде:

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0):(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r})=k.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{r}_0+k\boldsymbol{r}_1}{1+k}.$$

Переходя от векторов к их координатам и считая, что $A=A(x, y, z)$, $A_0=A_0(x_0, y_0, z_0)$, $A_1=A_1(x_1, y_1, z_1)$, мы получаем (для случая пространства) следующие окончательные формулы, дающие решение нашей задачи:

$$x=\frac{x_0+kx_1}{1+k}, \quad y=\frac{y_0+ky_1}{1+k}, \quad z=\frac{z_0+kz_1}{1+k}. \tag{2}$$

В случае плоскости следует сохранить лишь две первые формулы (2), а для случая прямой — только первую.

По определению, для середины отрезка $\overline{A_0A_1}$ мы имеем $k=1$. Поэтому

середина отрезка с концами $A_0(x_0, y_0, z_0)$ *и* $A_1(x_1, y_1, z_1)$ *имеет координаты*

$$x=\frac{x_0+x_1}{2}, \quad y=\frac{y_0+y_1}{2}, \quad z=\frac{z_0+z_1}{2}.$$

На плоскости сохраняются лишь две первые формулы, а на прямой — только первая.

4. Прямоугольные координаты

Определение 1. Аффинный координатный репер $O\boldsymbol{e}_1 \ldots \boldsymbol{e}_n$ называется *евклидовым*, если базис

$$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$$

ортонормирован. Аффинная координатная система, определенная прямоугольным репером, называется *евклидовой коорди-*

натной системой, а соответствующие координаты $x^1, \ldots, x^n$ — *евклидовыми.*

При $n > 1$ евклидов репер обычно называется *прямоугольным репером*, евклидовы координаты — *прямоугольными координатами*, а евклидовы координатные системы — *системами прямоугольных координат.*

Евклидовы координаты должны быть известны читателю (по крайней мере на прямой и плоскости) из школьного курса. Поэтому мы на них подробно останавливаться не будем и ограничимся некоторыми замечаниями принципиального характера.

Поскольку евклидовы координаты являются частным случаем аффинных, все сказанное выше (в п. 1—3) автоматически применимо и к евклидовым координатам. Следует только отметить, что если, скажем, в пространстве заданы евклидовы координаты x, y, z, то, например, координаты x, y также будут евклидовыми координатами лишь на плоскостях, параллельных координатной плоскости Oxy (на любой другой плоскости, не перпендикулярной оси Oz, они будут лишь аффинными координатами).

Переход от одной евклидовой координатной системы к другой описывается формулами вида

$$x' = Cx + a,$$

где C — произвольная ортогональная матрица. Эта матрица тогда и только тогда является собственной ортогональной матрицей, когда рассматриваемые координатные системы одноименны.

При $n = 1$ (случай прямой) одноименные евклидовы координатные системы могут отличаться лишь выбором точки O, так что переход от одной такой системы к другой описывается формулой

$$x' = x + a.$$

При $n = 2$ (случай плоскости) переход от евклидовой координатной системы x, y к одноименной евклидовой системе x', y' описывается формулами

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0,$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0,$$

где α — угол от оси Ox к оси Ox'.

*

Прямоугольные координатные системы особенно удобны для решения метрических задач. Например, в любой такой системе расстояние d (в пространстве) между точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ выражается формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Действительно, как мы знаем, эта формула дает длину вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, равную, по определению, расстоянию между точками A_1 и A_2.

На плоскости соответствующая формула имеет вид

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

а на прямой — вид

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

В произвольных аффинных координатах формулы для расстояния имеют существенно более сложный вид. Например, на плоскости

$$d = \sqrt{g_{11}(x_2 - x_1)^2 + 2g_{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + g_{22}(y_2 - y_1)^2}$$

(ср. формулы для длины вектора в п. 4 § 5 гл. 1).

5. Полярные, сферические и цилиндрические координаты

В ряде задач евклидовой геометрии (характеризующихся «круговой» или «сферической» симметрией) удобно вместо прямоугольных координат использовать так называемые «полярные координаты».

Определение 1. Пусть на плоскости заданы

а) некоторая ориентация,

б) некоторая точка O,

в) некоторая ориентированная прямая α, проходящая через точку O.

Тогда любой вектор $\boldsymbol{r}$ однозначно характеризуется его длиной r и (ориентированным) углом φ от прямой α до вектора $\boldsymbol{r}$. Числа r и φ, построенные для радиус-вектора $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OA}$ произвольной точки A плоскости, называются *полярными координатами* точки A (координата r — *полярным радиусом*, а координата φ — *полярным углом*). Точка O называется *полюсом* системы полярных координат, а прямая α — ее *полярной осью*.

Подчеркнем, что для задания полярных координат нужно, кроме полюса O и полярной оси α, задать также ориентацию плоскости.

Полярные координаты однозначно определены для любой точки $A \neq 0$. Для точки O, по определению, считается, что полярный радиус r равен нулю. Полярного угла φ точка O, по определению, не имеет (впрочем, иногда удобно считать, что этот угол существует, но может принимать любое значение).

Таким образом,

$$0 \leqslant r < \infty$$

и

$$-\pi < \varphi \leqslant \pi$$

(впрочем, часто удобно считать полярный угол φ принимающим любые вещественные значения, но определенным только с точностью до слагаемых, кратных 2π).

Систему прямоугольных координат x, y и систему полярных координат r, φ мы будем называть *согласованными*, если координатная система Oxy определяет данную ориентацию плоскости, точки O для обеих систем совпадают и полярная ось совпадает с осью абсцисс Ox. Ясно, что согласованные системы друг друга однозначно определяют. При этом

$$r=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

и обратно,

$$x=r\cos\varphi,$$
$$y=r\sin\varphi.$$

Это и есть формулы перехода от прямоугольных координат к полярным и обратно.

Чтобы перейти от полярной системы координат к несогласованной с ней прямоугольной (или произвольной аффинной) координатной системе, следует сначала перейти к согласованной прямоугольной системе, а затем воспользоваться формулами перехода от одной прямоугольной системы к другой такой системе.

В пространстве аналогом полярных координат являются так называемые «сферические координаты».

***Определение* 2.** Пусть в пространстве задана

а) некоторая ориентация,

б) некоторая ориентированная плоскость П,

в) на плоскости П — некоторая система полярных координат (т. е. полюс O и полярная ось α).

Сферическими координатами произвольной точки A называются

1) ее *полярный радиус* r, т. е. длина радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ (расстояние точки A от точки O); всегда $r\geqslant 0$ и $r=0$ только при $A=0$;

2) ее *долгота* φ, т. е. полярный угол ортогональной проекции A_0 точки A на плоскость П относительно заданной в этой плоскости системы полярных координат; по определению, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$;

3) ее *широта* ψ, т. е. угол между вектором $\overrightarrow{OA}$ и его проекцией $\overrightarrow{OA_0}$ на плоскость П, считаемый положительным, $0<\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$, если вектор $\overrightarrow{OA}$ направлен в положительное полупространство (т. е. если произведение данной ориентации плоскости П и определяемой этим вектором ориентации прямой OA совпадает с данной ориентацией пространства), и отрицательным, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi<0$, — в противном случае (здесь, конечно,

предполагается, что точка A не принадлежит плоскости П; если же это условие не выполнено, то угол ψ равен нулю и разговор о его знаке смысла не имеет). Таким образом, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Сферические координаты однозначно определены для всех точек, не принадлежащих прямой Oz, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости П. Для точек же этой прямой координата ψ смысла не имеет.

Система сферических координат определяет *согласованную* с ней систему прямоугольных координат x, y, z, для которой плоскость Oxy совпадает с плоскостью П, прямоугольные координаты x, y на этой плоскости согласованы с имеющимися на ней полярными координатами, и которая определяет данную ориентацию пространства. Легко видеть, что эти координаты x, y, z выражаются через координаты r, φ, ψ по формулам

$$x = r \cos\varphi \cos\psi,$$
$$y = r \sin\varphi \cos\psi,$$
$$z = r \sin\psi.$$

Очевидно, что эти формулы позволяют и, обратно, выразить координаты r, φ, ψ через координаты x, y, z.

Со сферическими координатами тесно связаны *цилиндрические координаты* ρ, φ, z, где φ и z имеют прежний смысл, а ρ представляет собой полярный радиус проекции A_0 точки A на плоскость П. С координатами x, y, z цилиндрические координаты связаны формулами

$$x = \rho \cos\varphi,$$
$$y = \rho \sin\varphi,$$
$$z = z,$$

а со сферическими координатами — формулами

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2},$$
$$\varphi = \varphi,$$
$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{z}{\rho}.$$

6. Однородные координаты

Отношение k, в котором точка A прямой $\alpha = A_0A_1$ делит отрезок $\overrightarrow{A_0A_1}$ (см. п. 3), однозначно определяет эту точку. Поэтому его можно рассматривать как своеобразную координату этой точки. Эта координата называется *барицентрической координатой* точки A.

Это название объясняется тем, что, как показывается в механике, центром тяжести («барицентром») двух масс m_0 и m_1, помещенных в точках A_0 и A_1, является точка A, делящая отрезок $\overrightarrow{A_0A_1}$ в отношении $k = m_1/m_0$.

Если на прямой α введена аффинная координатная система Ox, то, как было показано в п. 3,

$$x = \frac{x_0 + kx_1}{1+k}.$$

Это есть формула перехода от барицентрической координаты к аффинной координате x.

Подчеркнем, что в точке A_1 барицентрическая координата k не имеет определенного числового значения (в этой точке $k = \infty$; см. п. 3). Вместе с тем значению $k = -1$ не отвечает никакая точка прямой.

Чтобы избежать значения $k = \infty$ барицентрической координаты, удобно ввести следующее.

Определение 1. Числа X_0, X_1, связанные с барицентрической координатой k соотношением $k = X_1/X_0$, называются *однородными барицентрическими координатами* на прямой α.

Координаты X_0, X_1 определены только с точностью до пропорциональности. Другими словами, вместе с числами X_0, X_1 однородными координатами той же точки будут и любые числа вида ρX_0, ρX_1, где ρ — произвольное отличное от нуля число. Чтобы подчеркнуть последнее обстоятельство, тот факт, что числа X_0, X_1 являются однородными барицентрическими координатами точки A, обычно записывается формулой $A(X_0 : X_1)$. Так, например, $A_0(1:0)$.

Однородными барицентрическими координатами точки A_1, по определению, считаются числа 0, 1 (и любые числа, им пропорциональные). Таким образом, $A_1(0:1)$.

Для точки B, являющейся серединой отрезка $\overline{A_0A}$, мы имеем $B(1:1)$.

Заметим, что обе координаты X_0, X_1 нулю одновременно никогда не равны. Кроме того, на прямой нет точки с координатами $(-1:1)$ (поскольку нет точки с $k = -1$).

С аффинной координатой x однородные барицентрические координаты связаны, очевидно, формулой

$$x = \frac{x_0X_0 + x_1X_1}{X_0 + X_1}.$$

Для общего описания возникшей ситуации удобно ввести

Определение 2. Рассмотрим (для некоторого $n > 0$) множество

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$$

всех $n+1$-членных последовательностей

$$(X_0, X_1, \ldots, X_n)$$

вещественных чисел, отличных от *нулевой последовательности*

$$(0, 0 \ldots 0).$$

Два элемента $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ и $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ этого множества называются *пропорциональными*, если существует такое (отличное от нуля) число ρ, что

$$Y_0 = \rho X_0, \quad Y_1 = \rho X_1, \ldots, Y_n = \rho X_n. \tag{1}$$

В этом случае мы будем писать

$$Y_0 : X_0 = Y_1 : X_1 = \ldots = Y_n : X_n$$

или даже

$$\frac{Y_0}{X_0} = \frac{Y_1}{X_1} = \ldots = \frac{Y_n}{X_n}. \tag{2}$$

Если все числа $X_0, \ldots, X_n$ отличны от нуля, то формулы (2) являются обычными равенствами между числами. Однако, если среди чисел $X_0, \ldots, X_n$ имеются равные нулю, то эти формулы уже не являются равенствами между числами и представляют собой лишь условную запись соотношений (1).

Заметим, что если в формулах (2) некоторый «знаменатель» X_i равен нулю, то обязательно равен нулю и соответствующий «числитель» Y_i. Обратно, если $Y_i = 0$, то $X_i = 0$.

Ясно, что отношение пропорциональности является на множестве $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ отношением эквивалентности, так что это множество разбивается на классы пропорциональных последовательностей. Класс, содержащий последовательность $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, мы будем обозначать символом

$$(X_0 : X_1 : \ldots : X_n),$$

а множество всех таких классов (т. е. фактормножество множества $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ по отношению пропорциональности) — символом $\mathbb{R}P^n$.

Нас будут интересовать в основном множества $\mathbb{R}P^1$, $\mathbb{R}P^2$ и $\mathbb{R}P^3$. По причинам, которые будут ясны в дальнейшем, множество $\mathbb{R}P^1$ называется *стандартной* (или *арифметической*) *проективной прямой*, множество $\mathbb{R}P^2$ — *стандартной* (*арифметической*) *проективной плоскостью*, а множество $\mathbb{R}P^3$ — *стандартным* (*арифметическим*) *проективным пространством*.

Множества $\mathbb{R}P^n$ устроены очень интересным и поучительным образом. Мы лишены здесь возможности исследовать их сколько-нибудь подробно. Скажем лишь несколько слов о множестве $\mathbb{R}P^1$ классов $(X_0 : X_1)$ пропорциональных пар чисел.

Все пары вида $(0, X_1)$, $X_1 \neq 0$, очевидно, пропорциональны (скажем, паре $(0, 1)$), т. е. определяют один элемент $(0 : 1)$ множества $\mathbb{R}P^1$. Аналогично, $(X_0 : 0) = (1 : 0)$.

Любой паре (X_0, X_1) с $X_0 \neq 0$ мы можем сопоставить число $x = \dfrac{X_1}{X_0}$. Ясно, что это число зависит только от класса $(X_0 : X_1)$ пары (X_0, X_1), так что соответствие $(X_0 : X_1) \longmapsto \dfrac{X_1}{X_0}$ корректно определено. Оно является биективным соответствием между множеством $\mathbb{R}P^1 \setminus \{(0 : 1)\}$ всех элементов множества $\mathbb{R}P^1$, отличных от элемента $(0 : 1)$, и множеством $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел. Отождествив элемент $(X_0 : X_1)$ с числом $\dfrac{X_1}{X_0}$, мы можем, таким образом, считать, что множество $\mathbb{R}P^1$ получено из множества $\mathbb{R}$ присоединением еще одного элемента $(0 : 1)$ (играющего роль «бесконечности»).

Впрочем, элемент $(X_0 : X_1)$ можно отождествить и с числом $\frac{X_0}{X_1}$ (если, конечно, $X_1 \neq 0$). Тогда $\mathbb{R}P^1$ будет получаться из $\mathbb{R}$ присоединением элемента $(1 : 0)$. Вообще, удалив из $\mathbb{R}P^1$ произвольный элемент $(A_0 : A_1)$, мы можем множество всех остальных элементов отождествить с множеством $\mathbb{R}$, сопоставив элементу $(X_0 : X_1)$ число

$$\frac{A_0X_0 + A_1X_1}{A_0X_1 - A_1X_0}.$$

Таким образом, все элементы множества $\mathbb{R}P^1$ по существу совершенно равноправны.

Наглядно множество $\mathbb{R}P^1$ можно представлять себе в виде замкнутой линии (наподобие окружности), получающейся из прямой линии ее «замыканием в бесконечности».

Возвращаясь к барицентрическим координатам, мы теперь можем сказать, что

соответствие

$$\text{«точка»} \mapsto \text{«ее однородные барицентрические координаты»}$$

определяет биективное отображение прямой α *на множество* $\mathbb{R}P^1$, *из которого удален элемент* $(-1 : 1)$.

Тот факт, что элемент $(-1 : 1)$ играет исключительную роль, весьма затрудняет использование барицентрических координат, вынуждая к многочисленным оговоркам. Чтобы избежать этих оговорок, целесообразно «расширить» прямую, присоединив к ней некоторую фиктивную «несобственную точку» с барицентрическими координатами $(-1 : 1)$ (эту точку следует мыслить расположенной на прямой «в бесконечности», причем следует считать, что мы получаем одну и ту же несобственную точку при удалении по прямой как в одном, так и в другом направлении).

К вопросу о несобственной точке возможны три различных подхода, которые мы рассмотрим по степени их «решительности».

1°. Можно считать, что введение несобственной точки носит чисто «лингвистический» характер, способствуя лишь упрощению и облегчению формулировок. При этом, если при решении какой-нибудь задачи возникла в качестве ответа несобственная точка (например, при вычислении в барицентрических координатах получились координаты $(-1 : 1)$), то это попросту означает, что задача решения не имеет.

2°. Более решительная точка зрения состоит в том, что мы считаем несобственные точки столь же «законными», как и обыкновенные (собственные) точки. Конечно, это будет уже означать изменение предмета исследования: вместо обыкновенной прямой мы будем фактически изучать новый геометрический объект — *расширенную прямую*, существенно отличающийся по своим свойствам от привычной прямой. (Например, расширенная прямая, в отличие от обычной прямой, является замкнутой линией.) Другими словами, мы будем иметь дело уже с совсем другой «геометрией».

3°. Наконец, самая радикальная точка зрения состоит в том, что несобственная точка не только добавляется к обыкновенным точкам, но она считается совершенно равноправной с обыкновенными точками, так что сам термин «несобственная точка» теряет смысл. В этом случае расширенная прямая называется *проективной прямой*, а ее геометрия — *проективной геометрией*.

В дальнейшем мы еще раз будем возвращаться к затронутым здесь идеям и разовьем их более полно и систематично.

Наиболее общим образом «однородные» координаты $(X_0 : X_1)$ на прямой вводятся формулами вида

$$\begin{aligned} \rho X_0 &= a_0 x + b_0, \\ \rho X_1 &= a_1 x + b_1, \end{aligned} \tag{3}$$

где x — некоторая аффинная координата на прямой; a_0, b_0, a_1, b_1 — такие числа, что

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

(это условие необходимо, чтобы по координатам X_0, X_1 можно было обратно найти координату x); ρ — произвольный отличный от нуля множитель пропорциональности (мы его пишем, чтобы подчеркнуть однородный характер координат X_0, X_1, т. е. тот факт, что они определены только с точностью до пропорциональности).

Определение 3. Координаты X_0, X_1, связанные с аффинной координатой x формулами (3), называются (общими) *однородными проективными координатами* на прямой.

Аффинная координата x выражается, очевидно, через координаты $(X_0 : X_1)$ по формуле

$$x = \frac{-b_1 X_0 + b_0 X_1}{a_1 X_0 - a_0 X_1}.$$

В частности, мы видим, что в координатах (3) несобственная точка имеет координаты $(a_0 : a_1)$ (т. е. что координатам $a_0 : a_1$ не отвечает никакая собственная точка прямой).

Однородные барицентрические координаты являются частным случаем проективных координат, получающимся при

$$\begin{aligned} a_0 &= -1, & b_0 &= x_1, \\ a_1 &= 1, & b_1 &= -x_0. \end{aligned}$$

Другой важный частный случай проективных координат получается при

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & b_0 &= 1, \\ a_1 &= 1, & b_1 &= 1. \end{aligned}$$

Эти координаты называются *однородными аффинными координатами*. Они связаны с обыкновенной (неоднородной) аффинной координатой x формулой

$$x=\frac{X_1}{X_0}.$$

В этих координатах несобственная точка имеет координаты $(0:1)$.

Все сказанное выше непосредственно обобщается на случай плоскости и пространства.

Мы рассмотрим только случай плоскости, предоставляя случай пространства инициативе читателя.

Пусть x, y — аффинные координаты на плоскости. По произвольной невырожденной матрице

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

составим числа

$$\begin{aligned} \rho X_0 &= a_0x+b_0y+c_0, \\ \rho X_1 &= a_1x+b_1y+c_1, \\ \rho X_2 &= a_2x+b_2y+c_2, \end{aligned} \tag{4}$$

где ρ — произвольный множитель пропорциональности.

Определение 4. Числа X_0, X_1, X_2, определенные (с точностью до пропорциональности) формулами (4), называются (общими) *однородными проективными координатами* на плоскости.

Аффинные координаты x, y выражаются через проективные координаты $(X_0:X_1:X_2)$ по формулам

$$x=\frac{\alpha_0X_0+\alpha_1X_1+\alpha_2X_2}{\gamma_0X_0+\gamma_1X_1+\gamma_2X_2}, \quad y=\frac{\beta_0X_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2}{\gamma_0X_0+\gamma_1X_1+\gamma_2X_2}, \tag{5}$$

где

$$\alpha_0=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \alpha_1=-\begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \alpha_2=\begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix},$$

$$\beta_0=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \beta_1=\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \beta_2=-\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix},$$

$$\gamma_0=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \gamma_1=-\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \gamma_2=\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Задание. Докажите формулы (5). Указание: запишите эти формулы в следующем виде:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} X_0 & b_0 & c_0\\ X_1 & b_1 & c_1\\ X_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & X_0\\ a_1 & b_1 & X_1\\ a_2 & b_2 & X_2\end{vmatrix}},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_0 & X_0 & c_0\\ a_1 & X_1 & c_1\\ a_2 & X_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & X_0\\ a_1 & b_1 & X_1\\ a_2 & b_2 & X_2\end{vmatrix}}.$$

Однородные проективные координаты (4) осуществляют биективное отображение плоскости на множество $\mathbb{R}P^2$, из которого удалены все элементы $(X_0 : X_1 : X_2)$, для которых

$$\gamma_0 X_0 + \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 = 0$$

(этим элементам соответствуют «несобственные точки» плоскости).

Определение 5. Пусть

$$A_0(x_0,\ y_0),\quad A_1(x_1,\ y_1),\quad A_2(x_2,\ y_2)$$

— неколлинеарная тройка точек плоскости. Числа X_0, X_1, X_2, связанные с аффинными координатами x, y формулами

$$x=\frac{x_0X_0+x_1X_1+x_2X_2}{X_0+X_1+X_2},\qquad y=\frac{y_0X_0+y_1X_1+y_2X_2}{X_0+X_1+X_2},$$

называются *однородными барицентрическими координатами* на плоскости. Они являются частным случаем однородных проективных координат. Для них

$$\begin{array}{lll} \alpha_0 = x_0, & \alpha_1 = x_1, & \alpha_2 = x_2,\\ \beta_0 = y_0, & \beta_1 = y_1, & \beta_2 = y_2,\\ \gamma_0 = 1, & \gamma_1 = 1, & \gamma_2 = 1. \end{array}$$

Механический смысл барицентрических координат (объясняющий их название) состоит в следующем: точка A с координатами $X_0 : X_1 : X_2$ является центром тяжести трех масс X_0, X_1, X_2, помещенных соответственно в точках A_0, A_1, A_2.

Несобственные точки плоскости характеризуются в барицентрических координатах соотношением

$$X_0 + X_1 + X_2 = 0.$$

Определение 6. *Однородными аффинными координатами* называются однородные проективные координаты, для которых

$$\begin{array}{lll} \alpha_0 = 0, & \alpha_1 = 1, & \alpha_2 = 0,\\ \beta_0 = 0, & \beta_1 = 0, & \beta_2 = 1,\\ \gamma_0 = 1, & \gamma_1 = 0, & \gamma_0 = 0. \end{array}$$

Они связаны с аффинными координатами формулами

$$x=\frac{X_1}{X_0}, \quad y=\frac{X_2}{X_0}.$$

Несобственные точки характеризуются в этих координатах соотношением

$$X_0=0.$$

§ 2. УРАВНЕНИЯ ЛИНИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Задание линий и поверхностей уравнениями

Интуитивно понятие линии знакомо каждому человеку, даже не изучавшему геометрию. Например, линиями на плоскости являются прямые и окружности, а в пространстве, скажем, — винтовые линии. С другой стороны, например, область, ограниченная окружностью («круг»), линией не является.

Однако задача дать строгое определение понятию линии (или, как говорят, дать его *экспликацию*) оказалась неожиданно очень трудной и, по-видимому, вполне удовлетворительного решения не имеющей.

Наиболее удачную экспликацию понятия линии предложил замечательный советский математик П. С. Урысон. Грубо говоря, множество точек является линией в смысле Урысона, если в окрестности любой его точки M все его точки, отличные от точки M, составляют несвязное множество (состоящее из нескольких «частей»). Однако под это определение подпадают некоторые весьма сложно устроенные множества, которые наша интуиция может считать линиями лишь с большой натяжкой.

Читатель, интересующийся этим вопросом, найдет подробности в книжке А. С. Пархоменко, Что такое линия, Гостехиздат, 1954.

Как бы то ни было, каждая линия на плоскости представляет собой множество («геометрическое место») точек, удовлетворяющих некоторому условию. В координатах x, y это условие может быть записано в виде равенства

$$f(x, y)=0,$$

где $f(x, y)$ — некоторая функция двух переменных. Это равенство называется *уравнением* данной линии (в данной координатной системе Oxy).

Например, ось абсцисс определяется уравнением

$$y=0,$$

а ось ординат — уравнением

$$x=0.$$

В прямоугольной системе координат биссектриса первого и третьего квадрантов имеет уравнение $x=y$, т. е. уравнение

$$x-y=0,$$