никаких трудностей с определением не возникает (мы не говорим сейчас о трудностях, о которых шла речь в конце п. 2). Мы коснулись этих вопросов лишь для того, чтобы читатель не думал, что здесь дело обстоит так просто, как это на первый взгляд кажется.

§ 3. КООРДИНАТНО-АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ

1. Основные положения аксиоматического метода

Общеизвестен *дедуктивный характер* математики, т. е. тот факт, что истинность математических утверждений (в отличие от утверждений естественных наук) не устанавливается на основании опыта и наблюдения, а выводится (дедуцируется) из небольшого числа исходных утверждений (*аксиом*). Истинность аксиом принимается без доказательства; все остальные утверждения (*теоремы*) с помощью логических рассуждений выводятся из аксиом. Понятия, участвующие в утверждениях, также разделяются на два типа — *основные* (*исходные*) *понятия*, принимающиеся без определений, и *производные понятия*, которые должны быть определены через исходные.

Эти требования к дедуктивной науке были выработаны еще древнегреческими математиками и обычно связываются с именем Аристотеля. Основывающееся на них изложение геометрии, предпринятое Евклидом в его «Началах», в течение двух тысяч лет считалось основным и безупречным примером дедуктивного построения знания. Однако постепенно выяснилось, что изложение Евклида (на котором до сих пор во многом базируется преподавание математики в школе) не вполне удовлетворяет указанным требованиям. Например, Евклид делает попытки определения основных понятий (скажем, он пишет: «точка есть то, что не имеет частей») и, кроме того, его аксиомы недостаточны для доказательства всех теорем геометрии (необходимы дополнительные утверждения, Евклидом нигде явно не сформулированные).

Конечно, эти недостатки вполне исправимы и были действительно исправлены в конце XIX в., когда математическая мысль после многовекового перерыва опять обратилась к представлению геометрии (и других областей математики) в строгой форме, соответствующей древнегреческому идеалу аксиоматико-дедуктивной науки. Во многом это было стимулировано открытием Лобачевским его неевклидовой геометрии.

На первых порах геометры XIX в. исправляли Евклида, оставаясь в вопросе об истинности геометрии по существу на позициях Аристотеля, т. е. они считали, что:

1°. Исходные положения (аксиомы и основные понятия) имеют вполне определенный содержательный смысл; аксиомы истинны в силу своей очевидности.

2°. Теоремы истинны, так как они выводятся правильными логическими рассуждениями из истинных аксиом.

Эта точка зрения называется *содержательной*. Развитие математики в XIX и XX вв. привело к некоторому новому уровню дедуктивно-аксиоматических построений, который принято называть *формальным*. Этот уровень стал необходимым в связи с созданием новых отделов математики, имеющих дело с очень отвлеченными и мало наглядными конструкциями. Наглядность и очевидность исходных утверждений перестала, тем самым, быть критерием правильности (и полезности) математических построений. Вперед выдвинулась логическая строгость математических теорий. Явная формулировка всех аксиом и посылок стала насущно необходимой.

При формально-аксиоматическом построении теории намеренно отвлекаются от содержательного понимания и вопрос об истинности или очевидности аксиом уже больше не ставится. Аксиоматически построенная математическая теория занимается изучением лишь логических следствий из принятых аксиом. Таким образом, формально-аксиоматический подход преодолевает аристотелевский тезис 1°.

Дальнейшее углубление дедуктивного метода, связанное с преодолением тезиса 2°, возникает при анализе понятия правильного логического вывода. Оказывается, что для логики также возможно чисто формальное построение, отвлекающееся от ее содержательного понимания. Последовательное проведение этой точки зрения увело бы нас слишком далеко и потому мы остановимся на полпути и будем рассматривать «формальные аксиоматики в неформальной логике».

Нашей основной целью будет дедуктивно-аксиоматическое построение геометрии (в первую очередь обыкновенной школьной, евклидовой геометрии, а затем аффинной и проективной). При этом для простоты мы ограничимся случаем плоскости. Переход к случаю пространства совершенно тривиален, и мы его оставим читателю.

Формально-аксиоматическое построение геометрии (как и любой другой математической теории) начинается с перечисления, во-первых, основных объектов, во-вторых, основных отношений между этими объектами и, в-третьих, аксиом.

Основные объекты и основные отношения никак не определяются, не поясняются и не описываются, а только называются. От них лишь требуется, чтобы они подчинялись аксиомам.

Все другие объекты и отношения, рассматриваемые в геометрии, должны определяться через основные. Именно потому, что цепь определений должна иметь начало, необходимы основные неопределяемые объекты и отношения.

Подчеркнем, что основными объектами данной аксиоматики можно считать объекты любой природы, а основным отношениям между ними можно придать любой конкретный смысл, лишь бы удовлетворялись все аксиомы. Тогда любая теорема, выведенная из аксиом, будет выражать определенный факт, относящийся к этим объектам, точнее, к тем их свойствам, которые фигурируют в аксиомах.

Любой конкретный выбор объектов и их отношений, удовлетворяющий аксиомам, называется *реализацией*, *интерпретацией*, или *моделью* данной аксиоматики.

Впрочем, эта терминология постепенно выходит из употребления. Теперь предпочитают называть, скажем, модель аксиоматики плоской евклидовой геометрии «евклидовой плоскостью», а например, модель аксиоматики плоской аффинной геометрии — «аффинной плоскостью» и т. п.

Две модели называются *изоморфными*, если между ними может быть установлен изоморфизм, т. е. взаимно однозначное соответствие, сохраняющее все основные отношения (ср. п. 6 § 2 гл. 1).

Вообще говоря, основные объекты и отношения (а также связывающие их аксиомы) можно выбирать довольно свободно: их выбор диктуется теми целями, которые ставит перед собой автор аксиоматики. Нужно лишь следить, чтобы все рассматриваемые аксиоматики были друг другу равносильны, т. е. чтобы они описывали одну и ту же математическую теорию.

Что, собственно говоря, означает, что две аксиоматики «описывают одну и ту же математическую теорию»? Если обе аксиоматики имеют одни и те же основные объекты и основные отношения, ответ тривиален: каждая аксиома одной аксиоматики должна быть теоремой в другой и наоборот. Если же основные объекты и основные отношения двух рассматриваемых аксиоматик различны, то их равносильность означает, что в каждой из них можно соответствующими определениями ввести основные объекты и основные отношения другой аксиоматики так, чтобы для этих объектов и отношений были выполнены соответствующие аксиомы, т. е. чтобы эти аксиомы оказывались теоремами. Другими словами, это означает, что данные аксиоматики должны быть интерпретируемыми друг в друге.

Если мы, выбрав основные объекты и отношения, произвольно напишем ряд аксиом, то, вообще говоря, мы можем и не получить аксиоматики, описывающей какую-либо математическую теорию. Необходимо еще, чтобы эти аксиомы были *непротиворечивы*, т. е. чтобы из них нельзя было вывести некоторого утверждения вместе с его отрицанием. Противоречивые системы аксиом совершенно бесполезны, поскольку из любой такой системы можно по законам логики вывести произвольное утверждение.

Как доказать непротиворечивость данной системы аксиом? Для этого возможны два способа: «абсолютный» и «относительный».

«Абсолютный» способ основывается на тщательном исследовании формального строения всех предложений, выводимых в данной аксиоматике (ее «теорем»). Если такое исследование продвинуто достаточно далеко и, в частности, найдены формальные признаки, характеризующие выводимые предложения, то для доказательства непротиворечивости аксиоматики остается лишь доказать, что не существует предложения, обладающего этими признаками одновременно с его отрицанием.

Однако «абсолютный» способ для мало-мальски сложных систем аксиом (например, для аксиом арифметики, не говоря уже об аксиомах геометрии) наталкивается на принципиальные трудности и приводит к порочному кругу.

Поэтому нам остается лишь «относительный» способ, заключающийся в том, что для данной аксиоматики строится модель в некоторой другой аксиоматике, непротиворечивость которой уже известна. Возможность построения такой модели обеспечивает, очевидно, непротиворечивость и данной аксиоматики. Конечно, пользуясь «относительным» способом, мы рано или поздно придем к аксиоматике, которую «негде» интерпретировать и к которой, следовательно, необходимо применять «абсолютный» способ. Выяснением и решением возникающих здесь принципиальных проблем занимается математическая логика, лежащая вне рамок нашего изложения.

Мы будем предполагать, что непротиворечивость теории вещественных чисел нам уже известна, и будем доказывать непротиворечивость наших аксиоматик построением их «числовых моделей».

Кроме непротиворечивости, аксиоматики геометрии должны обладать также свойством «полноты». В наиболее сильной форме требование полноты означает, что любое утверждение, которое осмысленно может быть сформулировано в этой аксиоматике, может быть либо выведено из аксиом, либо опровергнуто (с помощью этих аксиом). Однако в математической логике доказывается, что никакая достаточно мощная аксиоматика (в частности, никакая аксиоматика геометрии) таким свойством обладать не может. Это утверждение известно как теорема Гёделя о неполноте.

Поэтому мы вынуждены принять следующее определение полноты, вполне достаточное для всех практических целей: аксиоматика называется *полной*, если любые две ее интерпретации изоморфны.

Конечно, в математике встречаются (и далее играют большую роль) и неполные аксиоматики. Примером неполной аксиоматики может служить система аксиом группы: она неполна, потому что существуют неизоморфные группы. Неполные аксиоматики служат для совершенно иных целей, чем полные, и мы ими здесь заниматься не будем.

На аксиоматику часто накладывается еще требование *минимальности*: в список аксиом не должны входить «лишние» аксиомы, которые могут быть выведены из остальных аксиом. Требование минимальности очень существенно, когда мы интересуемся внутренним логическим строением геометрии. Однако, если аксиомы нам нужны только для строгости изложения и мы интересуемся не столько логической структурой теории, сколько фактами, которые в ней могут быть доказаны, требование минимальности оказывается чрезвычайно стеснительным и порой просто вредным. Поэтому за минимальностью мы, как правило, следить не будем.

Наконец, обычно считается (точнее, считалось) необходимым, чтобы аксиоматика геометрии была *независимой*, т. е. чтобы в ней не участвовали понятия из других отделов математики. Это приводит к, по существу, неоправданному усложнению аксиоматики, поскольку, скажем, аксиомы, описывающие расположение точек на прямой, на самом деле ничем не отличаются от соответствующих аксиом теории вещественных чисел, так что в рамках независимой аксиоматики геометрии приходится заново строить большой фрагмент теории вещественных чисел. Кроме того, требование независимости запрещает использовать даже простейшие понятия теории множеств, что, естественно, также вносит определенные трудности.

По этим основаниям в последнее время требование независимости не стали считать так уж обязательным и все шире начали использовать аксиоматики геометрии, базирующиеся на теории вещественных чисел и теории множеств. Наша аксиоматика также будет основываться на этих теориях.

2. Аксиоматика евклидовой геометрии

В основу нашей аксиоматики геометрии мы положим понятие евклидовой координатной системы. Рассмотрим прежде всего, какими свойствами это понятие обладает с содержательной точки зрения.

По определению, каждая евклидова координатная система является некоторым биективным отображением α плоскости на множество $\mathbb{R}^2$ всех пар вещественных чисел: для любой точки A пара $\alpha(A)$ состоит из координат x, y этой точки.

Пусть нам даны две евклидовы координатные системы α и α'. Отображение α^{-1}, обратное координатной системе α, каждой паре $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ сопоставляет некоторую точку A, а координатная система α' сопоставляет этой точке пару чисел (x', y'). Следовательно, отображение $\alpha' \circ \alpha^{-1}$ представляет собой отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, переводящее пару (x, y) в пару (x', y'). При этом (см. п. 4 § 1) числа x, y и x', y' связаны формулами перехода вида

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где C — некоторая ортогональная матрица (второго порядка), а a и b — числа. Таким образом,

Для любых двух евклидовых координатных систем α и α' композиция $\alpha' \circ \alpha^{-1}$ представляет собой отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задаваемое формулой вида (1).

Далее, пусть α — произвольная евклидова координатная система и пусть φ — произвольное отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задаваемое формулой вида (1). Тогда величины x', y' также будут евклидовыми координатами на плоскости, т. е. отображение $A \mapsto (x', y')$ будет евклидовой координатной системой. Но, по определению, это отображение является не чем иным, как отображением $\varphi \circ \alpha$. Таким образом,

Для любой евклидовой координатной системы α и любого отображения φ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задаваемого формулой вида (1), *отображение $\varphi \circ \alpha$ также является евклидовой координатной системой.*

Как мы ниже покажем, из этих свойств евклидовых координатных систем можно вывести всю евклидову геометрию плоскости. Другими словами, их можно принять за аксиомы евклидовой геометрии плоскости.

Перейдем теперь к формальному описанию аксиом.

Мы будем рассматривать всевозможные преобразования

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

задаваемые формулами вида (1).

Определение 1. Множество всех преобразований вида (1) мы будем обозначать символом $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$.

Из содержательного смысла этих преобразований немедленно вытекает, что

множество $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$ *является группой преобразований.*

Формальное доказательство сводится к тривиальным проверкам: если

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - C^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = (C'C) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(C' \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \right).$$

Поскольку для ортогональных матриц C и C' матрицы C^{-1} и $C'C$ ортогональны (п. 6 § 5 гл. 1), тем самым доказано, что если преобразования α и α' выражаются формулой вида (1), то преобразования α^{-1} и $\alpha' \circ \alpha$ также обладают этим свойством. Но это, по определению, и означает, что $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$ является группой.

Теперь мы уже можем сформулировать наше основное определение.

Пусть нам дано некоторое множество $\mathfrak{M}$ вместе с непустым семейством $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$ биективных отображений этого множества на множество $\mathbb{R}^2$ и пусть выполнены следующие две аксиомы:

***Аксиома* 1.** *Для любого отображения* $\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$, *принадлежащего семейству* $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$, *и любого преобразования* $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *принадлежащего группе* $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$, *отображение* $\varphi \circ \alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$ *принадлежит семейству* $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$.

***Аксиома* 2.** *Для любых двух отображений* $\alpha, \alpha'\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$, *принадлежащих семейству* $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$, *отображение* $\alpha' \circ \alpha^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *принадлежит группе* $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$.

Наглядно ситуацию, описываемую аксиомой 2, можно изобразить следующей диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^2 \arrow[dd, "\varphi"] \\
\mathfrak{M} \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & \\
 & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

***Определение* 2.** При выполнении аксиом 1 и 2 мы будем множество $\mathfrak{M}$ называть *евклидовой плоскостью*, его элементы — *точками*, отображения, принадлежащие семейству $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$,— *евклидовыми координатными системами* на плоскости $\mathfrak{M}$, и для любой евклидовой координатной системы $\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$ и любой точки $M \in \mathfrak{M}$ числа x, y, составляющие пару $\alpha(M) \in \mathfrak{M}$ — *евклидовыми координатами* точки M в координатной системе α (число x — *абсциссой*, а число y — *ординатой*).

Из сказанного в начале этого пункта непосредственно вытекает, что содержательно рассматриваемая обычная плоскость является в смысле этого определения евклидовой плоскостью.

Замечание 1. Совершенно ясно, как можно аналогичным образом формально определить *евклидово пространство* (достаточно во всем вышесказанном вместо множества $\mathbb{R}^2$ рассматривать множество $\mathbb{R}^3$ троек (x, y, z) вещественных чисел).

Более того, ясно, что мы можем на $n=3$ не останавливаться: совершенно аналогичным образом можно для любого n определить *n-мерное евклидово пространство.*

Докажем теперь непротиворечивость и полноту нашей аксиоматики.

Чтобы доказать непротиворечивость, достаточно указать конкретный пример множества $\mathfrak{M}$ с семейством отображений $\operatorname{Coor}(\mathfrak{M})$, для которого справедливы аксиомы 1 и 2. Примем за $\mathfrak{M}$ множество $\mathbb{R}^2$, а за семейство $\operatorname{Coor}(\mathfrak{M})$ — группу $\operatorname{Ort}(\mathbb{R}^2)$. Тогда аксиомы 1 и 2 будут в точности означать, что семейство преобразований $\operatorname{Ort}(\mathbb{R}^2)$ является группой, и потому будут выполнены. Тем самым непротиворечивость наших аксиом полностью доказана. Вместе с тем доказано, что

множество $\mathbb{R}^2$, рассматриваемое вместе с группой $\operatorname{Ort}(\mathbb{R}^2)$ в качестве семейства евклидовых координатных систем, является евклидовой плоскостью.

Эту плоскость мы будем называть *стандартной* (или *арифметической*) *евклидовой плоскостью.*

Чтобы доказать полноту, мы сначала должны определить, что значит, что две евклидовы плоскости изоморфны.

Определение 3. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ — две евклидовы плоскости. Отображение

$$\mu\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$$

плоскости $\mathfrak{M}$ на плоскость $\mathfrak{M}'$ мы будем называть *изоморфным отображением* (или просто *изоморфизмом*), если

1) оно биективно;

2) для любой евклидовой координатной системы $\alpha'\colon \mathfrak{M}' \to \mathbb{R}^2$ на плоскости $\mathfrak{M}'$ отображение

$$\alpha' \circ \mu\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$$

является евклидовой координатной системой на плоскости $\mathfrak{M}$;

3) для любой евклидовой координатной системы $\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$ на плоскости $\mathfrak{M}$ существует такая (очевидно, единственная) евклидова координатная система $\alpha'\colon \mathfrak{M}' \to \mathbb{R}^2$ на плоскости $\mathfrak{M}'$, что

$$\alpha = \alpha' \circ \mu.$$

Короче можно сказать, что биективное отображение $\mu\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ является изоморфизмом, если оно устанавливает биективное соответствие между евклидовыми координатными системами на плоскостях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$.

Заметим, что условие 1) определения изоморфизма вытекает из условия 2) или 3). Мы его включили в определение только для большей ясности.

Задание. Докажите, что тождественное отображение $1_{\mathfrak{M}}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, а также композиция $\mu' \circ \mu\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}''$ двух изоморфизмов $\mu\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ и $\mu'\colon \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M}''$ являются изоморфизмами.

Две плоскости $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ называются *изоморфными*, если между ними существует хотя бы один изоморфизм. Из только что сделанных замечаний непосредственно вытекает, что отношение изоморфности является отношением эквивалентности, так что совокупность всех евклидовых плоскостей распадается на классы изоморфных плоскостей.

Утверждение о полноте нашей аксиоматики означает, что на самом деле существует только один класс изоморфных плоскостей, т. е., иными словами, что

любые две евклидовы плоскости изоморфны.

Ясно, что для этого достаточно доказать, что

любая плоскость $\mathfrak{M}$ изоморфна стандартной плоскости $\mathbb{R}^2$.

В свою очередь это непосредственно вытекает из того, что *каждая евклидова координатная система $\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$ представляет собой изоморфизм плоскости $\mathfrak{M}$ на плоскость $\mathbb{R}^2$.*

Для доказательства же последнего утверждения достаточно заметить, что условие 2) определения изоморфизма равносильно для отображения $\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$ аксиоме 1, а условие 3) — аксиоме 2.

Тем самым полнота аксиом 1 и 2 полностью доказана.

Заметим, что не только любая евклидова координатная система $\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$ является изоморфизмом, но и наоборот, *каждый изоморфизм*

$$\mu\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$$

является евклидовой координатной системой на плоскости $\mathfrak{M}$.

Действительно, по определению, одной из евклидовых координатных систем на плоскости $\mathbb{R}^2$ является тождественное отображение $1_{\mathbb{R}^2}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Поэтому согласно условию 2) определения изоморфизма отображение $1_{\mathbb{R}^2} \circ \mu = \mu$ является евклидовой координатной системой на плоскости $\mathfrak{M}$.

Замечание 2. Несмотря на то, что любые две евклидовы плоскости изоморфны, отождествлять их не очень удобно, поскольку никакого естественного однозначно определенного изоморфизма между ними установить, вообще говоря, нельзя.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ — две евклидовы плоскости и пусть

$$\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha'\colon \mathfrak{M}' \to \mathbb{R}^2$$

— произвольные евклидовы координатные системы на этих плоскостях. Поскольку отображение, обратное к изоморфизму, является изоморфизмом, и композиция двух изоморфизмов также представляет собой изоморфизм, отображение

$$\mu = \alpha^{-1} \circ \alpha'$$

плоскости $\mathfrak{M}'$ на плоскость $\mathfrak{M}$ является изоморфизмом.

Так как

$$\alpha \circ \mu = \alpha',$$

то для любой точки $M' \in \mathfrak{M}'$ равенство $M = \mu(M')$ равносильно равенству

$$\alpha(M) = \alpha'(M'). \tag{2}$$

Но, по определению, $\alpha(M)$ является парой $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, состоящей из координат точки M в координатной системе α, а $\alpha'(M')$ — парой $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, состоящей из координат точки M' в координатной системе α'. Следовательно, равенство (2) означает, что точки M и M' имеют одни и те же координаты (в координатных системах α и α' соответственно). На этом основании говорят, что изоморфизм μ *действует по равенству координат* в координатных системах α и α'.

Легко видеть, что

любой изоморфизм

$$\mu\colon \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M}$$

действует по равенству координат в некоторых координатных системах α и α', причем одну из этих систем можно задать произвольно.

Действительно, пусть, например, нам задана координатная система

$$\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2.$$

Рассмотрим отображение

$$\alpha' = \alpha \circ \mu\colon \mathfrak{M}' \to \mathbb{R}^2.$$

Будучи композицией изоморфизмов, это отображение представляет собой изоморфизм, т. е. является евклидовой координатной системой на плоскости $\mathfrak{M}'$. Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\mu = \alpha^{-1} \circ \alpha'.$$

Собирая вместе доказанные утверждения, мы получаем следующее предложение, описывающее взаимоотношения между изоморфизмами и координатными системами.

Предложение 1. *Отображение*

$$\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$$

тогда и только тогда является евклидовой координатной системой, когда оно представляет собой изоморфизм.

Отображение

$$\mu\colon \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M}$$

тогда и только тогда является изоморфизмом, когда существуют такие евклидовы координатные системы

$$\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha'\colon \mathfrak{M}' \to \mathbb{R}^2,$$

что μ действует по равенству координат в этих системах:

$$\mu = \alpha^{-1} \circ \alpha'.$$

Особое значение имеют *автоморфизмы* евклидовой плоскости $\mathfrak{M}$, т. е. ее изоморфизмы на себя:

$$\Phi\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}.$$

Автоморфизмами стандартной плоскости $\mathbb{R}^2$ являются ее евклидовы координатные системы

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

и только они (напомним, что, по определению, $\mathrm{Coor}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$). Другими словами,

преобразование плоскости $\mathbb{R}^2$ тогда и только тогда является автоморфизмом, когда оно принадлежит группе $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$.

Автоморфизмы любой евклидовой плоскости $\mathfrak{M}$ составляют, очевидно, группу. Эту группу мы будем обозначать символом $\mathrm{Ort}(\mathfrak{M})$.

Легко видеть, что

для любых двух плоскостей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ группы $\mathrm{Ort}(\mathfrak{M})$ *и* $\mathrm{Ort}(\mathfrak{M}')$ *изоморфны.*

Действительно, выбрав некоторый изоморфизм

$$\mu\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}',$$

мы получим, очевидно, изоморфизм

$$\mathrm{Ort}(\mathfrak{M}) \to \mathrm{Ort}(\mathfrak{M}'),$$

сопоставив произвольному преобразованию $\Phi \in \mathrm{Ort}(\mathfrak{M})$ преобразование

$$\mu \circ \Phi \circ \mu^{-1} \in \mathrm{Ort}(\mathfrak{M}').$$

Об изоморфизме

$$\Phi \mapsto \mu \circ \Phi \circ \mu^{-1}$$

мы будем говорить, что он *индуцирован* изоморфизмом μ.

В частности, любая евклидова координатная система

$$\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$$

индуцирует изоморфизм

$$\Phi \longmapsto \alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1}$$

группы $\mathrm{Ort}(\mathfrak{M})$ на группу $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$. Это означает, что координаты x, y произвольной точки $M \in \mathfrak{M}$ (в координатной системе α) связаны с координатами x', y' преобразованной точки $M' = \Phi(M)$ (в той же координатной системе α) формулой вида (1).

Принято говорить, что формула (1) *выражает* автоморфизм Φ в координатной системе α.

Мы видим, таким образом, что, рассматриваемая как абстрактная группа (т. е. «с точностью до изоморфизма»), группа $\mathrm{Ort}(\mathfrak{M})$ не зависит от выбора плоскости $\mathfrak{M}$.

Значение группы $\mathrm{Ort}(\mathfrak{M})$ определяется тем, что она позволяет обозреть всю совокупность изоморфизмов плоскости $\mathfrak{M}$ на любую другую плоскость $\mathfrak{M}'$. Точнее, это означает следующее.

Пусть нам задан некоторый изоморфизм

$$\mu_0\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'.$$

Тогда для любого автоморфизма $\Phi \in \mathrm{Ort}(\mathfrak{M})$ отображение

$$\mu = \mu_0 \circ \Phi\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$$

также является изоморфизмом плоскости $\mathfrak{M}$ на плоскость $\mathfrak{M}'$. Тем самым мы получаем некоторое отображение

$$\Phi \longmapsto \mu \tag{3}$$

группы $\mathrm{Ort}(\mathfrak{M})$ в множество всех изоморфизмов $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$.

Задание. Докажите, что отображение (3) биективно.

Таким образом, грубо говоря, изоморфизмов $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ существует «столько же», сколько автоморфизмов $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$.

Определение 4. Пусть X и X' — некоторые множества точек евклидовой плоскости $\mathfrak{M}$ («фигуры»). Эти множества называются (*евклидово*) *эквивалентными*, если существует автоморфизм плоскости $\mathfrak{M}$, переводящий одно множество в другое.

Свойство $\mathscr{P}$ множеств плоскости $\mathfrak{M}$ называется (*евклидово*) *инвариантным* (или *геометрическим*), если одновременно с множеством X свойством $\mathscr{P}$ обладает и любое множество X', ему евклидово эквивалентное.

Класс (множество) фигур называется *инвариантно определенным*, если он характеризуется (см. п. 2 § 1 гл. 1) семейством инвариантных свойств.

Числовая функция $d(X)$, заданная на инвариантно определенном классе, называется *инвариантной функцией* (или просто *инвариантом*), если для любого числа d свойство «$d(X) = d$»

фигур X инвариантно, т. е. если для любых евклидово эквивалентных фигур X и X' имеет место равенство

$$d(X) = d(X').$$

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ — две евклидовы плоскости и пусть $\mathscr{P}$ — некоторое инвариантное свойство фигур на плоскости $\mathfrak{M}$. Тогда мы можем определить некоторое (тоже инвариантное) свойство $\mathscr{P}'$ фигур на плоскости $\mathfrak{M}'$. Именно, выбрав произвольный изоморфизм

$$\mu_0\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}',$$

мы условимся, что фигура X' на плоскости $\mathfrak{M}'$ тогда и только тогда обладает свойством $\mathscr{P}'$, когда свойством $\mathscr{P}$ обладает фигура X_0 на плоскости $\mathfrak{M}$, переходящая при изоморфизме μ_0 в фигуру X'.

Это определение нуждается, конечно, в проверке корректности, т. е. в доказательстве того, что при другом выборе изоморфизма μ_0 получается то же самое свойство $\mathscr{P}'$. Но, как мы знаем, любой изоморфизм $\mu\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ имеет вид

$$\mu = \mu_0 \circ \Phi,$$

где Φ — некоторый автоморфизм плоскости $\mathfrak{M}$. Следовательно, фигурой X, переходящей при изоморфизме μ в фигуру X', является фигура, переходящая в фигуру X_0 при автоморфизме Φ:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\mu"'] & & X_0 \arrow[dl, "\mu_0"] \\ & X' & \end{tikzcd}$$

Для завершения доказательства остается заметить, что в силу инвариантности свойства $\mathscr{P}$ фигура X тогда и только тогда обладает этим свойством, когда им обладает фигура X_0.

Задание. Докажите, что свойство $\mathscr{P}'$ инвариантно.

Ясно, что изложенное построение устанавливает естественное биективное соответствие между инвариантными свойствами фигур на различных евклидовых плоскостях. Следовательно, изучение инвариантных свойств мы можем, как и следовало ожидать, производить на любой конкретной евклидовой плоскости. Результаты будут автоматически применимы к любой другой плоскости.

Определение 5. Предметом *евклидовой геометрии* (точнее, евклидовой планиметрии) является изучение евклидово инвариантных свойств фигур на евклидовых плоскостях.

Таким образом, согласно этому определению, «геометрический смысл» имеют только инвариантные свойства (и значит, в частности, инвариантные классы и инвариантные функции). По определению, все евклидово инвариантные свойства евклидово эквивалентных фигур одинаковы. Поэтому можно сказать (ср. п. 2 § 1 гл. 1), что в евклидовой геометрии эквивалентные фигуры рассматриваются как «одинаковые».

Определение 5 является формальным уточнением несколько туманной идеи об евклидовой геометрии как науке, изучающей свойства «абстрактной евклидовой плоскости», конкретными воплощениями которой являются евклидовы плоскости в смысле определения 2. Оно согласуется с содержательным представлением об евклидовой геометрии как науке, изучающей свойства, общие у всех конгруэнтных фигур (переводящихся друг в друга некоторым движением), поскольку, как мы покажем в гл. 7, автоморфизмы евклидовой плоскости содержательно интерпретируются как движения (сопровождаемые, возможно, симметрией).

С описываемой точки зрения аналитическая геометрия может быть охарактеризована как наука, занимающаяся изучением евклидовой геометрии на ее стандартной модели $\mathbb{R}^2$. Переход от произвольной евклидовой плоскости $\mathfrak{M}$ к стандартной плоскости $\mathbb{R}^2$ осуществляется при этом выбором некоторой евклидовой координатной системы

$$\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2.$$

Таким образом, вместо того чтобы изучать инвариантные свойства фигур на плоскости $\mathfrak{M}$, в аналитической геометрии изучают инвариантные свойства соответствующих фигур на плоскости $\mathbb{R}^2$. Можно сказать, что аналитическая геометрия основывается на отождествлении плоскости $\mathfrak{M}$ с плоскостью $\mathbb{R}^2$ посредством координатной системы α.

Само собой разумеется, что при этом нужно быть очень внимательным и рассматривать только инвариантные свойства фигур плоскости $\mathbb{R}^2$, т. е. (см. выше) свойства, перенесение которых на плоскость $\mathfrak{M}$ не зависит от выбора координатной системы α.

Пример 1. Свойство «координаты точки равны» неинвариантно. Например, при автоморфизме

$$x' = x,$$
$$y' = y + 1$$

точка (x, y), для которой $x = y$, переходит в точку (x', y'), для которой $x' \neq y'$. Таким образом, это свойство никакого «геометрического» (не зависящего от выбора координатной системы) смысла не имеет.

Можно показать, что вообще точка (т. е. фигура, состоящая из одной точки) никаких инвариантных свойств не имеет. Это связано с тем, что любую точку можно перевести в любую другую некоторым автоморфизмом (движением).

Пример 2. *Расстоянием* $d = d(A_1, A_2)$ между точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ называется число

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Покажем, что это число инвариантно (т. е. что расстояние d имеет «геометрический смысл»). Для этого мы должны доказать, что вычисленное в любой другой евклидовой координатной системе число d остается тем же самым.

Но, по определению, переход к другой координатной системе описывается формулами вида

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

где C — ортогональная матрица, а a и b — числа. В частности, если матрица C — собственная, т. е. если

$$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

то

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a,$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta + b,$$

и потому

$$x_2' - x_1' = (x_2 - x_1)\cos\theta - (y_2 - y_1)\sin\theta,$$
$$y_2' - y_1' = (x_2 - x_1)\sin\theta + (y_2 - y_1)\cos\theta.$$

Следовательно,

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Аналогично инвариантность числа d доказывается и для случая, когда матрица C несобственная.

Таким образом, *фигура, состоящая из двух точек, обладает инвариантом* d. Можно показать, что любой другой инвариант двух точек имеет вид $f(d)$, где f — некоторая функция. Это связано с тем, что пару точек A_1, A_2 можно автоморфизмом перевести в пару точек A_1', A_2' тогда и только тогда, когда $d(A_1', A_2') = d(A_1, A_2)$.

Замечание 3. Пример 2 иллюстрирует общий метод введения основных геометрических понятий при формально-аксиоматическом построении евклидовой геометрии: берется формула, известная из содержательных рассмотрений, и принимается за определение соответствующего понятия. Корректность обеспечивается содержательным смыслом, но, конечно, должна быть формально проверена. Дальнейшие примеры такого рода введения геометрических понятий мы рассмотрим после того, как аналогичным образом аксиоматизируем аффинную геометрию.

3. Аксиоматика аффинной геометрии

Мы пришли к аксиоматике евклидовой геометрии, дав формальное описание евклидовых координатных систем. Чтобы построить аффинную геометрию, достаточно аналогичным образом описать аффинные координатные системы.

В соответствии со сказанным в п. 2 § 1 о формулах перехода от одной аффинной координатной системы к другой, мы будем основываться на преобразованиях

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

задаваемых формулами вида

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

где a, b — числа, а

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

— произвольная невырожденная матрица, т. е. формулами

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + a_2 y + a, \\ y' &= b_1 x + b_2 y + b, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Определение 1. Множество всех преобразований вида (1) мы будем обозначать символом $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$.

Та же выкладка, что и для группы $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$, показывает, что *множество* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ *является группой преобразований.*

Пусть теперь нам дано некоторое множество $\mathfrak{M}$ вместе с непустым семейством $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$ биективных отображений этого множества на множество $\mathbb{R}^2$ и пусть выполнены следующие две аксиомы:

Аксиома 1. *Для любого отображения* $\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$, *принадлежащего семейству* $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$, *и любого преобразования* $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *принадлежащего группе* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$, *отображение* $\varphi \circ \alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$ *принадлежит семейству* $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$.

Аксиома 2. *Для любых двух отображений* $\alpha, \alpha'\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$, *принадлежащих семейству* $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$, *отображение* $\alpha' \circ \alpha^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *принадлежит группе* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$.

Содержательно аксиома 1 означает, что для любых аффинных координат x, y величины x', y', выражающиеся формулами (1), также являются аффинными координатами, а аксиома 2 означает, что любые две системы аффинных координат x, y и x', y' связаны формулами (1).

Определение 2. При выполнении аксиом 1 и 2 мы будем множество $\mathfrak{M}$ называть *аффинной плоскостью*, его элементы — *точками*, отображения, принадлежащие семейству $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$,— *аффинными координатными системами* на плоскости $\mathfrak{M}$, и для любой аффинной координатной системы $\alpha \in \mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$ и любой точки $M \in \mathfrak{M}$ числа x, y, составляющие пару $\alpha(M) \in \mathbb{R}^2$, — *аффинными координатами* точки M в координатной системе α (число x — *абсциссой*, а число y — *ординатой*).

Замечание 1. Совершенно аналогично определяется *аффинное пространство.*

Мы видим, что аксиомы аффинной геометрии вполне аналогичны аксиомам евклидовой геометрии из п. 2. Поэтому всё сказанное в п. 2 автоматически переносится (с незначительными изменениями) и на рассматриваемую сейчас ситуацию.

Например, для доказательства непротиворечивости наших аксиом достаточно заметить (ср. п. 2), что

множество $\mathbb{R}^2$ *будет аффинной плоскостью в смысле определения* 2, *если за семейство* $\mathrm{Coor}(\mathbb{R}^2)$ *принять группу* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$.

Эту плоскость мы будем называть *стандартной* (или *арифметической*) *аффинной плоскостью.*

Замечание 2. Таким образом, одно и то же множество $\mathbb{R}^2$ мы можем рассматривать и как аффинную и как евклидову плоскости — в зависимости от того, что мы принимаем за семейство $\mathrm{Coor}(\mathbb{R}^2)$. Вообще говоря, во избежание путаницы, целесообразно отразить это в обозначениях (например, можно писать $\mathbb{R}^2_{\text{орт}}$ и $\mathbb{R}^2_{\text{афф}}$).

Изоморфизм аффинных плоскостей определяется дословно так же, как изоморфизм евклидовых плоскостей (см. определение 3 п. 2), после чего мы немедленно получаем (ср. п. 2), что

каждая аффинная координатная система $\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$ *представляет собой изоморфизм плоскости* $\mathfrak{M}$ *на плоскость* $\mathbb{R}^2$.

Доказанное в п. 2 предложение 1 также, конечно, сохраняется (вместе с доказательством) и для аффинных плоскостей. В частности,

отображение $\mu\colon \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M}$ *одной аффинной плоскости на другую тогда и только тогда является изоморфизмом, когда оно действует по равенству координат в двух аффинных координатных системах* α *и* α' (*т. е. когда* $\mu = \alpha^{-1} \circ \alpha'$).

В частности, это верно и для *автоморфизмов* произвольной аффинной плоскости (т. е. для ее изоморфизмов на себя).

Автоморфизмами стандартной плоскости $\mathbb{R}^2$ являются преобразования из группы $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ и только они.

Для любой аффинной плоскости $\mathfrak{M}$ группу всех ее автоморфизмов мы будем обозначать символом $\mathrm{Aff}(\mathfrak{M})$.

Так же, как в п. 2, немедленно доказывается, что

любой изоморфизм $\mu\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ *индуцирует некоторый изоморфизм групп*

$$\mathrm{Aff}(\mathfrak{M}) \to \mathrm{Aff}(\mathfrak{M}').$$

В частности, любая формула вида (1) выражает некоторый автоморфизм Φ (в данной аффинной координатной системе $\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$).

Задание произвольного изоморфизма

$$\mu_0\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$$

двух аффинных плоскостей определяет по формуле

$$\Phi \mapsto \mu_0 \circ \Phi$$

биективно отображение группы $\mathrm{Aff}(\mathfrak{M})$ на множество всех изоморфизмов $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$.

Определение 3. Две фигуры на аффинной плоскости $\mathfrak{M}$ называются *аффинно эквивалентными,* если одну можно получить из другой некоторым автоморфизмом Φ: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$. Свойство фигур на аффинной плоскости называется *аффинно инвариантным,* если одновременно с фигурой X этим свойством обладает и любая фигура X', ей аффинно эквивалентная. Аналогично определяются *аффинно инвариантные* функции (ср. определение 4 п. 2).

Подобно евклидово инвариантным свойствам (см. п. 2) аффинно инвариантные свойства фигур на двух различных аффинных плоскостях находятся в естественном биективном соответствии. Это позволяет формально определить *аффинную геометрию* как науку о таких свойствах. Иначе можно сказать, что аффинная геометрия — это наука, в которой аффинно эквивалентные фигуры считаются «одинаковыми».

Мы не будем здесь детально развивать аффинную геометрию на основе этого определения, поскольку это без труда делается, исходя из ее содержательного представления на основе общего принципа, изложенного в замечании 4 п. 2. Мы ограничимся для примера только некоторыми замечаниями, касающимися понятия вектора.

Направленные отрезки определяются в формальной теории точно так же, как в содержательной, т. е. как пары, состоящие из двух точек рассматриваемой аффинной плоскости $\mathfrak{M}$. Два направленных отрезка $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1^*A_2^*}$ называются *эквиполлентными,* если в некоторой аффинной координатной системе α: $\mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$ имеют место равенства

$$x_2^* - x_1^* = x_2 - x_1,$$
$$y_2^* - y_1^* = y_2 - y_1,$$

где (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — координаты точек A_1 и A_2, а (x_1^*, y_1^*) и (x_2^*, y_2^*) — координаты точек A_1^* и A_2^*.

Конечно, здесь следует проверить корректность этого определения, т. е. независимость его от выбора аффинной координатной системы. Но это делается без труда.

Действительно, пусть

$$x_1' = a_1x_1 + a_2y_1 + a, \quad x_2' = a_1x_2 + a_2y_2 + a,$$
$$y_1' = b_1x_1 + b_2y_1 + b, \quad y_2' = b_1x_2 + b_2y_2 + b,$$
$$x_1^{*\prime} = a_1x_1^* + a_2y_1^* + a, \quad x_2^{*\prime} = a_1x_2^* + a_2y_2^* + a,$$
$$y_1^{*\prime} = b_1x_1^* + b_2y_1^* + b, \quad y_2^{*\prime} = b_1x_2^* + b_2y_2^* + b$$

— координаты точек A_1, A_2, A_1^*, A_2^* в некоторой другой аффинной координатной системе. Тогда

$$\begin{aligned} x_2' - x_1' &= a_1(x_2 - x_1) + a_2(y_2 - y_1), \\ y_2' - y_1' &= b_1(x_2 - x_1) + b_2(y_2 - y_1) \end{aligned} \tag{2}$$

и

$$\begin{aligned} x_2^{*\prime} - x_1^{*\prime} &= a_1(x_2^* - x_1^*) + a_2(y_2^* - y_1^*), \\ y_2^{*\prime} - y_1^{*\prime} &= b_1(x_2^* - x_1^*) + b_2(y_2^* - y_1^*). \end{aligned}$$

Следовательно, если $x_2 - x_1 = x_2^* - x_1^*$ и $y_2 - y_1 = y_2^* - y_1^*$, то $x_2' - x_1' = x_2^{*\prime} - x_1^{*\prime}$ и $y_2' - y_1' = y_2^{*\prime} - y_1^{*\prime}$.

Ясно, что отношение эквиполлентности направленных отрезков является отношением эквивалентности, так что определены классы эквиполлентных направленных отрезков. Эти классы и называются *векторами.*

Допуская вольность, мы будем (как и в содержательной теории) вектор, определенный направленным отрезком $\overrightarrow{A_1A_2}$, обозначать тем же символом $\overrightarrow{A_1A_2}$.

Поскольку, по определению, числа

$$x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1$$

— одни и те же для всех эквиполлентных направленных отрезков $\overrightarrow{A_1A_2}$, они однозначно определяются данным вектором $\overrightarrow{A_1A_2}$. Эти числа называются *координатами* вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ в рассматриваемой аффинной координатной системе.

Ясно, что соответствие

«вектор» $\longmapsto$ «его координаты»

является биективным соответствием между множеством всех векторов на плоскости $\mathfrak{M}$ и множеством $\mathbb{R}^2$ всех пар (x, y).

Согласно полученным выше формулам (2) при переходе к другой аффинной координатной системе координаты векторов преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + a_2 y, \\ y' &= b_1 x + b_2 y, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Подчеркнем, что это преобразование однородно (не содержит свободных членов), тогда как преобразования координат точек неоднородны.

Теперь уже ясно, что следует называть *суммой* векторов, *произведением* вектора на число и т. п. Легко видеть, что вся развитая в гл. 1 теория векторов (в ее аффинной части) полностью при этом сохраняется.

Репером произвольной аффинной координатной системы $\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$ называется тройка точек (O, E_1, E_2), переходящих соответственно в пары (0, 0), (1, 0) и (0, 1). Репер однозначно определен, если задана точка O — *начало* координатной системы и векторы $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ и $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$. Поэтому репером можно называть и тройку $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$.

Радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$ произвольной точки $A(x, y)$ имеет координаты (x, y) и потому представляется в виде

$$\overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2.$$

Следовательно, зная репер аффинной координатной системы, мы можем найти координаты любой точки плоскости, т. е. полностью восстановить эту координатную систему. Иными словами,

аффинная координатная система однозначно определяется своим репером.

Покажем теперь, что

любая тройка $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$, состоящая из произвольной точки O и двух линейно независимых векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, является репером некоторой (однозначно определенной) аффинной координатной системы.

Действительно, поскольку точка O дана, каждой точке A отвечает ее радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$. Поскольку векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ линейно независимы, вектор $\overrightarrow{OA}$ однозначно по ним раскладывается:

$$\overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2. \tag{3}$$

Сопоставив точке A полученную таким образом пару (x, y), мы построим, следовательно, некоторое отображение $\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$. Ясно, что при этом отображении точка O переходит в пару (0, 0), а концы E_1 и E_2 векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, отложенных от точки O, — в пары (1, 0) и (0, 1). Нам остается только доказать, что построенное отображение $\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$ является аффинной координатной системой.

Рассмотрим с этой целью произвольную аффинную координатную систему

$$\alpha_0\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2.$$

Пусть в этой системе векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ имеют координаты (a_1, b_1) и (a_2, b_2). Тогда ввиду равенства (3) вектор $\overrightarrow{OA}$ будет иметь координаты

$$(a_1x + a_2y, \quad b_1x + b_2y).$$

Далее, пусть (a, b) — координаты точки O в координатной системе α_0. Тогда координаты точки A будут иметь вид

$$(a_1x + a_2y + a, \quad b_1x + b_2y + b).$$

Это означает, что если мы введем в рассмотрение отображение

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

определенное формулами

$$x' = a_1 x + a_2 y + a,$$
$$y' = b_1 x + b_2 y + b,$$

то отображение $\varphi \circ \alpha$ будет совпадать с отображением α_0.

Но поскольку векторы e_1 и e_2 линейно независимы, определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, и потому отображение φ принадлежит группе $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, это отображение биективно и обратное к нему отображение φ^{-1} также принадлежит группе $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$. Таким образом,

$$\alpha = \varphi^{-1} \circ \alpha_0,$$

где $\varphi^{-1} \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$. Но согласно аксиоме 1 отображение $\varphi^{-1} \circ \alpha_0$ является аффинной координатной системой. Следовательно, аффинной координатной системой является и отображение α.

Таким образом, мы видим, что и в формально-аксиоматической теории аффинные координатные системы могут быть описаны точно так же, как и в содержательной теории.

Рассмотрим теперь с формально-аксиоматической точки зрения вопрос о соотношении между евклидовой и аффинной геометриями.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная е в к л и д о в а плоскость (чтобы подчеркнуть евклидовость, мы будем эту плоскость иногда обозначать символом $\mathfrak{M}_{\text{евкл}}$). Выбрав некоторую евклидову координатную систему

$$\alpha_0\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2,$$

рассмотрим всевозможные отображения $\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$, имеющие вид

$$\alpha = \varphi \circ \alpha_0, \tag{4}$$

где φ — произвольное преобразование из группы $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$.

Задание. Докажите, что семейство всех преобразований вида (4) удовлетворяет аксиомам 1 и 2 определения аффинной плоскости.

Определение 4. Плоскость $\mathfrak{M}$, снабженную семейством аффинных координатных систем вида (4), мы будем называть аффинной плоскостью, *определенной* евклидовой плоскостью $\mathfrak{M}_{\text{евкл}}$, и будем обозначать ее символом $\mathfrak{M}_{\text{афф}}$.

Упражнение. Докажите корректность определения (4), т. е. тот факт, что семейство $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M}_{\text{афф}})$ аффинных координатных систем вида (4) не зависит от выбора евклидовой координатной системы α_0. У к а з а н и е: воспользуйтесь тем, что группа $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$ является подгруппой группы $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$:

$$\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2) \subset \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2), \tag{5}$$

и, следовательно, среди координатных систем вида (4) содержатся все евклидовы координатные системы на плоскости $\mathfrak{M}_{\text{евкл}}$.

Замечание 3. Обратим внимание на то, что возможен и «обратный» процесс построения по произвольной аффинной плоскости $\mathfrak{M}_{\text{афф}}$ некоторой евклидовой плоскости $\mathfrak{M}_{\text{евкл}}$. Для этого достаточно воспользоваться той же формулой (4), принимая за α_0 некоторую фиксированную аффинную координатную систему, а за φ — произвольное преобразование из группы $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$. Однако получающаяся евклидова плоскость $\mathfrak{M}_{\text{евкл}}$ зависит от выбора координатной системы α_0. Чтобы получить вполне определенную евклидову плоскость, необходимо как-то ограничить выбор системы α_0. Обычно это делается посредством введения в аффинную плоскость некоторой *метрики*. Все эти вопросы подробно разбираются (сразу для любого n) в курсе линейной алгебры. Здесь же для нас достаточно иметь в виду, что одна и та же аффинная плоскость $\mathfrak{M}_{\text{афф}}$ может определяться различными (хотя, конечно, и изоморфными) евклидовыми плоскостями $\mathfrak{M}_{\text{евкл}}$.

Поскольку плоскость $\mathfrak{M}_{\text{афф}}$ однозначно определяется плоскостью $\mathfrak{M}_{\text{евкл}}$, можно (и удобно) несколько сократить терминологию, называя, например, автоморфизмы плоскости $\mathfrak{M}_{\text{афф}}$ *аффинными автоморфизмами* плоскости $\mathfrak{M}_{\text{евкл}} = \mathfrak{M}$ (и в соответствии с этим заменяя обозначение $\mathrm{Aff}(\mathfrak{M}_{\text{афф}})$ обозначением $\mathrm{Aff}(\mathfrak{M})$).

Из включения (5) немедленно вытекает соответствующее включение

$$\mathrm{Ort}(\mathfrak{M}) \subset \mathrm{Aff}(\mathfrak{M})$$

для автоморфизмов плоскости $\mathfrak{M}$, означающее, что

любой евклидов автоморфизм является аффинным автоморфизмом.

Поэтому любое аффинно инвариантное свойство фигур на плоскости $\mathfrak{M}$ (точнее, на плоскости $\mathfrak{M}_{\text{афф}}$) будет и евклидово инвариантным. Другими словами, *любое утверждение аффинной геометрии справедливо и в евклидовой геометрии.* В этом смысле аффинная геометрия является «частью» евклидовой геометрии.

Например, все сказанное выше о векторах в аффинной геометрии (на аффинной плоскости) автоматически справедливо и в евклидовой геометрии (на евклидовой плоскости). Но, конечно, на евклидовой плоскости можно пойти значительно дальше (построить метрическую теорию векторов).

Для этого в первую очередь необходимо определить *скалярное произведение* $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$ двух векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$.

Пусть в некоторой евклидовой координатной системе α вектор $\boldsymbol{a}_1$ имеет координаты (x_1, y_1), а вектор $\boldsymbol{a}_2$ — координаты (x_2, y_2). Тогда мы, по определению, положим

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

В любой другой евклидовой координатной системе α' координаты x', y' векторов связаны с их координатами x, y в системе α формулами вида (2), где теперь

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

— произвольная *ортогональная* матрица, т. е. такая (см. п. 6 § 5 гл. 1), что

$$a_1^2 + b_1^2 = 1, \quad a_1a_2 + b_1b_2 = 0, \quad a_2^2 + b_2^2 = 1.$$

Следовательно, вычисляя скалярное произведение в координатной системе α', мы получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = x_1'x_2' + y_1'y_2' = (a_1x_1 + a_2y_1)(a_1x_2 + a_2y_2) + \\ + (b_1x_1 + b_2y_1)(b_1x_2 + b_2y_2) = (a_1^2 + b_1^2)x_1x_2 + \\ + (a_1a_2 + b_1b_2)(x_1y_2 + x_2y_1) + (a_2^2 + b_2^2)y_1y_2 = x_1x_2 + y_1y_2, \end{aligned}$$

т. е. тот же результат, что и в координатной системе α.

Это означает, что наше определение скалярного произведения корректно.

Определив скалярное произведение, мы можем теперь определить *длину* $|\boldsymbol{a}|$ вектора $\boldsymbol{a}$ и *угол* $|\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}|$ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ известными формулами

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}, \quad (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \arccos\frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}. \qquad (6)$$

Задание. Докажите, что $\boldsymbol{a}^2 \geqslant 0$ и $\boldsymbol{ab} \leqslant |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$ (неравенство Коши — Буняковского), т. е. что формулы (6) действительно определяют некоторые числа.

Обратим внимание на то, что длина вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ совпадает с расстоянием $d(A_1, A_2)$ между точками A_1 и A_2, как оно было определено в примере 2 п. 2.

Тот факт, что аффинная геометрия является частью евклидовой геометрии, позволяет доказывать теоремы аффинной геометрии «евклидовыми методами», т. е. с использованием метрических понятий. Формально это означает, что от аффинной плоскости $\mathfrak{M}_{\text{афф}}$ мы переходим к одной из евклидовых плоскостей $\mathfrak{M}_{\text{евкл}}$, определяющих плоскость $\mathfrak{M}_{\text{афф}}$. Конечно, мы должны при этом проследить, чтобы окончательный результат был аффинно инвариантен (не зависел от выбора евклидовой плоскости $\mathfrak{M}_{\text{евкл}}$).

Например, данное в начале п. 1 § 6 определение бивектора использует метрические понятия (площадь). Чтобы установить его аффинный характер, мы были вынуждены доказать его равносильность с другим, уже чисто аффинным определением (основывающимся на понятии элементарного преобразования).

4. Аффинная геометрия над полем комплексных чисел

При обсуждении в п. 2 § 2 теоремы единственности для алгебраических линий мы столкнулись с желательностью введения точек с комплексными координатами. Как мы увидим в гл. 6, уже в теории линий второго порядка такие точки оказываются совершенно необходимыми.

Конечно, введение в рассмотрение подобного рода «точек» означает окончательный переход к алгебре, лишь излагаемой в геометрических терминах. Все то же самое можно сделать, вообще не пользуясь геометрической терминологией. Однако опыт показывает, что даже чисто алгебраические вещи, изложенные на геометрическом языке, приобретают особую четкость и выразительность, и их «геометризация» оказывается не просто игрой в определения, а мощным орудием исследования, позволяющим привлечь к изучению алгебраических объектов геометрические методы и геометрическую интуицию.

Как же можно ввести «комплексные точки»? Если на плоскости выбрана аффинная система координат, то ее (обычные) точки находятся во взаимно однозначном соответствии с парами (x, y) вещественных чисел и могут быть с такими парами отождествлены. Поэтому мы можем ввести комплексные точки просто как пары (x, y) произвольных комплексных чисел. Так во многих учебниках аналитической геометрии и делается.

Однако эта конструкция комплексной плоскости зависит от выбора в обычной плоскости некоторой аффинной координатной системы, так что, строго говоря, мы получаем не одну комплексную плоскость, а столько, сколько существует различных аффинных координатных систем. Хотя, пользуясь формулами преобразования аффинных координат, эти комплексные плоскости можно друг с другом отождествить, все же значительно удобнее и изящнее дать определение комплексной плоскости, не зависящее от выбора в обычной плоскости аффинной системы координат.

С этой целью мы заметим, что в аксиомах аффинной геометрии, рассмотренных в предыдущем пункте, специфика поля $\mathbb{R}$ никак по существу не используется. Поэтому их можно переформулировать, заменяя всюду поле $\mathbb{R}$ полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. В результате мы и получим аксиомы аффинной геометрии на комплексной плоскости.

Более того, эти аксиомы можно формулировать и для случая, когда поле $\mathbb{R}$ заменено произвольным полем $\mathbb{K}$. Тогда мы получим *аффинную геометрию плоскости над полем* $\mathbb{K}$.

Замечание 1. Очень любопытные «геометрии» получаются, когда поле $\mathbb{K}$ конечно. Например, для простейшего поля, состоящего из двух элементов, мы получаем геометрию, в которой имеется только четыре (!) точки. Мы такими геометриями здесь заниматься не будем (хотя они сами по себе очень интересны и в последнее время получили совершенно неожиданные применения, например, в теории кодирования).

Поскольку аффинную геометрию, как выясняется, можно строить над произвольным полем $\mathbb{K}$, мы пока его специализировать не будем (только потом, когда мы перейдем к более глубоким вопросам, где специфика поля будет играть роль, мы будем считать, что им является интересующее нас сейчас в первую очередь поле $\mathbb{C}$).

Итак, мы будем считать данным некоторое (пока произвольное) поле $\mathbb{K}$. Элементы этого поля мы будем называть *числами*.

Определение 1. Пусть $\mathbb{K}^2$ — множество всех пар (x, y) чисел поля $\mathbb{K}$; обозначим через $\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^2)$ совокупность всех преобразований

$$\varphi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2,$$

задаваемых формулами вида

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + a, \\ y' &= b_1x + b_2y + b, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Ясно, что

множество $\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^2)$ *является группой преобразований.*

Определение 2. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное множество, для которого задано некоторое семейство $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$ его биективных отображений

$$\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{K}^2$$

на множество $\mathbb{K}^2$. Мы будем называть $\mathfrak{M}$ *аффинной плоскостью над полем* $\mathbb{K}$, а отображение $\alpha \in \mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$ — *аффинными координатными системами* на этой плоскости, если (ср. п. 3) выполнены следующие две аксиомы:

Аксиома 1. *Если* $\alpha \in \mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$ *и* $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^2)$, *то*

$$\varphi \circ \alpha \in \mathrm{Coor}(\mathfrak{M}).$$

Аксиома 2. *Если* α, $\alpha' \in \mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$, *то*

$$\alpha' \circ \alpha^{-1} \in \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^2).$$

При $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ мы получаем уже известное нам определение обычной аффинной плоскости. Плоскость над полем $\mathbb{R}$ называется *вещественной плоскостью.* Аналогично, плоскость над полем $\mathbb{C}$ (случай, для нас сейчас наиболее интересный) называется *комплексной плоскостью.*

Ясно, что, положив $\mathrm{Coor}(\mathbb{K}^2) = \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^2)$, мы определим $\mathbb{K}^2$ как аффинную плоскость. Эта плоскость называется *стандартной* (или *арифметической*) *плоскостью над полем* $\mathbb{K}$.

Следовательно, аксиомы 1 и 2 непротиворечивы (поскольку непротиворечивы аксиомы, определяющие поле $\mathbb{K}$).

Определение 3. Биективное отображение

$$\mu\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$$

одной плоскости над полем $\mathbb{K}$ на другую (или ту же самую) плоскость называется *изоморфизмом*, если отображение $\alpha'\colon \mathfrak{M}' \to \mathbb{K}^2$ тогда и только тогда является координатной системой на плоскости $\mathfrak{M}'$, когда отображение $\alpha' \circ \mu$ является координатной системой на плоскости $\mathfrak{M}$ (ср. определение 3 п. 2).

Ясно, что

отображение $\mu\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{K}^2$ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда оно является аффинной координатной системой.

Кроме того,

отображение $\mu\colon \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M}$ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда оно действует по равенству координат в двух аффинных координатных системах α и α', т. е. когда

$$\mu = \alpha^{-1} \circ \alpha'.$$

Как и в вещественном случае, группу всех автоморфизмов $\Phi\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ аффинной плоскости $\mathfrak{M}$ мы будем обозначать символом $\mathrm{Aff}(\mathfrak{M})$.

Ясно (ср. пп. 2 и 3), что

любой изоморфизм $\mu\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ индуцирует некоторый изоморфизм групп

$$\mathrm{Aff}(\mathfrak{M}) \to \mathrm{Aff}(\mathfrak{M}').$$

Понятие *аффинно инвариантного свойства* фигур на плоскостях над полем $\mathbb{K}$ вводится точно так же, как и в случае поля $\mathbb{R}$. Аффинная геометрия над полем $\mathbb{K}$ является, по определению, наукой о таких свойствах.

В этой геометрии понятия «направленного отрезка», «вектора» и т. п. вводятся дословно так же, как в геометрии над полем $\mathbb{R}$ (см. п. 3). В частности, все сказанное в п. 3 о связи между аффинными координатными системами и реперами полностью остается в силе. Поэтому еще раз повторять это мы здесь не будем.

Задание. Проверьте, что вся аффинная теория векторов сохраняется и над любым полем $\mathbb{K}$.

Замечание 2 (очень важное!). Поскольку в произвольном поле нет понятий «положительное — отрицательное», все связанное с понятием ориентации не переносится на случай произвольного поля $\mathbb{K}$, и в частности, на случай поля $\mathbb{C}$. Например, не переносится понятие полуплоскости, так что говорить, скажем, о «полуплоскости комплексной плоскости» бессмысленно.

Понятие бивектора, тем не менее, имеет смысл над любым полем $\mathbb{K}$, поскольку сохраняется понятие элементарного преобразования.

Замечание 3. Поскольку понятие ортогональной матрицы (как матрицы, удовлетворяющей соотношению $C'C = E$) имеет смысл над любым полем $\mathbb{K}$, мы можем ввести группу $\operatorname{Ort}(\mathbb{K}^2)$ и уже известным нам способом определить *евклидову геометрию над полем* $\mathbb{K}$. Однако, в отличие от аффинной геометрии, эта геометрия даже формально резко отличается от евклидовой геометрии над полем $\mathbb{R}$. Например, в ней нельзя, вообще говоря, ввести понятие длины отрезка (поскольку в поле могут не существовать квадратные корни), не говоря уже об угле между отрезками. При $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ длину и угол ввести, конечно, можно, но, например, длина будет комплексным числом и может быть равна нулю даже тогда, когда отрезок невырожден.

Все сказанное выше можно, конечно, повторить (с незначительными, само собой разумеющимися изменениями) и для любого n. В частности, при $n = 1$ и $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ мы получаем понятие *комплексной прямой*. На такой прямой имеется одна комплексная координата z и переход от одной такой координаты к другой описывается формулой вида

$$z' = az + b,$$

где a и b — произвольные комплексные числа, причем $a \neq 0$.

Поскольку

$$z = x + iy,$$

точки комплексной прямой задаются двумя вещественными числами x и y, так что *геометрически комплексная прямая представляет собой плоскость.*

Однако отождествлять комплексную прямую с вещественной аффинной плоскостью нельзя, поскольку формулы преобразования координат в них различны. Действительно, положив

$$a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2,$$

мы можем формулу (1) переписать в координатах x и y в следующем виде:

$$\begin{aligned} x' &= a_1x - a_2y + b_1, \\ y' &= a_2x + a_1y + b_2, \end{aligned} \tag{2}$$

— ясно, что не любое преобразование из группы $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$ можно так записать.

Иначе говоря, группа $\operatorname{Aff}(\mathbb{C}^1)$ преобразований (1), записанных в виде (2), является лишь подгруппой группы $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$.

Это показывает, что геометрия комплексной прямой (рассматриваемая как геометрия плоскости) богаче аффинной геометрии плоскости.

Ниже, в п. 2 § 4 гл. 7, мы идентифицируем эту геометрию с одной из плоских геометрий, читателю по существу известных.

5. Вещественно-комплексная геометрия

В построенной в предыдущем пункте (при $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) аффинной геометрии нет места понятию «вещественная точка», поскольку точка, имеющая вещественные координаты в одной аффинной координатной системе, вполне может иметь невещественные координаты в другой. Это означает, что в нашем стремлении ввести комплексные точки мы зашли слишком далеко и потеряли по дороге контакт с обычной вещественной плоскостью. Хотелось бы остановиться «на полпути» и устроить комплексную плоскость так, чтобы она содержала обычную вещественную комплексную плоскость в качестве подмножества. Тогда мы могли бы работать, пока это возможно, в этой вещественной плоскости (сохраняя, тем самым, геометрическую наглядность) и выходить в объемлющую комплексную плоскость только тогда, когда это сделается совершенно необходимым.

Аксиоматическое построение такой «вещественно-комплексной» плоскости можно осуществить, заметив, что любое преобразование $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ из группы $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$ однозначно определяет некоторое преобразование $\hat{\varphi}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ из группы $\operatorname{Aff}(\mathbb{C}^2)$, а именно, преобразование, задаваемое теми же формулами

$$x' = a_1x + a_2y + a,$$
$$y' = b_1x + b_2y + b.$$

(Таким образом, различие между преобразованиями φ и $\hat{\varphi}$ состоит лишь в том, что в случае преобразования φ величины x и y могут принимать лишь вещественные значения, тогда как для преобразования $\hat{\varphi}$ они могут иметь любые комплексные значения.)

Поскольку соответствие $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ строится без какого-либо произвола (является «естественным» соответствием), мы можем преобразования φ и $\hat{\varphi}$ отождествлять или хотя бы обозначать одним и тем же символом. Ни к каким неудобствам это привести не может

Отождествив преобразования φ и $\hat{\varphi}$, мы можем, следовательно, считать, что *группа* $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$ *вложена в группу* $\operatorname{Aff}(\mathbb{C}^2)$. По определению, преобразование $\varphi \in \operatorname{Aff}(\mathbb{C}^2)$ тогда и только тогда принадлежит $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$, когда все коэффициенты этого преобразования являются вещественными числами.

Ясно, что если преобразование $\varphi \in \operatorname{Aff}(\mathbb{C}^2)$ принадлежит подмножеству $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$, то преобразование φ^{-1} также принадлежит этому подмножеству, и если $\varphi_1 \in \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$ и $\varphi_2 \in \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$, то $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$. По определению, это означает, что

подмножество $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$ *группы* $\operatorname{Aff}(\mathbb{C}^2)$ *является ее подгруппой.*

Пусть теперь нам дано некоторое множество $\mathfrak{M}$ вместе с непустым семейством $\operatorname{Coor}(\mathfrak{M})$ его биективных отображений на множество $\mathbb{C}^2$ и пусть выполнены следующие две аксиомы:

Аксиома 1. *Для любого отображения* $\alpha\colon \mathfrak{M}\to\mathbb{C}^2$, *принадлежащего семейству* $\operatorname{Coor}(\mathfrak{M})$, *и любого преобразования* $\varphi\colon \mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$, *принадлежащего подгруппе* $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$ *группы* $\operatorname{Aff}(\mathbb{C}^2)$, *отображение* $\varphi\circ\alpha$ *принадлежит семейству* $\operatorname{Coor}(\mathfrak{M})$.

Аксиома 2. *Для любых двух отображений* $\alpha, \alpha'\colon \mathfrak{M}\to\mathbb{C}^2$, *принадлежащих семейству* $\operatorname{Coor}(\mathfrak{M})$, *отображение* $\alpha'\circ\alpha^{-1}\colon \mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ *принадлежит подгруппе* $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$.

Эти аксиомы полностью аналогичны аксиомам 1 и 2 для комплексной плоскости и отличаются от них только тем, что преобразования φ предполагаются теперь принадлежащими подгруппе $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$, т. е. имеющими вещественные коэффициенты.

Определение 1. При выполнении аксиом 1 и 2 мы будем множество $\mathfrak{M}$ называть (*аффинной*) *вещественно-комплексной плоскостью*, его элементы — *точками*, отображения, принадлежащие семейству $\operatorname{Coor}(\mathfrak{M})$, — *аффинными координатными системами*, и для любой аффинной координатной системы $\alpha\colon \mathfrak{M}\to\mathbb{C}^2$ и любой точки $M\in\mathfrak{M}$ числа x, y, составляющие пару $\alpha(M)\in\mathbb{C}^2$, — *координатами* точки M в координатной системе α.

Таким образом, вещественно-комплексная плоскость содержит точки с произвольными комплексными координатами, но преобразования координат в ней допускаются только с вещественными коэффициентами.

Ясно, что в такой плоскости уже имеет смысл говорить о *вещественных точках*, поскольку при любом преобразовании координат вещественные координаты переходят в вещественные.

Непротиворечивость и полнота аксиом 1 и 2 доказываются по уже известному нам образцу: положив $\operatorname{Coor}(\mathbb{C}^2) = \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$, мы превращаем множество $\mathbb{C}^2$ в вещественно-комплексную плоскость (называемую *стандартной* или *арифметической вещественно-комплексной плоскостью*), и любая вещественно-комплексная плоскость $\mathfrak{M}$ изоморфна плоскости $\mathbb{C}^2$ (причем изоморфизмами $\mathfrak{M}\to\mathbb{C}^2$ являются координатные системы и только они).

Задание. Сформулируйте определение изоморфизма двух вещественно-комплексных плоскостей.

Замечание 1. Обратим внимание на то, что одно и то же множество $\mathbb{C}^2$ является областью действия различных геометрий: вещественно-комплексной и чисто комплексной. Все зависит от того, какие отображения мы считаем координатными системами.

Пусть $\mathfrak{M}^{\text{вещ}}$ — совокупность всех вещественных точек вещественно-комплексной плоскости $\mathfrak{M}$. По определению, каждая координатная система $\alpha\colon \mathfrak{M}\to\mathbb{C}^2$ отображает множество $\mathfrak{M}^{\text{вещ}}$ в подмножество $\mathbb{R}^2$ множества $\mathbb{C}^2$, состоящее из пар (x, y) вещественных чисел. Поэтому, если мы будем ее рассматривать только на этом множестве, она будет некоторым отображением (очевидно, биективным) множества $\mathfrak{M}^{\text{вещ}}$ на множество $\mathbb{R}^2$. Очевидным образом проверяется, что полученное семейство $\operatorname{Coor}(\mathfrak{M}^{\text{вещ}})$ биективных отображений $\mathfrak{M}^{\text{вещ}} \to \mathbb{R}^2$ удовлетворяет аксиомам 1 и 2 определения плоскости над полем $\mathbb{R}$. Тем самым доказано, что

совокупность $\mathfrak{M}^{\text{вещ}}$ всех вещественных точек вещественно-комплексной плоскости $\mathfrak{M}$ естественным образом определяется как вещественная плоскость.

С другой стороны, пользуясь тем, что $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2) \subset \operatorname{Aff}(\mathbb{C}^2)$, мы можем произвольной вещественно-комплексной плоскости $\mathfrak{M}$ сопоставить комплексную плоскость $\mathfrak{M}^{\text{компл}}$, точками которой являются точки плоскости $\mathfrak{M}$ (т. е. которая как множество совпадает с $\mathfrak{M}$), а семейство $\operatorname{Coor}(\mathfrak{M}^{\text{компл}})$ аффинных координатных систем которой состоит из всевозможных отображений $\mathfrak{M} \to \mathbb{C}^2$, имеющих вид $\varphi \circ \alpha$, где $\alpha \in \operatorname{Coor}(\mathfrak{M})$ и $\varphi \in \operatorname{Aff}(\mathbb{C}^2)$. Тот факт, что $\mathfrak{M}^{\text{компл}}$ действительно является комплексной плоскостью, т. е. что семейство $\operatorname{Coor}(\mathfrak{M}^{\text{компл}})$ удовлетворяет аксиомам 1 и 2 из п. 4 (при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), проверяется автоматически.

Таким образом,

любую вещественно-комплексную плоскость $\mathfrak{M}$ мы можем превратить в комплексную плоскость $\mathfrak{M}^{\text{компл}}$, приняв за ее аффинные координатные системы всевозможные отображения вида $\varphi \circ \alpha$, где $\alpha \in \operatorname{Coor}(\mathfrak{M})$ и $\varphi \in \operatorname{Aff}(\mathbb{C}^2)$.

Замечание 2. Переход от плоскости $\mathfrak{M}$ к плоскости $\mathfrak{M}^{\text{компл}}$ вполне аналогичен описанному в п. 3 переходу от евклидовой плоскости $\mathfrak{M}$ к аффинной плоскости $\mathfrak{M}_{\text{афф}}$, обязанному своей возможностью тому, что группа $\operatorname{Ort}(\mathbb{R}^2)$ является подгруппой группы $\operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$.

Поскольку вещественно-комплексная плоскость получается из комплексной плоскости сужением семейства допустимых аффинных координатных систем, любое понятие, имеющее смысл в комплексной плоскости («вектор», «репер» и т. п.), будет иметь смысл и в вещественно-комплексной плоскости. При этом каждое утверждение, верное в комплексной плоскости, будет верно и в вещественно-комплексной плоскости.

Однако в вещественно-комплексной плоскости могут иметь смысл и понятия, бессмысленные в комплексной плоскости. Например, в вещественно-комплексной плоскости $\mathfrak{M}$ можно говорить о *вещественных векторах*, т. е. о векторах с вещественными координатами. Такие векторы естественным образом отождествляются с векторами на вещественной плоскости $\mathfrak{M}^{\text{вещ}}$.

Замечание 3. Строго говоря, векторы на вещественной плоскости и вещественные векторы представляют собой различные математические объекты: первые являются классами эквиполлентных направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ с вещественными концевыми точками A и B, тогда как вторые являются классами эквиполлентных направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$, обладающих тем свойством, что координаты точек A и B отличаются на вещественные числа. Тем не менее, поскольку эти классы находятся в естественном биективном соответствии, их можно безболезненно отождествлять.

Аналогично, для любой точки (вектора) на вещественно-комплексной плоскости можно говорить о *комплексно-сопряженной точке* (*векторе*). Точка (вектор) тогда и только тогда вещественна, когда она (он) совпадает с комплексно-сопряженной точкой.

Специфика вещественно-комплексной плоскости отражается также и в том, что для нее не любая тройка, состоящая из некоторой точки O и двух линейно независимых векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, является репером аффинной координатной системы (хотя по-прежнему любая аффинная координатная система однозначно определяется своим репером). Действительно, ясно, что для этого необходимо, чтобы точка O и векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ были вещественны. Верно и обратное, т. е.

любая тройка $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$, состоящая из вещественной точки O и двух вещественных линейно независимых векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, является репером некоторой (однозначно определенной) аффинной координатной системы на вещественно-комплексной плоскости.

Доказательство по существу дословно совпадает с доказательством соответствующего утверждения из п. 3 и потому мы его опустим.

Поскольку мы не владеем формальным определением понятия линии (см. п. 4 § 2), определить, что такое линии на плоскости над произвольным полем $\mathbb{K}$, мы не можем. Однако понятие *алгебраической линии* (вполне достаточное для наших целей) имеет, очевидно, смысл над любым полем (поскольку понятие многочлена определено над любым полем и при линейной замене неизвестных многочлен переходит в многочлен). При этом понятие *порядка* алгебраической линии встречает те же трудности, что и в случае поля $\mathbb{R}$ (см. п. 2 § 2), усугубляющиеся для полей конечной характеристики еще и тем, что над таким полем многочлен может быть тождественно равен нулю даже тогда, когда его коэффициенты отличны от нуля.

Над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел по крайней мере часть из этих трудностей исчезает (см. п. 2 § 2). Это и является основной причиной, почему мы ввели в рассмотрение комплексные плоскости.

Определение 2. Линия (алгебраическая) на вещественно-комплексной плоскости $\mathfrak{M}$ называется *вещественной*, если в некоторой аффинной координатной системе она выражается уравнением с вещественными коэффициентами.

Ясно, что это определение корректно (линия, имеющая уравнение с вещественными коэффициентами в одной аффинной координатной системе, будет иметь уравнение с вещественными коэффициентами и в любой другой аффинной координатной системе).

Каждая такая линия Γ определяет некоторую линию γ (того же порядка) на вещественной плоскости $\mathfrak{M}^{\text{вещ}}$.

Подчеркнем, что как множества точек *линии Γ и γ различны*: линия γ является пересечением линии Γ с вещественной плоскостью $\mathfrak{M}^{\text{вещ}}$, так что в общепринятых теоретико-множественных обозначениях:

$$\gamma = \Gamma \cap \mathfrak{M}^{\text{вещ}}.$$

Тем не менее, по традиции принято называть точки линии Γ, не принадлежащие линии γ, *мнимыми точками линии* γ.

Из того, что поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел *алгебраически замкнуто* (любой многочлен положительной степени от одной переменной имеет в нем корень), непосредственно вытекает, что на вещественно-комплексной плоскости (так же, как и на комплексной плоскости) любая алгебраическая линия имеет точки (не является пустым множеством). Конечно, ее пересечение γ с вещественной плоскостью тем не менее может быть пустым (в этом случае она называется *нулевой линией*).

Подчеркнем, что хотя линии на вещественно-комплексной (и комплексной) плоскости определяются формально так же, как линии (алгебраические) на вещественной плоскости, с наглядно геометрической точки зрения они глубоко различны. Действительно, положение точки на линии в вещественной плоскости определяется, вообще говоря, значением одного вещественного параметра, и в этом смысле эти линии *одномерны*, тогда как положение точки на линии в комплексной (или вещественно-комплексной) плоскости определяется значением одного комплексного параметра, т. е. значениями двух вещественных параметров (действительной и мнимой частью комплексного параметра), так что эти линии *двумерны*. Иными словами, линии в комплексной (или вещественно-комплексной) плоскости представляют собой с наглядной точки зрения поверхности.

Сама комплексная (или вещественно-комплексная) плоскость описывается четырьмя вещественными параметрами и потому является четырехмерным образованием, наглядно геометрически не описываемым.

Мы видим, в частности, что основную массу точек каждой линии на вещественно-комплексной плоскости составляют мнимые точки (если представлять себе эту линию как поверхность, то ее вещественные точки будут изображаться на этой поверхности точками некоторой линии).

Очень важно иметь также в виду, что алгебраические линии на комплексной плоскости являются весьма специальным частным случаем двумерных образований, которые можно на этой плоскости рассматривать. Например, вещественная плоскость $\mathfrak{M}^{\text{вещ}}$ (также являющаяся двумерной поверхностью) алгебраической линией заведомо не является, т. е. условие вещественности координат x и y нельзя записать в виде равенства $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — некоторый многочлен (этот факт мы докажем ниже, в качестве простого следствия некоторых общих теорем; см. п. 2 § 1 гл. 3).

Так как

$$\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2) \subset \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) \subset \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2),$$

то

группа $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$ *является подгруппой группы* $\mathrm{Aff}(\mathbb{C}^2)$.

Это позволяет нам повторить определение вещественно-комплексной плоскости с заменой группы $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ группой $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$. В результате мы получим определение *евклидовой вещественно-комплексной плоскости.*

Так же, как и выше, показывается, что

множество $\mathbb{C}^2$, *рассматриваемое вместе с семейством преобразований* $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$ (*считаемых теперь преобразованиями* $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$), *является евклидовой вещественно-комплексной плоскостью,*

и что

любая евклидова вещественно-комплексная плоскость изоморфна стандартной евклидовой вещественно-комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$.

Следовательно, аксиомы евклидовой вещественно-комплексной геометрии непротиворечивы и полны.

Ясно, что

вещественная плоскость $\mathfrak{M}^{\text{вещ}}$ *евклидовой вещественно-комплексной плоскости* $\mathfrak{M}$ *естественным образом определяется как евклидова плоскость в смысле* п. 2.

Это означает, что для вещественных точек евклидовой вещественно-комплексной плоскости сохраняется вся обычная евклидова геометрия.

Обратим еще раз внимание на тот замечательный факт, что разнообразные геометрии мы строили в этом параграфе по существу одним и тем же способом. Возможности этого способа отнюдь не исчерпываются построенными геометриями. Мы к этому вопросу еще вернемся в § 4 гл. 7.

Дополнение. Аксиоматика Гильберта

1. Формулировка аксиом

Аксиоматика Гильберта была первой формальной аксиоматикой геометрии, получившей широкое распространение. Мы приведем эту аксиоматику в чуть-чуть модифицированном виде.

В аксиоматике Гильберта имеется три рода основных объектов:

«точки», «прямые», «плоскости»,

и три основные отношения:

«принадлежать», «между», «конгруэнтность».

Отношение «принадлежать» связывает точки с прямыми и плоскостями: «точка принадлежит прямой», «точка принадлежит плоскости». Таким образом, собственно говоря, имеется два отношения принадлежности: для точек и прямых и для точек и плоскостей. Вместо термина «принадлежит» употребляются также (исключительно для упрощения формулировок) такие термины, как «лежит на», «проходит через», «инцидентны» и т. п. Например, высказывания «точка A принадлежит прямой α», «прямая α проходит через точку A», «прямая α инцидентна точке A», «точка A инцидентна прямой α» означают, по определению, одно и то же. Вместо «точки A и B принадлежат прямой α» можно говорить «прямая α соединяет точки A и B», а вместо «точка A принадлежит прямым α и β» — «прямые α и β пересекаются в точке A» и т. д.

Вводится также неосновное отношение «прямая α принадлежит плоскости Π», по определению, означающее, что любая точка, принадлежащая прямой α, принадлежит также и плоскости Π.

Отношение «между» является отношением, связывающим три (различные) точки A, B, C, принадлежащие одной прямой. Если точки A, B, C связаны этим отношением, то говорят, что «точка B лежит между точками A и C».

Отношение «конгруэнтность» связывает некоторые неосновные объекты, называемые «отрезками» и «углами». Эти объекты мы определим ниже. Таким образом, на самом деле имеется два отношения конгруэнтности: одно — связывающее отрезки, а другое — углы.

Аксиомы Гильберта довольно сложны и их неудобно формулировать непосредственно для основных объектов и отношений (хотя конечно, это возможно). Целесообразнее вводить эти аксиомы постепенно (группами), перемежая их теоремами и определениями, необходимыми для формулировки следующих аксиом. Принято разбивать аксиомы Гильберта на пять групп.

Первая группа аксиом

(аксиомы принадлежности)

I_1. *Для любых двух точек A и B существует прямая, проходящая через эти точки.*

I_2. *Если точки A и B различны, то проходящая через них прямая единственна.*

I_3. *На каждой прямой существуют по крайней мере две точки.*

I_4. *Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

I_5. *Для любых трех точек A, B, C существует проходящая через эти точки плоскость.*

I_6. *Если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то проходящая через них плоскость единственна.*

I_7. *На каждой плоскости существует по крайней мере одна точка.*

I_8. *Если две различные точки A и B прямой α принадлежат плоскости Π, то прямая α принадлежит плоскости Π.*

I_9. *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют по крайней мере еще одну общую точку.*

I_{10}. *Существует по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.*

С помощью этих аксиом могут быть уже доказаны некоторые теоремы. Например, можно доказать, что

1) *две (различные) прямые имеют не более одной общей точки*;

2) *две (различные) плоскости либо не имеют общих точек, либо имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей*;

3) *плоскость и не лежащая на ней прямая имеют не более одной общей точки*;

4) *через прямую и не лежащую на ней точку проходит одна и только одна плоскость*;

5) *через две пересекающиеся (но не совпадающие) прямые проходит одна и только одна плоскость*;

6) *каждая плоскость содержит по крайней мере три различные точки.*

Докажем, для примера, утверждение 6).

По аксиоме I_7 каждая плоскость П содержит по крайней мере одну точку A. По аксиоме I_{10} существует точка B, не принадлежащая плоскости П. По аксиомам I_1 и I_2 существует единственная прямая AB, проходящая через точки A и B. По аксиоме I_4 существует точка C, не принадлежащая прямой AB. По аксиомам I_5 и I_6 существует единственная плоскость ABC, проходящая через точки A, B, C. Плоскость ABC и данная плоскость П имеют общую точку A. Поэтому по аксиоме I_9 они имеют еще одну общую точку D. Точки A, B, D не принадлежат одной прямой (ибо в противном случае точка B принадлежала бы в силу аксиомы I_8 плоскости П) и потому через них проходит единственная плоскость ABD (аксиомы I_5 и I_6). По аксиоме I_{10} существует точка E, не принадлежащая плоскости ABD. Точки A, B, E не принадлежат одной прямой и потому содержатся в единственной плоскости ABE (аксиомы I_5 и I_6), отличной от плоскости ABD. Плоскости ABE и П имеют общую точку A и потому (аксиома I_9) они имеют еще одну общую точку F (не принадлежащую прямой AB). Так как точки D и F не принадлежат прямой AB, то (утверждение 2)) они не являются общими точками плоскостей ABD и ABF и, следовательно, различны. Таким образом, плоскость П содержит три различные точки A, D, F.

Задание. Докажите утверждения 1)—5).

Вторая группа аксиом

(аксиомы порядка)

II_1. *Каждая точка, лежащая между точками A и C, лежит также между точками C и A.*

II_2. *Для любых (различных) точек A и B на прямой AB существует такая точка C, что точка B лежит между точками A и C.*

II_3. *Среди любых трех точек произвольной прямой не более одной точки лежит между двумя другими.*

Эти аксиомы называются линейными аксиомами порядка. Кроме них группа II содержит еще так называемую аксиому Паша II_4, которую мы сформулируем ниже.

Пара (неупорядоченная) различных точек A и B называется *отрезком прямой AB с концами A, B* и обозначается символом $\overline{AB}$. Любая точка C, лежащая между точками A и B, называется *внутренней точкой* отрезка $\overline{AB}$ (заметим, что существование таких точек аксиомами не утверждается). В силу аксиомы II_1 это определение корректно.

Точка C называется точкой, *принадлежащей* отрезку $\overline{AB}$, если она либо является его внутренней точкой, либо совпадает с одной из точек A или B. Все точки прямой AB, не принадлежащие отрезку $\overline{AB}$, называются *внешними* к отрезку $\overline{AB}$ (существование таких точек обеспечивается аксиомой II_2). Говорят, что прямая α *пересекает* отрезок $\overline{AB}$, если существует внутренняя точка отрезка $\overline{AB}$, принадлежащая прямой α.

II_4. *Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и пусть α — некоторая прямая в плоскости ABC, не проходящая через точки A, B, C. Тогда, если прямая α пересекает отрезок $\overline{AB}$, то она пересекает также либо отрезок $\overline{AC}$, либо отрезок $\overline{BC}$.*

Из аксиом принадлежности и порядка уже можно вывести много важных фактов геометрии. Например, в порядке дополнения к аксиомам группы II можно показать, что

1) *любой отрезок $\overline{AB}$ содержит бесконечно много точек*;

2) *среди любых трех точек прямой одна и только одна точка лежит между двумя другими*;

3) *если в аксиоме Паша прямая α пересекает отрезок $\overline{AC}$, то она не пересекает отрезок $\overline{BC}$.*

Упражнение. Докажите утверждения 1), 2), 3).

Пусть O — точка прямой α. Введем на множестве $\alpha \setminus O$ всех точек прямой α, отличных от точки O, отношение $\sim$, считая, что $A \sim B$ тогда и только тогда, когда либо $A = B$, либо отрезок $\overline{AB}$ не содержит точки O.

Аналогично, пусть α — прямая плоскости Π. Введем на множестве $\Pi \setminus \alpha$ всех точек плоскости Π, не принадлежащих прямой α, отношение $\sim$, считая, что $A \sim B$ тогда и только тогда, когда либо $A = B$, либо прямая α не пересекает отрезок $\overline{AB}$.

Оказывается, что

в обоих случаях отношение $\sim$ является отношением эквивалентности, причем существует точно два класса эквивалентности.

В первом случае эти классы называются *лучами* (или *полупрямыми*), определенными точкой O (или имеющими начало в этой точке), а во втором случае — *полуплоскостями*, определенными прямой α.

Рассмотрим случай прямой на плоскости. По определению, отношение $\sim$ рефлексивно ($A \sim A$). Кроме того, оно, очевидно, симметрично (если $A \sim B$, то $B \sim A$). Покажем, что оно транзитивно (если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$). Если среди точек A, B, C есть одинаковые, то транзитивность очевидна. Предположим, что все точки A, B, C различны и не принадлежат одной прямой. Если бы отношение $A \sim C$ места не имело, то прямая α пересекала бы отрезок $\overline{AC}$. Но тогда по аксиоме Паша II_4 она пересекала бы вопреки условию и один из отрезков $\overline{AB}$ или $\overline{BC}$. Следовательно, $A \sim C$. Случай, когда точки A, B, C принадлежат одной прямой, мы предоставим читателю разобрать самостоятельно.

Таким образом, отношение $\sim$ является отношением эквивалентности и потому все множество $\Pi\setminus\alpha$ разбивается на соответствующие классы эквивалентности. Осталось доказать, что этих классов ровно два.

Пусть A — произвольная точка из $\Pi\setminus\alpha$ и пусть B — произвольная точка прямой α. По аксиоме II_2 на прямой AB существует такая точка C, что точка B лежит между точками A и C, т. е. такая, что прямая α пересекает отрезок $\overline{AC}$ (в точке B). Следовательно, точки A и C не эквивалентны, так что существует по крайней мере два класса.

Покажем теперь, что более двух классов существовать не может, т. е. что любая точка M из $\Pi\setminus\alpha$ эквивалентна либо точке A, либо точке C. Но это немедленно вытекает из дополнения 3) к аксиоме Паша, поскольку прямая α, по условию, пересекает отрезок $\overline{AC}$ и, следовательно, пересекает один и только один из отрезков $\overline{AM}$ и $\overline{MC}$.

Задание. Дайте доказательство для случая точки на прямой.

Задание. Аналогично, вводя понятие *полупространства*, определенного данной плоскостью Π, докажите, что совокупность всех точек, не принадлежащих этой плоскости, разбивается точно на два полупространства.

О точках прямой, принадлежащих одному лучу с началом в точке O, говорят также, что они расположены *по одну сторону* от точки O. Аналогично о точках, принадлежащих одной полуплоскости (одному полупространству), говорят, что они расположены *по одну сторону* от соответствующей прямой (плоскости).

Два луча одной и той же прямой мы назовем *одинаково направленными*, если один из них целиком содержится в другом.

Задание. Докажите, что:

1) *отношение одинаковой направленности является на множестве всех лучей данной прямой отношением эквивалентности*;

2) *два луча с началом в произвольной точке O неодинаково направлены, но любой другой луч одинаково направлен с одним (и только одним) из этих лучей.*

Утверждение 2) означает, что на рассматриваемой прямой имеется точно два класса одинаково направленных лучей. Эти классы называются *ориентациями* прямой.

Пусть o — произвольная ориентация прямой α, A и B — две точки этой прямой, и α_A^+, α_B^+ — лучи прямой α, принадлежащие ориентации o и определенные соответственно точками A и B. Мы скажем, что $A \prec B$ в ориентации o, если луч α_B^+ целиком содержится в луче α_A^+. Таким образом, каждая ориентация прямой α определяет на множестве точек этой прямой некоторое отношение $A \prec B$.

Задание. Докажите, что это отношение является отношением предшествования, так что ориентации, как они сейчас определены, по существу совпадают с ориентациями в смысле п. 1 § 2 гл. 1.

Пусть Π — произвольная плоскость, α — прямая на плоскости Π и O — точка на прямой α. Фигура (O, α^+, Π^+), состоящая из точки O, некоторого луча α^+ прямой α с началом в точке O и некоторой полуплоскости Π^+, определенной прямой α, называется ***флагом на плоскости*** Π. Аналогично определяется *флаг в пространстве* (добавляется еще одно из полупространств, определенных плоскостью П) и *флаг* (O, α^+) *на прямой* (последнее понятие, впрочем, совпадает по существу с понятием луча).

Пара h, k лучей, выходящих из одной точки O и не принадлежащих одной прямой, называется *углом* и обозначается символом $\angle(h, k)$. Если A и B — точки лучей h и k, то угол $\angle(h, k)$ обозначается также символом $\angle AOB$.

Говорят, что угол $\angle(h, k)$ *примыкает* к флагу (O, α^+, Π^+), если луч h совпадает с лучом α^+, а луч k лежит в полуплоскости Π^+.

Аналогично, говорят, что отрезок $\overline{AB}$ *примыкает* к флагу (O, α^+), если точка A совпадает с точкой O, а точка B принадлежит лучу α^+.

Как уже было сказано, в аксиоматике Гильберта для отрезков и углов определено отношение «конгруэнтности».

Мы скажем, что угол $\angle(h, k)$ может быть *отложен* от флага (O, α^+, Π^+), если существует конгруэнтный ему угол, примыкающий к этому флагу. Аналогично, мы скажем, что отрезок $\overline{AB}$ может быть *отложен* от флага (O, α^+), если существует конгруэнтный ему отрезок, примыкающий к этому флагу.

Третья группа аксиом

(аксиомы конгруэнтности)

III_1. *Любой отрезок можно отложить от любого флага.*

III_2. *Если отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A''B''}$ конгруэнтны одному и тому же отрезку $\overline{A'B'}$, то отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{A''B''}$ также конгруэнтны.*

III_3. *Для любой точки B, лежащей между точками A и C, и любой точки B', лежащей между точками A' и C', из того, что отрезок $\overline{AB}$ конгруэнтен отрезку $\overline{A'B'}$, а отрезок $\overline{BC}$ конгруэнтен отрезку $\overline{B'C'}$, следует, что отрезок $\overline{AC}$ конгруэнтен отрезку $\overline{A'C'}$.*

III_4. *Любой угол можно единственным образом отложить от любого флага.*

III_5. *Каждый угол конгруэнтен самому себе.*

III_6. *Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и A', B', C' — три точки, также не лежащие на одной прямой. Тогда, если отрезок $\overline{AB}$ конгруэнтен отрезку $\overline{A'B'}$, отрезок $\overline{AC}$ конгруэнтен отрезку $\overline{A'C'}$, а угол $\angle BAC$ конгруэнтен углу $\angle B'A'C'$, то угол $\angle ABC$ конгруэнтен углу $\angle A'B'C'$.*

Обратим внимание на то, что единственность откладывания углов требуется, а единственность откладывания отрезков — нет (она может быть доказана).

Из этих аксиом вытекает следующее утверждение, их существенно дополняющее:

отношения конгруэнтности отрезков и углов являются отношениями эквивалентности.

Действительно, пусть $\overline{AB}$ — произвольный отрезок. Отложив его от произвольного флага, мы получим некоторый отрезок $\overline{A'B'}$, которому конгруэнтен отрезок $\overline{AB}$ (аксиома III_1). Принимая теперь в аксиоме III_2 за отрезок

$\overline{A''B''}$ отрезок $\overline{AB}$, мы видим, что все условия этой аксиомы выполнены и, следовательно, отрезок $\overline{AB}$ конгруэнтен отрезку $\overline{A''B''}$, т. е. конгруэнтен самому себе. Следовательно, отношение конгруэнтности отрезков рефлексивно.

Его симметричность и транзитивность непосредственно вытекают теперь из аксиомы III_2.

Что же касается углов, то рефлексивность конгруэнтности для них требуется специальной аксиомой III_5, а симметричность и транзитивность без труда выводятся из симметричности и транзитивности конгруэнтности отрезков с помощью аксиомы III_6.

Упражнение. Докажите симметричность и транзитивность отношения конгруэнтности для углов.

Из аксиом групп I—III можно уже вывести довольно много теорем геометрии (все, для которых не нужна единственность параллельных и теория измерения). Например, можно доказать признаки равенства (конгруэнтности) треугольников, теорему о внешнем угле треугольника, теорему о перпендикуляре и наклонной и т. д. В частности, можно доказать, что через любую точку A, не принадлежащую прямой α, проходит прямая, *параллельная* этой прямой (т. е. содержащаяся в плоскости, определенной прямой α и точкой A, но не пересекающаяся с прямой α). Чтобы построить такую прямую, достаточно опустить из точки A на прямую α перпендикуляр (что это такое — определяется обычным образом) и затем восставить к нему перпендикуляр в точке A (конечно, нужно доказать, что все эти построения выполнимы).

Последние две группы аксиом состоят каждая из одной аксиомы.

Четвертая группа аксиом

(аксиома непрерывности)

IV. *Если все точки прямой распределены на два непустых класса так, что в некоторой ориентации каждая точка одного класса предшествует каждой точке другого класса, то либо в первом классе существует точка, которой предшествуют все остальные точки этого класса, либо во втором классе существует точка, которая предшествует остальным точкам этого класса.*

Аксиома IV известна как аксиома Дедекинда. Ее можно заменить двумя аксиомами: известной аксиомой Архимеда и аксиомой Кантора (принципом стягивающихся отрезков).

Пятая группа аксиом

(аксиома параллельности)

V. *Через любую точку A, не принадлежащую данной прямой α, проходит не более одной прямой, параллельной прямой α.*

Перечисленных аксиом оказывается достаточно для построения всей геометрии. В частности, они позволяют определить понятие координатной системы (евклидовой), что доказывает как их непротиворечивость, так и их полноту. Доказательство этого мы опустим.

Замечание 1. Аксиоматика Гильберта является аксиоматикой геометрии в пространстве (стереометрии). Чтобы получить аналогичную аксиоматику планиметрии, достаточно исключить плоскости из списка основных объектов и оставить в группе I аксиом принадлежности только первые четыре аксиомы. Ясно, что

аксиоматика планиметрии интерпретируется на любой плоскости П.

Это утверждение и является точной формулировкой того факта, что аксиомы планиметрии описывают геометрию на любой плоскости.

2. Обсуждение аксиом

Популярность аксиоматики Гильберта объясняется не только тем, что она была первой, получившей широкое признание аксиоматикой геометрии, но и ее близостью к традиционной школьной геометрии. Основные объекты и основные отношения этой аксиоматики известны из школы, а ее аксиомы либо очевидны, либо являются теоремами школьного курса (например, аксиома III_6 — это, по существу, первый признак равенства треугольников).

Аксиоматика Гильберта обладает также рядом принципиальных достоинств.

Во-первых, можно показать, что аксиоматика Гильберта *минимальна*: из нее не только нельзя удалить ни одной аксиомы, но и нельзя даже ослабить их формулировки. Впрочем, на практике это методологическое достоинство оборачивается недостатком: прежде чем дойти до действительно интересных геометрических фактов, приходится доказывать массу утверждений, тривиально дополняющих аксиомы (но доказательства которых часто совсем не тривиальны). Если не гнаться за минимальностью, то все эти утверждения естественно с самого начала включить в аксиомы.

Второе методологическое достоинство аксиоматики Гильберта состоит в ее *независимости* от каких-либо других математических теорий. Она в принципе независима даже от теории множеств. Действительно, по Гильберту, скажем, прямая отнюдь не является множеством точек, а отношение принадлежности не является теоретико-множественным отношением принадлежности элемента к множеству. Однако эта независимость от теории множеств на самом деле эфемерна. Уже полупрямая вводится по Гильберту по существу как множество точек. Еще хуже дело обстоит с аксиомой непрерывности Дедекинда, в которой понятие множества (класса) играет основную роль. (Правда, у самого Гильберта аксиомы Дедекинда нет: ее заменяет некая аксиома полноты, формально от теории множеств независимая.)

Как бы то ни было, в духе современных теоретико-множественных концепций, придавать большое значение этой особенности аксиоматики Гильберта не стоит. Более того, переходя на теоретико-множественную точку зрения, целесообразно видоизменить эту аксиоматику и считать прямую множеством принадлежащих ей точек. По существу мы выше так и поступали (по крайней мере в терминологическом аспекте). При таком видоизменении понятия прямой, мы, конечно, несколько сузим класс возможных интерпретаций: те интерпретации, в которых принадлежность не является теоретико-множественной, будут уже невозможны. Однако много мы при этом не потеряем, поскольку от любой такой интерпретации возможен по существу автоматический переход к интерпретации с теоретико-множественным отношением принадлежности. Выиграем же мы не только в наглядности, но и в уменьшении списка основных отношений.

Если не заботиться о минимальности, то аксиомы принадлежности можно теперь сформулировать следующим образом (удобнее называть их теперь «аксиомами прямых и плоскостей»):

Аксиомы прямых и плоскостей

Пр. 1. *Любая прямая является бесконечным (несчетным) множеством точек.*

Пр. 2. *Любые две (различные) точки содержатся в одной и только одной прямой.*

Пр. 3. *Вне любой данной прямой существуют точки.*

Пл. 1. *Любая плоскость является бесконечным (несчетным) множеством точек.*

Пл. 2. *Любые три точки, не принадлежащие одной прямой, содержатся в одной и только одной плоскости.*

Пл. 3. *Если две различные точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая лежит в этой плоскости.*

Пл. 4. *Пересечение двух плоскостей либо пусто, либо является прямой.*

Пл. 5. *Вне любой плоскости существуют точки.*

Ступив раз на «теоретико-множественный» путь, мы можем пойти и дальше, убрав из списка основных отношений также и отношение коллинеарности и заменив его новым основным объектом — «движением». В рамках аксиоматики Гильберта *движения* определяются как (биективные) преобразования множества точек, переводящие конгруэнтные отрезки в конгруэнтные. С содержательной точки зрения «движением» является либо результат «перемещения» всего пространства по себе как твердого тела, либо результат такого перемещения, сопровождаемый некоторой симметрией (относительно плоскости).

Аксиомы движения

Дв. 1. *Любое движение является биективным отображением множества всех точек на себя (преобразованием), переводящим прямые в прямые.*

Дв. 2. *Для любых двух (пространственных) флагов существует единственное движение, переводящее первый флаг во второй.*

Упражнение. Выведите Дв. 1 и Дв. 2 из аксиоматики Гильберта. Обратно, исходя из движений, удовлетворяющих аксиомам Дв. 1 и Дв. 2, определите обычным образом конгруэнтность (как совмещаемость при некотором движении) и проверьте, что все аксиомы конгруэнтности будут выполнены.

Можно показать (см. ниже, § 1 гл. 7), что аксиома Дв. 1 влечет за собой сохранение при движениях отношения «между». Поэтому любое движение переводит луч в луч, полуплоскость в полуплоскость, полупространство в полупространство, а следовательно, флаг во флаг. Это делает осмысленной формулировку аксиомы Дв. 2.

Заметим еще, что из аксиомы Дв. 2 без труда вытекает, что все движения составляют, как и полагается, группу.

Читатель может сравнить сложные и в достаточной мере неуклюжие аксиомы Гильберта III_1—III_6 с простыми и наглядными аксиомами Дв. 1 и Дв. 2. Это не означает, конечно, что Гильберт не понимал преимуществ аксиом Дв. 1 и Дв. 2. Просто они для него были неприемлемы из-за его «антитеоретико-множественной» установки.

Можно считать, что в аксиоматике Гильберта неудачен и выбор в качестве одного из основных отношений отношения «между». Значительно удобнее (как по методическим, так и по принципиальным соображениям) принимать за основное отношение отношение одноименности направленных отрезков (вводимое обычным образом: см. п. 1 § 2 гл. 1), или (что равносильно, но означает переход на теоретико-множественные позиции) ввести новый основной объект — «ориентацию», подчинив его соответствующим аксиомам (перечисленным в п. 1 § 2 гл. 1). Введение в аксиоматику ориентаций устраняет последнее из оставшихся основных отношений (отношение «между»). Это, конечно, не означает, что в получающейся аксиоматике нет никаких отношений: просто этими отношениями будут стандартные отношения теории множеств.

Независимость аксиоматики Гильберта проявляется также и в том, что она не опирается на теорию вещественных чисел, из-за чего большой фрагмент теории чисел по существу заново строится в недрах этой аксиоматики (достаточно чуть-чуть переформулировать линейные аксиомы порядка и аксиому непрерывности, чтобы получить аксиоматику, описывающую множество вещественных чисел [1])). Но если мы уже решили отказаться от этой независимости, то естественно сделать следующий шаг и построить геометрию, явно опираясь на арифметику вещественных чисел. Проще всего это сделать, аксиоматизировав понятие «координатной системы на прямой».

Аксиомы координатных систем

КС1. *Любая координатная система x на прямой α представляет собой биективное отображение этой прямой на множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел.*

КС2. *Для любого направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ прямой α существует на этой прямой единственная координатная система x, для которой*

$$x(A) = 0, \quad x(B) = 1.$$

КС3. *Координатные системы x и y, отвечающие направленным отрезкам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ прямой α, связаны соотношением*

$$y = ax + b,$$

где

$$a = y(B) - y(A), \quad b = y(A).$$

Эти аксиомы равносильны аксиоме непрерывности IV и линейным аксиомам порядка II_1—II_3: достаточно определить отношение «между», считая, что точка B тогда и только тогда находится между точками A и C, когда в координатной системе x, отвечающей (в силу аксиомы КС2) направленному отрезку $\overrightarrow{AC}$, имеет место неравенство

$$0 < x(B) < 1.$$

---

[1]) Строго говоря, нужна еще аксиома III_1, позволяющая переносить отрезки по прямой.

Резюмируя все сказанное, мы получаем следующее

Предложение 1. Евклидова геометрия может быть задана аксиоматикой, основными объектами которой являются

«точки», «прямые», «плоскости»,

«движения», «координатные системы»,

удовлетворяющие аксиомам Пр. 1 — Пр. 3, Пл. 1 — Пл. 5, КС1 — КС3, Дв. 1 — Дв. 2, *аксиоме Паша* III_4 *и аксиоме параллельности* V.

Эта аксиоматика в достаточной степени наглядна и проста. Вместе с тем она не слишком отходит от традиционных «школьных» понятий (представление о прямой как о числовой оси в школе известно).

Чтобы получить из этой аксиоматики аксиоматику планиметрии, достаточно удалить аксиомы Пл. 1 — Пл. 5 (а аксиому Дв. 2 сформулировать для флагов на плоскости).

При желании можно, конечно, пойти и дальше, зааксиоматизировав понятие координатной системы в пространстве (для планиметрии — понятие координатной системы на плоскости). В результате мы придем к аксиоматике, рассмотренной в § 3 гл. 2 и содержащей только две аксиомы. Однако такая аксиоматика уже совершенно порывает со школьной традицией.

С другой стороны, можно несколько вернуться назад и заменить аксиомы КС1 — КС3 аксиомой ориентаций У (см. п. 1 § 2 гл. 1) и аксиомой Дедекинда IV. Как уже отмечалось, при этом придется заново построить практически всю теорию вещественных чисел (в части, не связанной с арифметическими операциями).

Особенностью аксиоматики Гильберта является также специальная роль, которую в ней играет аксиома параллельности V. Исключение этой аксиомы из группы I (где ей естественное место) и выделение ее в специальную (последнюю!) группу V позволяет отделить теоремы геометрии, не зависящие от аксиомы параллельности, от теорем, от этой аксиомы зависящих. Это играет существенную роль, когда мы хотим сравнить евклидову геометрию с *геометрией Лобачевского*, которая удовлетворяет всем аксиомам Гильберта, за исключением аксиомы параллельности, заменяемой следующей аксиомой:

Аксиома параллельности Лобачевского

V′. *В любой плоскости, содержащей произвольную прямую* α, *через любую точку, не принадлежащую прямой* α, *проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие прямую* α.

Революционная идея Лобачевского о возможности многих геометрий, произведшая глубочайший переворот в понимании сути и значения не только геометрии, но и всей математики, была признана не сразу. Одной из целей Гильберта было показать, что геометрия Лобачевского с принципиальной, формально-логической, стороны ничем не хуже и не лучше евклидовой геометрии: каждая из этих геометрий может быть описана системами аксиом, отличающихся лишь одной аксиомой.

Однако, с современных позиций, геометрия Лобачевского является лишь одной из многих неевклидовых геометрий (хотя, возможно, и самой важной). Поэтому выделять аксиому параллельности нет сейчас никаких оснований.

С современной точки зрения представляется более важным отделить в аксиоматике не аксиому параллельности, а аксиомы, описывающие афинную геометрию.

В аксиоматике Гильберта аффинный характер имеют все аксиомы, за исключением аксиом конгруэнтности III. Однако из этих аксиом не вытекает существование параллельных прямых. Поэтому аксиому параллельности V целесообразно соответствующим образом усилить.

Усиленная аксиома параллельности

V*. *Через любую точку, не принадлежащую прямой α, можно провести единственную прямую, параллельную прямой α.*

Оказывается, что

аксиомы I_1—I_{10}, II_1—II_4, IV и V* (*или аксиомы* Пр. 1 — Пр. 3, Пл. 1 — Пл. 5, КС1 — КС3, II_4 *и* V*) *составляют полную систему аксиом афинной геометрии в пространстве.*

Доказательство мы приводить не будем.

Замечательно, что, опустив в этом списке пространственные аксиомы I_1 — I_{10} (или соответствующие аксиомы Пл. 1 — Пл. 5), мы не получим полной системы аксиом афинной планиметрии: необходима некоторая дополнительная аксиома, связывающая точки различных прямых.

Пусть на плоскости заданы три прямые α_0, α и β, причем прямые α и β не параллельны прямой α_0. Тогда для любой точки A прямой β прямая, параллельная прямой α_0 и проходящая через точку A, пересекает прямую α в единственной точке B. Построенное таким образом отображение

$$\theta\colon A \mapsto B$$

прямой β на прямую α называется, как мы знаем, *проектированием* параллельно прямой α_0.

Дополнительная аксиома координатных систем

КС4. *Для любой координатной системы x на прямой α и любого проектирования θ прямой β на прямую α композиция*

$$x \circ \theta\colon \beta \to \mathbb{R}$$

является координатной системой на прямой β.

Аксиома Паппа

Пп. *Если шесть различных точек A, B, C, A', B', C' одной плоскости таковы, что*

а) *точка C принадлежит прямой AB, а точка C' — прямой $A'B'$;*

б) *ни одна из точек A, B, C, A', B', C' не является общей точкой прямых AB и $A'B'$;*

в) *прямая $B'C$ параллельная прямой BC', а прямая $A'C$ параллельна прямой CA',*

то прямая $A'B$ параллельна прямой AC'.

Аксиома Дезарга

Дез. *Если шесть различных точек A, B, C, A', B', C' таковы, что*

а) *прямые AA', BB' и CC' либо параллельны, либо пересекаются в одной точке, отличной от точек A, B, C, A', B', C',*

б) *прямая AB параллельна прямой $A'B'$, а прямая BC параллельна прямой $B'C'$,*

то прямая AC параллельна прямой $A'C'$.

Можно показать (мы этого делать не будем), что

при добавлении к аксиомам $I_1 - I_4$, II, IV *и* V* (*или к аксиомам* Пр. 1—Пр. 3, КС1 — КС3, II_4 *и* V*) *любой из аксиом* КС4, Пп *или* Дез. *получается полная система аксиом аффинной геометрии на плоскости.*

Все эти аксиомы имеют «элементарно-геометрический» характер. С позиций аналитической геометрии наиболее приемлема, конечно, аксиоматика аффинной геометрии, изложенная в § 3 гл. 2 (и состоящая только из двух аксиом). Помимо всего прочего, последняя аксиоматика имеет и то преимущество, что она немедленно обобщается на случай любого поля $\mathbb{K}$ и на любое число измерений n.

Возможны, впрочем, и другие (часто более удобные) аксиоматики аффинной геометрии, обобщаемые на случай любых $\mathbb{K}$ и n. Наиболее известной из них является аксиоматика, предложенная немецким математиком Г. Вейлем.

В аксиоматике Вейля имеется два рода основных объектов:

«точки» и «векторы».

Предполагается, что для векторов определены операции сложения и умножения на вещественные числа, обладающие всеми восемью стандартными свойствами из п. 5 § 2 гл. 1 (т. е. превращающие множество всех векторов в линеал). Кроме того, предполагается, что любые четыре вектора линейно зависимы (если мы строим аффинную геометрию плоскости, то число «четыре» заменяется, естественно, числом «три»).

Далее, предполагается, что любым двум точкам A и B сопоставлен некоторый вектор $\overrightarrow{AB}$, причем

1) *для любой точки A и любого вектора $\mathbf{a}$ существует единственная точка B такая, что*

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB};$$

2) *для любых трех точек A, B, C имеет место равенство*

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Оказывается, что этих аксиом уже достаточно для построения всей аффинной геометрии.

Эта аксиоматика немедленно обобщается на случай любого поля $\mathbb{K}$ (достаточно потребовать, чтобы векторы умножались не на вещественные числа, а на элементы поля $\mathbb{K}$), а также на случай любого числа измерений (достаточно число «4» заменить любым фиксированным числом «n»). Более того, ясно, что эти аксиомы имеют смысл и тогда, когда $\mathbb{K}$ является произвольным *телом* (полем с некоммутативным умножением). Они определяют в этом случае *аффинную геометрию над телом* $\mathbb{K}$.