Они связаны с аффинными координатами формулами

$$x = \frac{X_1}{X_0}, \quad y = \frac{X_2}{X_0}.$$

Несобственные точки характеризуются в этих координатах соотношением

$$X_0 = 0.$$

§ 2. УРАВНЕНИЯ ЛИНИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Задание линий и поверхностей уравнениями

Интуитивно понятие линии знакомо каждому человеку, даже не изучавшему геометрию. Например, линиями на плоскости являются прямые и окружности, а в пространстве, скажем, — винтовые линии. С другой стороны, например, область, ограниченная окружностью («круг»), линией не является.

Однако задача дать строгое определение понятию линии (или, как говорят, дать его *экспликацию*) оказалась неожиданно очень трудной и, по-видимому, вполне удовлетворительного решения не имеющей.

Наиболее удачную экспликацию понятия линии предложил замечательный советский математик П. С. Урысон. Грубо говоря, множество точек является линией в смысле Урысона, если в окрестности любой его точки M все его точки, отличные от точки M, составляют несвязное множество (состоящее из нескольких «частей»). Однако под это определение подпадают некоторые весьма сложно устроенные множества, которые наша интуиция может считать линиями лишь с большой натяжкой.

Читатель, интересующийся этим вопросом, найдет подробности в книжке А. С. Пархоменко, Что такое линия, Гостехиздат, 1954.

Как бы то ни было, каждая линия на плоскости представляет собой множество («геометрическое место») точек, удовлетворяющих некоторому условию. В координатах x, y это условие может быть записано в виде равенства

$$f(x, y) = 0,$$

где $f(x, y)$ — некоторая функция двух переменных. Это равенство называется *уравнением* данной линии (в данной координатной системе Oxy).

Например, ось абсцисс определяется уравнением

$$y = 0,$$

а ось ординат — уравнением

$$x = 0.$$

В прямоугольной системе координат биссектриса первого и третьего квадрантов имеет уравнение $x = y$, т. е. уравнение

$$x - y = 0,$$

а биссектриса второго и четвертого квадрантов — уравнение

$$x+y=0.$$

Окружность радиуса R с центром в точке (a, b) имеет (в прямоугольных координатах) уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

В частности, окружность с центром в точке $O(0, 0)$ имеет уравнение

$$x^2+y^2=R^2.$$

Линии задаются уравнениями не только в аффинных, но и в любых других (например, в полярных) координатах. Так, в полярных координатах r, φ уравнение окружности с центром в точке O имеет особенно простой вид:

$$r=R.$$

Аналогично, поверхность в пространстве определяется одним уравнением вида

$$f(x, y, z)=0.$$

Например, сфера радиуса R с центром в точке (a, b, c) имеет уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Линия в пространстве задается двумя условиями, аналитически записываемыми в виде двух уравнений:

$$f(x, y, z)=0,$$
$$g(x, y, z)=0.$$

Иными словами, линия в пространстве задается как линия пересечения двух поверхностей $f(x, y, z)=0$ и $g(x, y, z)=0$.

Заметим, что (для данной линии) поверхности $f(x, y, z)=0$ и $g(x, y, z)=0$ можно выбирать с большой степенью произвола. Именно, за эти поверхности можно принять произвольные поверхности, содержащие данную линию и не имеющие более никаких общих точек.

Аналогом линий в пространстве являются на плоскости (неупорядоченные) наборы изолированных точек. Каждый такой набор может быть представлен как пересечение двух линий, т. е. может быть задан двумя уравнениями вида

$$f(x, y)=0,$$
$$g(x, y)=0.$$

Конечно, выбор этих уравнений также может быть осуществлен с большим произволом.

Замечание 1. Пусть нам дана некоторая поверхность

$$f(x, y, z)=0$$

и некоторая плоскость П. Вообще говоря, плоскость П пересекает данную поверхность по некоторой линии. Поставим вопрос: как найти уравнение этой линии?

Конечно, чтобы этот вопрос имел смысл, необходимо задать на плоскости П некоторую систему координат x', y', а чтобы на этот вопрос можно было ответить, необходимо как-то связать координаты x, y, z в пространстве и координаты x', y' на плоскости.

Наиболее простой случай возникает, когда плоскость П является одной из координатных плоскостей, скажем, плоскостью

$$z = 0.$$

На этой плоскости величины x, y являются координатами и в этих координатах уравнение линии пересечения имеет, очевидно, вид

$$f(x, y, 0) = 0.$$

Общий случай сводится к этому простейшему преобразованием координат. Именно, нужно ввести в пространстве новые координаты x', y', z', в которых уравнение данной плоскости имеет вид

$$z' = 0,$$

и затем, пользуясь формулами преобразования координат, найти уравнение данной поверхности в координатах x', y', z'. После этого останется положить в этом уравнении $z' = 0$. Получится уравнение от x', y', являющееся уравнением искомой линии пересечения (в координатах x', y').

Замечание 2. Во многих курсах аналитической геометрии утверждается (иногда явно, иногда неявно), что не только любая линия на плоскости выражается (в аффинных координатах) некоторым уравнением вида $f(x, y) = 0$, но и обратно, каждое такое уравнение определяет некоторую линию. Несмотря на распространенность (и кажущуюся очевидность) этого утверждения, более внимательное рассмотрение показывает, что оно неверно.

Действительно, пусть X — произвольное множество точек плоскости (например, полуплоскость). Определим функцию $f(x, y)$ (так называемую *характеристическую функцию* множества X), считая, что $f(x, y) = 0$, если точка $A(x, y)$ принадлежит множеству X, и что $f(x, y) = 1$ в противном случае. Тогда множество X будет определяться уравнением $f(x, y) = 0$. Таким образом, уравнениями вида $f(x, y) = 0$ можно задать любое множество на плоскости (а не только линии).

Следовательно, чтобы сохранить утверждение о том, что любое уравнение $f(x, y) = 0$ определяет некоторую линию, мы должны как-то ограничить класс рассматриваемых функций $f(x, y)$, причем это мы должны сделать так, чтобы «вместе с водой не выплеснуть и ребенка», т. е. так, чтобы любую линию по-прежнему можно было бы выразить уравнением $f(x, y) = 0$. Эта задача по существу равносильна задаче об экспликации понятия линии. Мы не будем здесь ею заниматься и ограничимся лишь указанием двух примеров (чтобы хотя бы намекнуть на характер возникающих здесь трудностей).

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x, y)$, определенную условиями:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Без труда проверяется, что эта функция непрерывна и, более того, имеет непрерывные частные производные всех порядков. Вместе с тем уравнение $f(x, y) = 0$ определяет, очевидно, полуплоскость $x \geqslant 0$.

Пример 2. Уравнение

$$|x| - x = 0$$

также определяет полуплоскость $x \geqslant 0$.

Таким образом, ни наложение условий гладкости (дифференцируемости), ни ограничение «элементарными функциями» не позволяет нам исключить «частей плоскости».

2. Алгебраические линии

Тем не менее, существуют, конечно, достаточно обширные классы функций $f(x, y)$, обладающие тем свойством, что уравнения $f(x, y) = 0$ определяют «настоящие» линии (не содержащие «плоскостных» кусков). Простейшим (и, по-видимому, важнейшим) таким классом является класс всех многочленов.

Напомним, что *многочленом* от переменных x, y называется сумма *одночленов* вида $ax^p y^q$, где a — некоторое число (отличное от нуля), а p и q — целые неотрицательные числа. Число $n = p + q$ называется *степенью* одночлена $ax^p y^q$. Наибольшая степень одночленов, из которых состоит данный многочлен, называется *степенью* этого многочлена. Многочлен называется *формой* (или *однородным многочленом*), если все его одночлены имеют одну и ту же степень. Ясно, что любой многочлен является суммой форм. Многочленами нулевой степени являются отличные от нуля числа и только они. Во избежание излишних оговорок, к многочленам причисляется также и число 0. Этот *нулевой многочлен* никакой степени не имеет (или, если угодно, имеет ту степень, которую мы желаем в данный момент ему приписать). Два многочлена f и g называются *пропорциональными*, если существует такое число $k \neq 0$, что $f = kg$. Ясно, что пропорциональные многочлены имеют одну и ту же степень.

Определение 1. Множество точек плоскости, аффинные координаты x, y которых удовлетворяют уравнению $f(x, y) = 0$, где

$f(x, y)$ — некоторый многочлен положительной степени, называется *алгебраической линией.* Степень многочлена $f(x, y)$ называется при этом *порядком* линии.

Изучение алгебраических линий является предметом так называемой алгебраической геометрии. В аналитической геометрии ограничиваются изучением линий лишь первого и второго порядков.

Чтобы оправдать введенную терминологию, следует, конечно, показать, что алгебраические линии соответствуют интуитивному понятию о линиях: например, не содержат «частей плоскости». Для линий первого и второго порядка мы сделаем это ниже, в явном виде построив все возможные такие линии. Для линий высших порядков соответствующее утверждение доказывается в курсах алгебраической геометрии.

Однако, понятие алгебраической линии все же не полностью соответствует интуитивному понятию линии. Например, уравнению

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

не удовлетворяет ни одна точка плоскости, т. е. это уравнение определяет *пустое множество.* Аналогично, уравнению

$$x^2 + y^2 = 0$$

удовлетворяет только точка $O(0, 0)$, так что соответствующая алгебраическая линия состоит только из одной этой точки. Таким образом, вводя алгебраические линии, мы включаем в понятие линии пустое множество и множества, состоящие из отдельных точек. Это «насилие над интуицией» не столь велико, чтобы с ним нельзя было примириться, с другой стороны, включение в рассмотрение такого рода «особых» алгебраических линий существенно унифицирует и упрощает теорию.

В связи с понятием алгебраической линии, в первую очередь, встает вопрос о корректности его определения, т. е. об его независимости от выбора аффинной координатной системы. Соответствующее доказательство проводится без особого труда.

Действительно, пусть x', y' — другая аффинная координатная система. Чтобы получить в координатах x', y' уравнение[1] $f'(x', y') = 0$ линии, имеющей в координатах x, y уравнение $f(x, y) = 0$, достаточно, очевидно, в функцию $f(x, y)$ подставить выражения координат x, y через координаты x', y'. Но, как мы знаем, координаты x, y линейно выражаются через координаты x', y', а при подстановке в многочлен $f(x, y)$ вместо x, y произвольных линейных функций переменных x', y' снова, очевидно, получится многочлен (уже от x', y'). Следовательно, линия, алгебраическая в координатах x, y, будет алгебраической

[1]) Здесь, конечно, символ f' никакого отношения к производным не имеет.

линией и в координатах x', y'. Тем самым корректность понятия алгебраической линии полностью доказана.

Правду сказать, в приведенном доказательстве допущена некоторая неточность (попытайтесь найти ее сами). Именно, многочлен, определяющий алгебраическую линию, должен иметь положительную степень, но априори не ясно, не перейдет ли при замене координат многочлен положительной степени в многочлен нулевой степени. Таким образом, нужно доказать, что это невозможно. Вместо этого мы докажем большее, а именно, что *при замене координат степень многочлена $f(x, y)$ вообще не меняется.*

С этой целью заметим, что при линейной замене переменных степень многочлена может только уменьшиться. Таким образом, если многочлен $f(x, y)$ имеет степень n, а получающийся из него в результате линейной замены переменных многочлен $f'(x', y')$ имеет степень n', то $n' \leqslant n$. Но многочлен $f'(x', y')$ в свою очередь получается из многочлена $f(x, y)$ линейной заменой переменных (обратной к предыдущей). Поэтому, по аналогичным соображениям, $n \leqslant n'$. Следовательно, $n = n'$.

Замечание 1. Доказательство равенства $n = n'$ можно рассматривать как доказательство корректности определения порядка алгебраической линии. Однако ситуация здесь несколько более сложная, чем это кажется на первый взгляд. Действительно, одна и та же алгебраическая линия (в одной и той же аффинной координатной системе) может, вообще говоря, выражаться различными уравнениями $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$. Например, если многочлены $f(x, y)$ и $g(x, y)$ пропорциональны, то линии $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$, очевидно, совпадают. Поскольку пропорциональные многочлены имеют одну и ту же степень, корректность определения порядка алгебраической линии будет установлена, если мы докажем, что справедливо и обратное утверждение, т. е. что справедлива следующая теорема единственности:

Алгебраические линии $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$ тогда и только тогда совпадают, когда многочлены $f(x, y)$ и $g(x, y)$ пропорциональны.

Однако, к сожалению, в таком виде теорема неверна. Тому имеются две причины. Во-первых, если мы умножим многочлен $f(x, y)$ на произвольный многочлен положительной степени, ни при каких вещественных x, y не обращающийся в нуль (например, на многочлен $x^2 + y^2 + 1$), то мы получим многочлен, определяющий ту же самую алгебраическую линию, что и многочлен $f(x, y)$. Например, уравнения $x(x^2 + y^2 + 1) = 0$ и $x = 0$ определяют одну и ту же прямую (ось ординат). В то же время эти многочлены не пропорциональны (и имеют различные степени). Чтобы преодолеть эту трудность, следует соответствующим образом определить отношение «две алгебраические линии совпадают». Например, можно считать, что две алгебраические линии $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$ совпадают, если равенства $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$ равносильны не только для вещественных переменных x и y, но и в случае, когда мы допускаем для этих переменных любые комплексные значения. Можно сказать, что, таким образом, мы вводим в рассмотрение «точки» с комплексными координатами (такие точки не имеют никакого геометрического смысла и представляют собой — при фиксированной аффинной координатной системе — просто пары (x, y) комплексных чисел) и определяем алгебраические линии как совокупности всех (в том числе и комплексных) точек, удовлетворяющих уравнениям вида $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — произвольный многочлен положительной степени. Из алгебры известно, что для любого многочлена положительной степени существуют комплексные точки (x, y), в которых он обращается в нуль. Поэтому после введения комплексных точек получить контрпримеры к теореме единственности описанным выше способом мы уже не можем.

Однако такие контрпримеры можно получить и по-другому, заметив, что уравнения $f(x, y) = 0$ и $f(x, y)^p = 0$, где p — произвольное натуральное число, определяют одну и ту же алгебраическую линию (безразлично, допускаются или нет точки с комплексными координатами). Например, оба уравнения $x = 0$ и $x^2 = 0$ определяют одну и ту же ось ординат. Эту трудность можно преодолеть, введя понятие «кратной точки» и считая, например, что уравнение $x^2 = 0$ определяет «дважды взятую» ось ординат. На этом пути возникают значительные трудности в связи с аккуратным обращением с кратными точками (даже строгое и «рабочее» определение понятия «кратности» дать не так-то просто). Тем не менее все эти трудности можно успешно преодолеть (что, кстати сказать, требует довольно изощренной алгебраической техники), после чего теорему единственности уже удается строго доказать.

Описанный путь обоснования теоремы единственности слишком труден, чтобы мы могли им здесь воспользоваться. Однако мы можем совершить «обходный маневр», заметив, что введение комплексных и кратных точек по существу лишает нашу теорию геометрической наглядности и переводит ее в область алгебры. Воспользовавшись принципом «снявши голову, по волосам не плачут», мы можем полностью «алгебраизироваться» и определить алгебраическую линию (в данной аффинной координатной системе x, y) просто как класс пропорциональных друг другу многочленов $f(x, y)$. Теорема единственности будет тогда автоматически справедлива. Мы, однако, не будем настаивать на этом определении, желая остаться в рамках наглядно геометрических понятий, хотя иногда оно и найдет отражение в нашей терминологии (аналогично тому, как мы позволим себе говорить, например, о «дважды взятых прямых», не давая общего определения кратных точек).

Мы можем надеяться сохранить (при первоначальном определении алгебраической линии) теорему единственности в несколько ослабленном виде, заметив, что во всех указанных выше контрпримерах многочлены $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$, определяющие одну и ту же алгебраическую линию, имеют различные степени. Это наводит на мысль, не будет ли справедлива следующая теорема единственности для алгебраических линий фиксированного порядка:

Алгебраические линии $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$, определяемые многочленами одной и той же степени n, тогда и только тогда совпадают, когда эти многочлены пропорциональны.

Однако и в этой ослабленной форме теорема единственности неверна, как показывает пример непропорциональных многочленов $x^2 + y^2 + 1$ и $x^2 + y^2 + 2$, определяющих одну и ту же алгебраическую линию (пустое множество). Тем не менее, эта теорема оказывается справедливой, если рассматриваемые линии имеют достаточно много точек. Например, как мы докажем ниже (см. п. 3 § 1 гл. 3 и п. 4 § 1 гл. 6), она справедлива *для любых линий первого порядка* (которые заведомо имеют много точек) и *для линий второго порядка, состоящих более чем из одной точки.*

Поскольку наша цель здесь состояла лишь в указании подводных камней в этих, казалось бы, спокойных и безопасных водах, мы ограничимся сказанным.

Конечно, аналогичные трудности (в осложненном виде) имеют место и для поверхностей (и линий) в пространстве.

3. Параметрические уравнения линий и поверхностей

Аналитическое задание линий уравнениями вида $f(x, y) = 0$ не является единственно возможным. Например, представляя данную линию как траекторию движущейся точки, мы получим (по-прежнему предполагая заданной систему аффинных координат x, y), что координаты x, y точек линии являются некоторыми функциями

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{aligned} \tag{1}$$

параметра t («времени»), меняющегося в некоторых определенных пределах $a \leqslant t \leqslant b$, где a и b — вещественные числа или символы $\pm\infty$. Такого рода задание линии называется заданием посредством *параметрических уравнений.*

Например, уравнения

$$\begin{aligned} x &= R\cos t, \\ y &= R\sin t, \end{aligned} \qquad -\pi < t \leqslant \pi, \tag{2}$$

являются (в прямоугольных координатах x, y) параметрическими уравнениями окружности радиуса R с центром в точке $O(0, 0)$.

Действительно, каждая точка $A(x, y)$ с координатами, выражающимися формулами (2), удовлетворяет уравнению окружности

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

и обратно, если числа x, y удовлетворяют этому уравнению, то существует такое t, что выполнены уравнения (2).

Параметр t в уравнениях (2) имеет очевидный геометрический смысл: он равен углу от оси Ox к радиус-вектору $\overrightarrow{OA}$ точки $A(x, y)$.

Замечание 1. Одну и ту же линию можно задавать различными параметрическими уравнениями. Например, ту же окружность радиуса R с центром в точке O можно задать параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= R\frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y &= R\frac{2t}{1+t^2}, \end{aligned}\right. \qquad -\infty < t < +\infty$$

(строго говоря, мы здесь получим окружность без точки $(R, 0)$, соответствующей бесконечному значению параметра t). Конечно, здесь параметр t имеет уже совсем другое геометрическое истолкование (найдите его сами).

Каждому значению t_0 параметра t соответствует некоторая определенная точка A_0 рассматриваемой линии, имеющая координаты $x(t_0)$, $y(t_0)$. Однако одна и та же точка может, вообще говоря, соответствовать многим различным значениям параметра. Например, для уравнений (2) значения параметра $t = \pm\pi$ определяют одну и ту же точку окружности.

Чтобы от уравнения $f(x, y) = 0$ перейти к параметрическим уравнениям, следует в функцию $f(x, y)$ вместо x подставить некоторую функцию $x(t)$ и решить уравнение

$$f(x(t), y) = 0 \tag{3}$$

относительно y. При этом функцию $x(t)$ следует выбрать так, чтобы уравнение (3) имело однозначное решение $y = y(t)$. При неудачном выборе функции $x(t)$ уравнение (3) может вообще не иметь однозначного решения или иметь такое решение только на небольшом отрезке изменения параметра t (что даст нам только некоторую часть исследуемой линии). Детальное рассмотрение всех этих вопросов принадлежит, по существу, теории неявных функций, и мы здесь ими заниматься не будем.

Важный класс параметрических уравнений возникает, когда за параметр t принята координата x. В этом случае мы на самом деле имеем только одно уравнение вида

$$y = y(x). \tag{4}$$

Такое уравнение линии называется уравнением, *разрешенным относительно* x. В случае, когда координаты x, y прямоугольны, наша линия представляет собой в этом случае не что иное, как *график* функции $y = y(x)$.

Для того чтобы линию можно было задать уравнением вида (4), необходимо и достаточно, чтобы каждая прямая, параллельная оси ординат, пересекала эту линию не более чем в одной точке. Например, окружность $x^2 + y^2 = R^2$ задать уравнением вида (4) нельзя. Однако ее «верхнюю» полуокружность $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geqslant 0$, так задать можно:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \qquad -R \leqslant x \leqslant R.$$

Аналогично, уравнение

$$y = -\sqrt{R^2 - x^2}, \qquad -R \leqslant x \leqslant R,$$

определяет «нижнюю» полуокружность $x^2 + y^2 = R^2$, $y \leqslant 0$.

В пространстве параметрические уравнения линий имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b. \\ z &= z(t), \end{aligned}$$

Все сказанное выше применимо, конечно (с соответствующими тривиальными изменениями), и в этом случае.

Вводя векторную функцию

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_1 + y(t)\boldsymbol{e}_2 + z(t)\boldsymbol{e}_3$$

(на плоскости — векторную функцию $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_1 + y(t)\boldsymbol{e}_2$), мы можем параметрические уравнения линии записать в виде одного *векторного параметрического уравнения*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор произвольной точки линии. Это уравнение имеет, формально, один и тот же вид как в плоскости, так и в пространстве.

Поверхности в пространстве также можно задавать параметрическими уравнениями (содержащими уже два независимых параметра). В векторной форме они имеют вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v).$$

Поскольку общей теорией поверхностей мы по существу заниматься не будем, такого рода уравнения будут у нас возникать только мимоходом.

Обратим внимание на то, что интуитивное геометрическое различие между линиями и поверхностями, состоящее в том, что линии «одномерны», а поверхности «двумерны», находит свое аналитическое отражение в том, что линии определяются уравнениями, зависящими от о д н о г о параметра, а поверхности — уравнениями, зависящими от **двух** параметров. Иначе говоря, линии представляют собой «однопараметрические семейства» точек, а поверхности — «двупараметрические семейства».

Владея параметрическими уравнениями линий, мы можем попытаться определить линию (на плоскости) как множество точек, координаты которых выражаются уравнениями вида (1), где функции $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют определенным условиям (которые мы и должны найти). Само собой напрашивающееся условие состоит в требовании *непрерывности* этих функций. Такое определение линии предложил в прошлом веке французский математик Жордан, и потому линии в этом смысле называются «жордановыми кривыми». Однако вскоре после того, как Жордан предложил свое определение, итальянский математик Пеано построил пример жордановой кривой, проходящей через любую (!) точку некоторого квадрата. Пример Пеано показывает, таким образом, что понятие жордановой кривой оказывается слишком широким.

Это понятие можно сузить, потребовав, чтобы функции $x(t)$ и $y(t)$ были дифференцируемыми. Получающиеся так называемые «гладкие кривые» уже не могут заполнять никакой плоской области и вполне удовлетворяют интуитивному представлению о кривой линии. Однако вне рамок гладких кривых оказываются, например, все ломаные. Чтобы включить и их, следует допустить функции, обладающие конечным числом разрывов (первого рода). Соответствующие «кусочно гладкие кривые» уже охватывают по существу все интересные для математической практики кривые и, по-видимому, представляют (на современном уровне развития математики) наиболее удачный аналитический вариант строгого определения понятия «линий». Однако их определение содержит чуждое геометрии требование дифференцируемости, и потому с точки зрения «чистой геометрии» класс кусочно гладких кривых определен плохо.

Кроме того, все определения «по Жордану» (включающие или нет требования дифференцируемости) имеют еще и тот принципиальный недостаток, что они описывают линию не только как множество точек, но и включают в себя определенный «способ пробегания» этого множества. Это находит отражение в том, что две разные пары функций $x(t)$ и $y(t)$ могут определять одну и ту же линию (см. выше в п. 3 пример двух разных параметрических уравнений окружности). Строгое описание этого феномена возможно, но оказывается весьма длинным и утомительным (следует, например, учесть возможность того, что при изменении параметра t точка $(x(t), y(t))$ может «стоять на месте»).

Впрочем, все это имеет для нас чисто «академический» интерес, поскольку мы будем интересоваться лишь алгебраическими линиями первого и второго порядков, в связи с которыми никаких трудностей с определением не возникает (мы не говорим сейчас о трудностях, о которых шла речь в конце п. 2). Мы коснулись этих вопросов лишь для того, чтобы читатель не думал, что здесь дело обстоит так просто, как это на первый взгляд кажется.

§ 3. КООРДИНАТНО-АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ

1. Основные положения аксиоматического метода

Общеизвестен *дедуктивный характер* математики, т. е. тот факт, что истинность математических утверждений (в отличие от утверждений естественных наук) не устанавливается на основании опыта и наблюдения, а выводится (дедуцируется) из небольшого числа исходных утверждений (*аксиом*). Истинность аксиом принимается без доказательства; все остальные утверждения (*теоремы*) с помощью логических рассуждений выводятся из аксиом. Понятия, участвующие в утверждениях, также разделяются на два типа — *основные* (*исходные*) *понятия*, принимающиеся без определений, и *производные понятия*, которые должны быть определены через исходные.

Эти требования к дедуктивной науке были выработаны еще древнегреческими математиками и обычно связываются с именем Аристотеля. Основывающееся на них изложение геометрии, предпринятое Евклидом в его «Началах», в течение двух тысяч лет считалось основным и безупречным примером дедуктивного построения знания. Однако постепенно выяснилось, что изложение Евклида (на котором до сих пор во многом базируется преподавание математики в школе) не вполне удовлетворяет указанным требованиям. Например, Евклид делает попытки определения основных понятий (скажем, он пишет: «точка есть то, что не имеет частей») и, кроме того, его аксиомы недостаточны для доказательства всех теорем геометрии (необходимы дополнительные утверждения, Евклидом нигде явно не сформулированные).

Конечно, эти недостатки вполне исправимы и были действительно исправлены в конце XIX в., когда математическая мысль после многовекового перерыва опять обратилась к представлению геометрии (и других областей математики) в строгой форме, соответствующей древнегреческому идеалу аксиоматико-дедуктивной науки. Во многом это было стимулировано открытием Лобачевским его неевклидовой геометрии.

На первых порах геометры XIX в. исправляли Евклида, оставаясь в вопросе об истинности геометрии по существу на позициях Аристотеля, т. е. они считали, что:

1°. Исходные положения (аксиомы и основные понятия) имеют вполне определенный содержательный смысл; аксиомы истинны в силу своей очевидности.

2°. Теоремы истинны, так как они выводятся правильными логическими рассуждениями из истинных аксиом.

Эта точка зрения называется *содержательной*. Развитие математики в XIX и XX вв. привело к некоторому новому уровню дедуктивно-аксиоматических построений, который принято называть *формальным*. Этот уровень