Глава 3

ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

1. Прямая как линия первого порядка

Рассмотрим плоскость с заданной на ней аффинной координатной системой Oxy и в ней произвольную прямую. Мы всегда можем найти (и даже многими способами) аффинную систему координат $O'x'y'$, для которой данная прямая является осью ординат и потому определяется уравнением $x' = 0$. Но как мы знаем (п. 2 § 1 гл. 2), координата x' выражается через исходные координаты x, y по формуле

$$x' = Ax + By + C,$$

где A, B и C — некоторые вещественные числа, причем хотя бы одно из чисел A или B отлично от нуля (в обозначениях п. 2 § 1 гл. 2, $A = c_1^{1'}$, $B = c_2^{1'}$, $C = a^1$). Тем самым доказано, что

любая прямая на плоскости имеет уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

где хотя бы одно из чисел A или B отлично от нуля.

Уравнение прямой вида (1) называется ее *общим уравнением.*

В терминологии, введенной в п. 2 § 2 гл. 2, доказанное утверждение означает, что

каждая прямая на плоскости является линией первого порядка.

Покажем, что верно и обратное, т. е. что

любая линия первого порядка является прямой.

Действительно, пусть

$$Ax + By + C = 0$$

— уравнение произвольной линии первого порядка. Подберем числа A_1, B_1 и C_1 так, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

был отличен от нуля (например, можно положить $A_1 = -B$, $B_1 = A$). На число C_1 мы не накладываем никаких условий (например, можно считать, что $C_1 = 0$). Поскольку определитель (2) отличен от нуля, формулы

$$x' = Ax + By + C,$$
$$y' = A_1x + B_1y + C_1$$

описывают переход от координат x, y к некоторым новым координатам x', y'. В координатах x', y' данная линия выражается уравнением $x' = 0$ и, следовательно, является осью ординат, т. е. прямой. Поскольку тот факт, что данная линия является прямой, не зависит от системы координат, наше утверждение, тем самым, полностью доказано.

Собирая вместе оба доказанных утверждения, мы получаем следующую теорему:

Теорема 1. *Линия на плоскости тогда и только тогда представляет собой прямую, когда она является алгебраической линией первого порядка.*

Замечание 1. При формально-аксиоматическом построении геометрии (см. § 3 гл. 2) следует, как всегда, «обратить» полученный содержательный результат и принять его за определение.

Таким образом, на произвольной аффинной плоскости $\mathfrak{M}$ прямые определяются как алгебраические линии первого порядка, т. е. как множества точек, координаты x, y которых в произвольной аффинной координатной системе $\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$ удовлетворяют уравнению вида

$$Ax + By + C = 0,$$

где либо A, либо B не равно нулю. Это определение корректно, поскольку любое преобразование из группы $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ линейное уравнение переводит снова в линейное уравнение.

Заметим, что это определение применимо к аффинным (а потому и к евклидовым) плоскостям над любым полем $\mathbb{K}$ (в частности, к комплексным и вещественно-комплексным плоскостям). При этом среди прямых на вещественно-комплексной плоскости выделяются *вещественные прямые*, имеющие уравнения с вещественными коэффициентами, а остальные прямые распадаются на пары *комплексно-сопряженных прямых*, уравнения которых имеют комплексно-сопряженные коэффициенты.

Соглашение об обозначениях. В дальнейшем символ λ будет обозначать прямую с уравнением (1). В случае, когда нам придется рассматривать несколько прямых, мы будем снабжать символ λ индексами. При этом мы всегда будем молчаливо подразумевать, что коэффициенты уравнения (1) снабжены соответствующими индексами. Так, например, прямая λ_1 будет иметь уравнение

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

и т. п.

Символ $\Leftrightarrow$ мы будем использовать для обозначения эквивалентности (равносильности) двух утверждений.

Символ $\|$ будет обозначать параллельнсость прямых, а символ $\perp$ — их перпендикулярность.

Равенство нулю одного (или двух) из коэффициентов A, B, C уравнения прямой указывает на специальное положение прямой относительно координатных осей.

Задание. Докажите, что

$$A = 0 \Leftrightarrow \lambda \parallel Ox;$$
$$B = 0 \Leftrightarrow \lambda \parallel Oy;$$
$$C = 0 \Leftrightarrow \lambda \text{ проходит через } O\,(0, 0).$$

Если $B \neq 0$, т. е. если прямая не параллельна оси ординат, ее уравнение может быть записано в виде

$$y = kx + b,$$

где $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$. Это уравнение называется *уравнением с угловым коэффициентом*, а число k называется *угловым коэффициентом* прямой. Число b называется *свободным членом*. Оно равно величине направленного отрезка $\overrightarrow{OB}$, отсекаемого прямой на оси ординат, т. е. равно ординате точки B пересечения прямой с осью ординат.

Замечание 2. Уравнение с угловым коэффициентом показывает (если мы пользуемся прямоугольными координатами), что *прямая (не параллельная оси ординат) является графиком линейной функции $y = kx + b$.*

Задание. Докажите, что
две прямые с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 тогда и только тогда параллельны, когда $k_1 = k_2$.

При $k = 0$ (т. е. при $A = 0$) прямая имеет уравнение вида

$$y = b$$

и параллельна оси абсцисс.

При $B = 0$ уравнение с угловым коэффициентом написать невозможно. Вместо него можно рассматривать уравнение

$$x = a,$$

где $a = -\frac{C}{A}$ — величина направленного отрезка $\overrightarrow{OA}$, отсекаемого прямой на оси абсцисс, т. е. абсцисса точки A пересечения прямой с осью абсцисс.

В этом случае удобно условно считать, что $k = \infty$.

2. Параметрические и канонические уравнения прямой

Определение 1. *Направляющим вектором* прямой на плоскости (или в пространстве) называется произвольный отличный от нуля вектор, параллельный этой прямой, т. е. принадлежащий соответствующему линеалу Vect(1). Этот вектор определен с точностью до коллинеарности (и представляет собой не что иное, как базис линеала Vect(1)).

Предложение 1. *Отличный от нуля вектор* $\boldsymbol{a}(l, m)$ *тогда и только тогда является направляющим вектором прямой* λ, *когда*

$$Al + Bm = 0. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка прямой λ и пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_0M_1}$. Ясно, что вектор $\boldsymbol{a}$ тогда и только тогда является направляющим вектором прямой λ, когда точка $M_1(x_0 + l, y_0 + m)$ принадлежит этой прямой, т. е. когда

$$A(x_0 + l) + B(y_0 + m) + C = 0.$$

Для завершения доказательства остается раскрыть скобки и учесть равенство

$$Ax_0 + By_0 + C = 0$$

(выражающее принадлежность точки M_0 прямой).

Условие (1), очевидно, выполнено при $l = B$ и $m = -A$. Таким образом, имеет место

Следствие. *Вектор* $\boldsymbol{a} = (B, -A)$ *является направляющим вектором прямой*

$$Ax + By + C = 0.$$

Замечание 1. Это следствие можно доказать и иначе, рассмотрев координаты

$$x' = Ax + By + C,$$
$$y' = A_1x + B_1y + C_1,$$

в которых прямая λ является осью ординат (см. предыдущий пункт). В этой координатной системе вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты

$$A \cdot B + B \cdot (-A) = 0,$$
$$A_1 \cdot B + B_1 \cdot (-A) \neq 0.$$

Следовательно, он параллелен оси ординат $x' = 0$, т. е. прямой λ.

Пусть прямая с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$ проходит через точку M_0. Ясно, что точка M тогда и только тогда принадлежит этой прямой, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$. Поскольку $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, это означает, что существует такое число t, что

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{a}.$$

Пусть $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор точки M_0, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки M. Тогда предыдущее равенство может быть записано в виде

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}.$$

Это — *параметрическое уравнение прямой в векторной форме.* При любом t вектор $\boldsymbol{r}$, выражаемый этим уравнением, является радиус-вектором некоторой точки прямой, и обратно, радиус-вектор любой точки прямой имеет такой вид.

Заметим, что здесь мы нигде не пользовались тем, что прямая лежит в плоскости. Поэтому доказанное утверждение справедливо и для прямых в пространстве.

Записав векторное параметрическое уравнение прямой в координатах, мы получим параметрические уравнения прямой в координатной форме. На плоскости они имеют вид

$$x = x_0 + lt,$$
$$y = y_0 + mt,$$

где x_0, y_0 — координаты точки M_0 и l, m — координаты направляющего вектора $\boldsymbol{a}$, а в пространстве — вид

$$x = x_0 + lt,$$
$$y = y_0 + mt,$$
$$z = z_0 + nt.$$

Точка M_0 и вектор $\boldsymbol{a}$ составляют некоторый аффинный координатный репер на рассматриваемой прямой. Ясно, что

параметр t является аффинной координатой на прямой относительно репера $M_0\boldsymbol{a}$.

Коллинеарность векторов $\overrightarrow{MM_0} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{a}$ означает также, что их координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

(мы снова рассматриваем лишь прямые на плоскости). Следовательно, это равенство является уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей направляющий вектор $\boldsymbol{a}(l, m)$. Уравнение прямой, записанное в таком виде, называется ее *каноническим уравнением.*

Чтобы по общему уравнению прямой на плоскости

$$Ax + By + C = 0$$

написать ее каноническое уравнение (или, что равносильно, ее параметрические уравнения), следует найти хотя бы одну ее точку $M_0(x_0, y_0)$ (например, при $A \neq 0$ можно положить $x_0 = -\frac{C}{A}$, $y_0 = 0$, а при $B \neq 0$ можно положить $x_0 = 0$, $y_0 = -\frac{C}{B}$) и хотя бы один направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ (например, можно взять $\boldsymbol{a} = (-B, A)$).

Замечание 2. Каноническое уравнение является, собственно говоря, не равенством, а пропорцией и должно пониматься именно в этом смысле. Например, при $l = 0$ оно означает, что $x = x_0$.

Полагая $A = m$ и $B = -l$, мы можем каноническое уравнение записать в следующем виде:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Это — *общее уравнение прямой, проходящей через данную точку.*

Если на прямой даны две различные точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, то за направляющий вектор этой прямой мы можем принять вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ с координатами $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$. Следовательно,

прямая, проходящая через точки $M_0(x_0, y_0)$ *и* $M_1(x_1, y_1)$, *имеет уравнение*

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

В детерминантной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Иногда его удобно записывать в более симметричном виде:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(для доказательства равносильности этих уравнений достаточно вторую строку последнего определителя вычесть из его первой и третьей строк).

Параметрические уравнения рассматриваемой прямой имеют, очевидно, вид

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (x_1 - x_0)t, \\ y &= y_0 + (y_1 - y_0)t, \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x &= (1 - t)x_0 + tx_1, \\ y &= (1 - t)y_0 + ty_1. \end{aligned}$$

Сравнивая эти уравнения с формулами

$$x=\frac{x_0+kx_1}{1+k}, \quad y=\frac{y_0+ky_1}{1+k},$$

определяющими координаты точки, делящей отрезок $\overrightarrow{M_0M_1}$ в данном отношении $k \neq -1$ (см. п. 3 § 1 гл. 2), мы немедленно получаем, что

точка M прямой, отвечающая значению параметра t, делит отрезок $\overrightarrow{M_0M_1}$ в отношении $t/(1-t)$.

Иными словами (см. п. 6 § 1 гл. 2),

числа $1-t$, t являются однородными барицентрическими координатами на прямой.

Полезно сравнить это истолкование параметра t с его истолкованием как аффинной координаты на прямой (см. выше).

Из обоих истолкований немедленно вытекает, в частности, что

точки отрезка $\overline{M_0M_1}$ характеризуются неравенствами

$$0 \leqslant t \leqslant 1$$

(значению $t=0$ отвечает точка M_0, а значению $t=1$ — точка M_1).

Заметим, что это утверждение остается справедливым и для прямой в пространстве.

Параметрические уравнения прямой

$$\begin{aligned} x&=x_0+lt, \\ y&=y_0+mt \end{aligned} \tag{2}$$

особенно полезны в задаче о вычислении точек пересечения этой прямой с произвольной линией

$$F(x, y)=0. \tag{3}$$

Действительно, чтобы найти эти точки, достаточно решить (относительно t) уравнение

$$F(x_0+lt, y_0+mt)=0. \tag{4}$$

Каждый корень t_1 этого уравнения дает нам точку с координатами

$$\begin{aligned} x_1&=x_0+lt_1, \\ y_1&=y_0+mt_1; \end{aligned} \tag{5}$$

принадлежащую одновременно прямой (2) и линии (3), т. е. являющуюся точкой пересечения прямой (2) и линии (3). Обратно, если точка (x_1, y_1) является точкой пересечения прямой

(2) и линии (3), то поскольку она принадлежит прямой (2), существует такое t_1, что имеют место равенства (5), а поскольку она принадлежит линии (3), это t_1 является корнем уравнения (4).

Замечание 3. Обратим внимание на то, что описанный метод имеет общий характер и применим к случаю, когда вместо прямой (2) мы рассматриваем произвольную (параметрически заданную) линию.

В частном случае, когда (3) является алгебраической линией порядка n, т. е. функция $F(x, y)$ — многочленом от x, y степени n, уравнение (4) имеет вид

$$\Phi_0 t^n + \Phi_1 t^{n-1} + \ldots + \Phi_{n-1} t + \Phi_n = 0, \tag{6}$$

где Φ_0, Φ_1, ..., Φ_{n-1}, Φ_n — некоторые числа, т. е. является уравнением степени, не большей n (некоторые из чисел Φ_0, Φ_1, ... могут быть равны нулю).

Упражнение. Докажите, что

$$\Phi_0 = F_0(l, m), \quad \Phi_n = F(x_0, y_0),$$

где $F_0(x, y)$ — сумма всех старших (имеющих точно степень n) членов многочлена $F(x, y)$.

Поскольку уравнение степени, не большей n, имеет не более n корней (или удовлетворяется тождественно), тем самым доказано следующее

Предложение 2. *Произвольную алгебраическую линию порядка n каждая прямая (не принадлежащая целиком этой линии) пересекает не более чем в n точках.*

Замечание 4. Ясно, что все вышесказанное без каких-либо изменений справедливо и в (аксиоматически построенной) аффинной геометрии над любым полем $\mathbb{K}$ (конечно, в соответствии с общими правилами, направляющий вектор следует при этом определять как вектор, координаты которого удовлетворяют уравнению (1) [1]). В частности, предложение 2 также остается справедливым.

Заметим, однако, что не только в случае вещественной геометрии, но даже и в случае комплексной (или вещественно-комплексной) геометрии утверждать существование точно n точек пересечения было бы неосторожно, поскольку уравнение (6) может, во-первых, иметь кратные корни, а во-вторых, быть уравнением степени, меньшей n.

Поскольку каждая вещественная прямая в вещественно-комплексной плоскости $\mathfrak{M}$ пересекается с вещественной плоскостью $\mathfrak{M}^{\text{вещ}} \subset \mathfrak{M}$ по бесконечному числу точек (по всем ее вещественным точкам), а вместе с тем не содержится в этой плоскости (имеет невещественные точки), мы видим, что предположение о том, что $\mathfrak{M}^{\text{вещ}}$ является алгебраической линией, противоречит предложению 2 (см. п. 5 § 3 гл. 2, стр. 225).

---

[1]) Само собой разумеется, что при этом следует не забыть проверить корректность этого определения.

3. Взаимное расположение прямых на плоскости

Ясно, что две прямые тогда и только тогда параллельны[1], когда их направляющие векторы коллинеарны. Отсюда (и из следствия к предложению 1 п. 2) непосредственно вытекает следующее

Предложение 1.

$$\lambda \parallel \lambda_1 \Leftrightarrow \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Параллельные прямые совпадают, если они имеют хотя бы одну общую точку $M_0(x_0, y_0)$, т. е. если существуют такие числа x_0, y_0, что

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + C = 0, \\ A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $A = \rho A_1$, $B = \rho B_1$. Вычитая из первого из равенств (1) второе, умноженное на ρ, мы немедленно получим, что $C - \rho C_1 = 0$, т. е. что $C = \rho C_1$. Ясно, что обратное также верно: если $C = \rho C_1$, то рассматриваемые прямые совпадают. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 2.

$$\lambda = \lambda_1 \Leftrightarrow \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}.$$

Это — теорема единственности для линий первого порядка (см. п. 2 § 2 гл. 2).

Предложения 1 и 2 можно объединить в следующую теорему о взаимном расположении двух прямых на плоскости:

Теорема 1.

а) *прямые* λ *и* λ_1 *пересекаются* $\Leftrightarrow \frac{A}{A_1} \neq \frac{B}{B_1}$;

б) $\lambda \parallel \lambda_1$, *но* $\lambda \neq \lambda_1 \Leftrightarrow \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} \neq \frac{C}{C_1}$;

в) $\lambda = \lambda_1 \Leftrightarrow \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$.

Если ввести в рассмотрение матрицы

$$\begin{pmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix}$$

и обозначить ранг первой матрицы символом r, а второй — символом R, то эту теорему можно будет переформулировать следующим образом:

---

[1]) Напомним, что совпадающие прямые мы считаем параллельными.

Теорема 1′.

а) *прямые* λ *и* λ_1 *пересекаются* $\Leftrightarrow$ $r=2$;

б) $\lambda \parallel \lambda_1$ $\Leftrightarrow$ $r=1$, $R=2$;

в) $\lambda=\lambda_1$ $\Leftrightarrow$ $r=R=1$.

В частности,

прямые λ *и* λ_1 *имеют хотя бы одну общую точку* $\Leftrightarrow$ $r=R$.

Это — специальный случай теоремы Кронекера — Капелли о совместности систем линейных уравнений (см. дополнение к § 3 гл. 1).

Для трех прямых λ, λ_1, λ_2 на плоскости возможны семь существенно различных типов их взаимного расположения:

Тип 1. Прямые попарно не параллельны и не проходят через одну точку, т. е. образуют треугольник; это — *общий тип*.

Тип 2. Две прямые параллельны, но не совпадают, а третья их пересекает (в этом случае иногда говорят, что прямые образуют «открытый треугольник»).

Тип 3. Прямые не параллельны и проходят через одну точку.

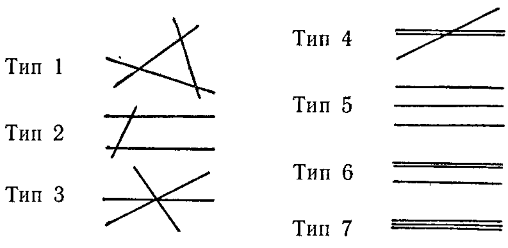
Тип 4. Две прямые совпадают, а третья их пересекает.

Тип 5. Все три прямые попарно параллельны, но попарно не совпадают.

Тип 6. Две прямые совпадают, а третья им параллельна, но от них отлична.

Тип 7. Все три прямые совпадают.

Эти типы расположения можно схематически изобразить следующим образом:



Для исследования этих типов удобно рассмотреть следующие четыре случая:

Случай 1 (типы 1 и 2): прямые не имеют ни одной общей точки и среди них имеются хотя бы две не параллельные (и не совпадающие) прямые.

Случай 2 (типы 3 и 4): прямые имеют единственную общую точку и среди них имеются хотя бы две не параллельные (и не совпадающие) прямые.

Случай 3 (типы 5 и 6): прямые не имеют ни одной общей точки и любые две из них параллельны или совпадают.

Случай 4 (тип 7): все три прямые совпадают.

Пусть r — ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \\ C_1 & B_1 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

а R — ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Тогда справедлива следующая теорема о взаимном расположении трех прямых на плоскости:

Теорема 2.

$$\begin{aligned} &\textit{Случай } 1 \Leftrightarrow r=2,\ R=3; \\ &\textit{случай } 2 \Leftrightarrow r=2,\ R=2; \\ &\textit{случай } 3 \Leftrightarrow r=1,\ R=2; \\ &\textit{случай } 4 \Leftrightarrow r=1,\ R=1. \end{aligned}$$

Доказательство. Предположим сначала, что среди наших прямых имеется хотя бы одна пара непараллельных прямых (случаи 1 и 2). Пусть, для определенности, это — прямые λ и λ_1. Тогда

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

и потому $r = 2$. Кроме того, поскольку прямые λ и λ_1 не параллельны (и в частности, не совпадают), они имеют единственную общую точку $M_0(x_0, y_0)$, т. е. существуют такие числа x_0, y_0, что

$$Ax_0 + By_0 + C = 0,$$
$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0.$$

Поэтому, прибавив к третьему столбцу матрицы (3) первый столбец, умноженный на x_0, и второй столбец, умноженный на y_0, мы получим матрицу

$$\begin{pmatrix} A & B & 0 \\ A_1 & B_1 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2' \end{pmatrix},$$

где $C_2' = A_2x_0 + B_2y_0 + C_2$. Поскольку при этом преобразовании определитель матрицы (3) не меняется, этим доказано, что он равен произведению

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} C_2'.$$

Следовательно, если $C_2' \neq 0$, т. е. если третья прямая не проходит через точку пересечения первых двух (случай 1), то определитель матрицы (3) отличен от нуля, и потому $R = 3$. Если же $C_2' = 0$ (случай 2), то определитель матрицы (3) равен нулю и потому $R \leqslant 2$, т. е. $R = 2$ (ибо всегда $r \leqslant R$, а как мы уже знаем, в рассматриваемом случае $r = 2$). Таким образом, *в случае* 1 *имеют место равенства* $R = 3$ *и* $r = 2$, *а в случае* 2 — *равенства* $R = 2$ *и* $r = 2$.

Пусть теперь любые две из прямых λ, λ_1 и λ_2 параллельны (случаи 3 и 4). Тогда

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}, \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \quad \frac{A}{A_2} = \frac{B}{B_2}$$

и потому $r = 1$. Следовательно, $R \leqslant 2$ (ибо всегда $R \leqslant r + 1$). В случае 3 существуют хотя бы две параллельные, но не совпадающие, прямые. Пусть, для определенности, это — прямые λ и λ_1. Тогда

$$\frac{B}{B_1} \neq \frac{C}{C_1}$$

и потому минор

$$\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}$$

матрицы (3) отличен от нуля. Поэтому в этом случае $R = 2$. В случае 4 все миноры второго порядка матрицы (3) равны нулю и потому $R = 1$. Таким образом, *в случае* 3 *имеют место равенства* $R = 2$ *и* $r = 1$, *а в случае* 4 — *равенства* $R = 1$ *и* $r = 1$.

На первый взгляд кажется, что тем самым теорема уже полностью доказана. Однако это не совсем так, поскольку, кроме доказанных утверждений (выделенных выше курсивом), нужно также доказать и обратные утверждения. Для этого мы воспользуемся общим логическим принципом обращения, утверждающим, что если у нас имеется два ряда утверждений $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, ... и $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, ..., причем утверждения $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, ... друг друга взаимно исключают, а утверждения $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, ... исчерпывают все возможности, и если доказано, что из каждого утверждения $\mathscr{A}_i$ вытекает соответствующее утверждение $\mathscr{B}_i$, то и обратно, из каждого утверждения $\mathscr{B}_i$ вытекает соответствующее утверждение $\mathscr{A}_i$. В нашем случае утверждения $\mathscr{B}_i$ — это четыре комбинации чисел R и r, а утверждения $\mathscr{A}_i$ — это четыре случая взаимного расположения прямых. Поскольку различные случаи взаимного расположения прямых друг друга взаимно исключают, а рассмотренные комбинации значений R и r исчерпывают все возможности, этот принцип применим. Тем самым наша теорема полностью доказана.

Замечание 1. Чтобы в каждом из рассмотренных случаев различить соответствующие типы (например, при $R = 3$ и

$r = 2$ узнать, имеет ли место тип 1 или тип 2) проще всего воспользоваться теоремой о взаимном расположении двух прямых. Например, при $R = 3$ и $r = 2$ имеет место тип 1, если все миноры второго порядка матрицы (2) отличны от нуля, и тип 2, если один (и только один) из этих миноров равен нулю.

Из доказанной теоремы, в частности, вытекает, что

три прямые тогда и только тогда имеют хотя бы одну общую точку, когда $r = R$.

Это — снова частный случай теоремы Кронекера — Капелли.

Упражнение. Рассмотрите взаимное расположение четырех прямых на плоскости (должно получиться семнадцать типов, группирующихся в четыре случая) и проверьте для четырех прямых справедливость теоремы Кронекера — Капелли.

4. Полуплоскости, на которые прямая разбивает плоскость

Пусть

$$F(x, y) \equiv Ax + By + C = 0$$

— произвольная прямая на плоскости. Как известно, эта прямая разбивает плоскость на две полуплоскости: точки M_1 и M_2 (не принадлежащие прямой) тогда и только тогда принадлежат одной полуплоскости, когда отрезок $\overline{M_1M_2}$ не пересекает прямую.

Предложение 1. *Точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ тогда и только тогда принадлежат одной полуплоскости, определяемой данной прямой, когда величины $F(x_1, y_1)$ и $F(x_2, y_2)$ имеют один и тот же знак.*

Доказательство. Рассмотрим прямую, проходящую через точки M_1 и M_2. Как было показано в п. 2, ее параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} x &= (1 - t)\, x_1 + t x_2, \\ y &= (1 - t)\, y_1 + t y_2, \end{aligned} \qquad (1)$$

причем точкам отрезка $\overline{M_1M_2}$ отвечают значения параметра, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Найдем точку пересечения этой прямой с прямой $F(x, y) = 0$ (если эта точка существует). Как мы знаем (см. п. 2), для этого нужно подставить выражения (1) в уравнение прямой:

$$A((1 - t)\, x_1 + t x_2) + B((1 - t)\, y_1 + t y_2) + C = 0 \qquad (2)$$

и решить получившееся уравнение относительно t. Переписав уравнение (2) в виде

$$(1 - t)\, F(x_1, y_1) + t F(x_2, y_2) = 0,$$

мы немедленно получим, что оно имеет корень

$$t_0 = \frac{F(x_1, y_1)}{F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)}. \qquad (3)$$

Но, по определению, точки M_1 и M_2 тогда и только тогда лежат в разных полуплоскостях, определяемых прямой $F(x, y) = 0$, когда точка пересечения существует и принадлежит отрезку $\overline{M_1M_2}$, т. е. когда t_0 определено $(F(x_1, y_1) \neq F(x_2, y_2))$ и $0 < t_0 < 1$. Для завершения доказательства остается заметить, что в силу формулы (3) условие $0 < t_0 < 1$ в точности равносильно тому, что числа $F(x_1, y_1)$ и $F(x_2, y_2)$ имеют разные знаки.

Таким образом, при данном уравнении прямой

$$\lambda:\ Ax + By + C = 0$$

точки одной полуплоскости, на которые эта прямая делит плоскость, характеризуются неравенством $Ax + By + C > 0$ (эту полуплоскость можно назвать *положительной*), а точки другой — неравенством $Ax + By + C < 0$ (эту полуплоскость можно назвать *отрицательной*). Заметим, однако, что при другом выборе уравнения прямой положительная полуплоскость может стать отрицательной, а отрицательная — положительной (достаточно данное уравнение умножить на отрицательное число). Таким образом, правильнее говорить о положительной (или отрицательной) полуплоскости *относительно данного уравнения* прямой.

В случае, когда прямая λ не проходит через начало координат, т. е. при $C \neq 0$, мы без ограничения общности можем считать, что $C < 0$. Тогда *положительная полуплоскость будет полуплоскостью, не содержащей точки O, а отрицательная — полуплоскостью, содержащей эту точку.*

Используя терминологию, введенную в п. 4 § 4 гл. 1, мы можем, следовательно, сказать, что *задание уравнения прямой определяет некоторую сторону этой прямой.* Но поскольку у нас на плоскости задана аффинная координатная система, эта плоскость ориентирована, а задание на ориентированной плоскости некоторой стороны прямой равносильно заданию ориентации этой прямой (п. 4 § 4 гл. 1). Таким образом,

каждое уравнение прямой задает некоторую ориентацию этой прямой; при умножении уравнения на положительное число эта ориентация не меняется, а при умножении на отрицательное число — переходит в противоположную.

Ориентация прямой, соответствующая уравнению $Ax + By + C = 0$, задается ее направляющим вектором $\boldsymbol{a}$, обладающим тем свойством, что базис $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{n}$ плоскости, состоящий из вектора $\boldsymbol{a}$ и некоторого вектора $\boldsymbol{n}$, направленного в положительную сторону прямой, одноименен с координатным базисом.

Чтобы найти этот вектор $\boldsymbol{a}$, заметим сначала, что

вектор $\boldsymbol{n}(A, B)$ направлен в положительную сторону прямой λ.

Действительно, пусть $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка прямой и пусть $n = \overrightarrow{M_0M_1}$. Тогда точка M_1 имеет координаты $x_0 + A$ и $y_0 + B$. Остается заметить, что

$$A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C = A^2 + B^2 > 0.$$

Отсюда немедлено вытекает, что

описанная выше ориентация прямой λ задается направляющим вектором $\boldsymbol{a}(B, -A)$.

Действительно,

$$\begin{vmatrix} B & -A \\ A & B \end{vmatrix} = A^2 + B^2 > 0$$

и потому базис $\boldsymbol{a}(B, -A)$, $\boldsymbol{n}(A, B)$ одноименен с координатным базисом.

Замечание 1. Обратим внимание, что в то время как все сказанное в предыдущих пунктах справедливо в аффинной геометрии над любым полем $\mathbb{K}$, утверждения, доказанные в этом пункте, справедливы (и имеют смысл) только над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ (или, точнее, над любым полем, в котором определены понятия положительного и отрицательного числа, обладающие обычными свойствами[1])).

5. Прямая на евклидовой плоскости

До сих пор мы занимались изучением аффинных свойств прямых (принадлежащих аффинной геометрии). Теперь мы рассмотрим их метрические свойства (принадлежащие собственно евклидовой геометрии). В соответствии с этим мы будем впредь считать наши координаты x, y *прямоугольными*.

На евклидовой плоскости каждую прямую можно задать ее произвольной точкой $M_0(x_0, y_0)$ и некоторым (отличным от нуля) вектором $\boldsymbol{n}$, перпендикулярным этой прямой. Для любой точки $M(x, y)$ рассматриваемой прямой вектор $\overrightarrow{M_0M}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{n}$ и потому скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$\boldsymbol{n}\overrightarrow{M_0M} = 0.$$

Обозначая радиус-вектор точки M_0 через $\boldsymbol{r}_0$, а радиус-вектор точки M — через $\boldsymbol{r}$, мы можем это равенство записать в следующем виде:

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0 \qquad (1)$$

или, раскрывая скобки, в виде

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{r} - p = 0, \qquad (2)$$

---

[1]) В алгебре такие поля называются *упорядоченными*. Кроме поля вещественных чисел, к ним принадлежит, например, поле рациональных чисел. Подчеркнем, что *поле* $\mathbb{C}$ *не является упорядоченным полем*.

где $p = \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_0$. Таким образом, радиус-вектор каждой точки нашей прямой удовлетворяет уравнениям (1) или (2). Ясно, что и обратно, если радиус-вектор некоторой точки M удовлетворяет уравнению (1) или (2), то эта точка принадлежит рассматриваемой прямой. В соответствии с этим уравнения (1) и (2) называются *уравнениями прямой в векторной форме.*

Обозначая координаты вектора $\boldsymbol{n}$ через A, B и полагая $C = -p$, мы можем уравнение (2) переписать в уже известной нам *координатной форме*

$$Ax + By + C = 0.$$

Аналогично, уравнение (1) дает нам общее уравнение прямой, проходящей через данную точку:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Замечание 1. Изложенные соображения еще раз независимо показывают (правда, только для евклидовой плоскости), что любую прямую можно задать уравнением первого порядка.

Кроме того, мы видим, что
вектор $\boldsymbol{n}(A, B)$ перпендикулярен прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Уравнение (2) особо интересно в случае, когда вектор $\boldsymbol{n}$ является ортом (единичным вектором). Обозначая координаты этого орта через $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ (это — его направляющие косинусы; см. п. 5 § 5 гл. I), мы получаем в этом случае для рассматриваемой прямой уравнение

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

При $p \geqslant 0$ (а этого всегда можно добиться, заменив, в случае необходимости, вектор $\boldsymbol{n}$ противоположным вектором $-\boldsymbol{n}$) это уравнение называется *нормальным уравнением прямой* (конечно, лучше было бы говорить — «нормированным»). Таким образом, уравнение

$$Ax + By + C = 0$$

является нормальным уравнением, если

$$A^2 + B^2 = 1 \quad \text{и} \quad C \leqslant 0.$$

Чтобы из общего уравнения прямой получить нормальное уравнение, достаточно умножить его на «нормирующий множитель»

$$\pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(т. е. разделить на длину вектора $\boldsymbol{n}(A, B)$, взятую с некоторым знаком). Знак нормирующего множителя следует выбирать противоположным знаку свободного члена C (если $C \neq 0$; при $C = 0$ можно взять любой знак).

Заметим, что при $C \neq 0$ *нормальное уравнение однозначно определено прямой*, а при $C = 0$ (т. е. в случае, когда прямая проходит через начало координат) прямая имеет два нормальных уравнения, получающихся друг из друга умножением на -1.

Если в нормальном уравнении свободный член отличен от нуля (и следовательно, отрицателен), то начало координат O находится в отрицательной полуплоскости, определяемой данной прямой, т. е. вектор $\boldsymbol{n}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ направлен в сторону, противоположную стороне, в которой находится точка O (см. п. 4).

Предложение 1. *Расстояние d произвольной точки $M(x, y)$ от прямой с нормальным уравнением*

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

равно абсолютной величине числа, получающегося при подстановке координат этой точки в уравнение прямой:

$$d = |\, x\cos\alpha + y\sin\alpha - p\,| \tag{3}$$

(*как мы уже знаем, число $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$ отрицательно, если точка M расположена по ту же сторону от прямой, что и начало координат, и положительно в противном случае*).

Доказательство. В векторной форме формула (3) имеет вид

$$d = |\,\boldsymbol{nr} - p\,|,$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки M. В этом виде мы и будем ее доказывать.

Пусть M_0 — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на нашу прямую. По определению, расстояние d точки M от прямой равно длине отрезка $\overline{M_0M}$, т. е. равно длине вектора $\overrightarrow{M_0M}$:

$$d = |\,\overrightarrow{M_0M}\,|.$$

Иными словами,

$$d = |\,\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\,|,$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки M, а $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор точки M_0. Но вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен прямой и потому коллинеарен вектору $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$. Следовательно, поскольку этот вектор является ортом, длина вектора $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ равна абсолютной величине его скалярного произведения на вектор $\boldsymbol{n}$:

$$d = |\,\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\,| = |\,\boldsymbol{nr} - \boldsymbol{nr}_0\,|.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что $\boldsymbol{nr}_0 = p$, ибо точка M_0 принадлежит прямой $\boldsymbol{nr} - p = 0$.

Следствие. Число p равно расстоянию точки O от прямой, т. е. длине перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую.

Один из двух (элементарно-геометрических) углов, образованных пересекающимися прямыми λ_1 и λ_2, равен углу θ между их направляющими векторами $\boldsymbol{a}_1(B_1, -A_1)$ и $\boldsymbol{a}_2(B_2, -A_2)$ и потому определяется формулой

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}. \tag{4}$$

При $A_1A_2 + B_1B_2 > 0$ этот угол — острый, а при $A_1A_2 + B_1B_2 < 0$ — тупой. При $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ этот угол равен $\pi/2$. Таким образом,

$$\lambda_1 \perp \lambda_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Чтобы получить острый (точнее, не тупой) угол между прямыми, следует правую часть формулы (4) взять по абсолютной величине.

Если прямые λ_1 и λ_2 заданы нормальными уравнениями

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0$$

и

$$x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0,$$

то угол θ между ними определяется формулой

$$\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2 = \cos(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Следовательно,

$$\theta = |\alpha_2 - \alpha_1|.$$

В частности,

$$\lambda_1 \perp \lambda_2 \Leftrightarrow |\alpha_2 - \alpha_1| = \frac{\pi}{2}.$$

Замечание 2. Согласно п. 4 прямые λ_1 и λ_2 естественным образом ориентированы. Ясно, что определенный формулой (4) угол θ является не чем иным, как углом между так ориентированными прямыми.

Это замечание можно развить, вспомнив, что наша плоскость также ориентирована (поскольку на ней фиксирована некоторая координатная система). Поэтому (см. дополнение к § 4 гл. I) определен угол φ от прямой λ_1 к прямой λ_2. По определению, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, причем $\varphi = \theta$, если $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, и $\varphi = -\theta$, если $-\pi < \varphi \leqslant 0$. Угол φ однозначно определен, если известны его тригонометрические функции $\cos\varphi = \cos\theta$ и $\sin\varphi$.

Чтобы найти угол φ, мы рассмотрим наряду с направляющими векторами $\boldsymbol{a}_1(B_1, -A_1)$ и $\boldsymbol{a}_2(B_2, -A_2)$ ортогональные им векторы $\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2, B_2)$. Поскольку вектор $\boldsymbol{n}_2$ направлен в положительную сторону прямой λ_1, угол от вектора $\boldsymbol{a}_2$ к вектору $\boldsymbol{n}_2$ равен $\pi/2$. Следовательно, угол φ' от вектора $\boldsymbol{a}_1$ к вектору $\boldsymbol{n}_2$ равен $\varphi+\frac{\pi}{2}$ и потому $\cos\varphi'=-\sin\varphi$. Но угол φ' и угол между векторами $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ имеют один и тот же косинус, так что косинус этого угла мы можем вычислить по известной формуле:

$$\cos\varphi'=\frac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{a}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{-A_1B_2+A_2B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Таким образом, для угла φ имеют место формулы

$$\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+A_2^2}\sqrt{B_1^2+B_2^2}},\\ \sin\varphi&=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{\sqrt{A_1^2+A_2^2}\sqrt{B_1^2+B_2^2}},\end{aligned}\tag{5}$$

однозначно этот угол определяющие.

В частности, мы видим, что

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}.$$

Вернемся теперь к элементарно-геометрическим углам между неориентированными прямыми. Легко видеть, что один из этих смежных углов (обозначим его через θ') имеет тот же тангенс, что и угол φ:

$$\operatorname{tg}\theta'=\operatorname{tg}\varphi,$$

так что

$$\operatorname{tg}\theta'=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$$

(угол θ' совпадает с углом θ, если $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, и равен $\pi-\theta$, если $-\pi<\varphi\leqslant 0$; в частности, угол θ' — острый, если числа $A_1B_2-A_2B_1$ и $A_1A_2+B_1B_2$ имеют одинаковые знаки, и тупой, если знаки этих чисел различны).

Через угловые коэффициенты $k_1=-\frac{A_1}{B_1}$ и $k_2=-\frac{A_2}{B_2}$ данных прямых формула для $\operatorname{tg}\theta'$ записывается следующим образом:

$$\operatorname{tg}\theta'=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.\tag{6}$$

В частности, мы видим, что

прямые с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 тогда и только тогда перпендикулярны, когда

$$k_1k_2=-1.$$

Применяя формулу (6) к оси абсцисс (имеющей угловой коэффициент $k_1 = 0$) и к произвольной прямой (с угловым коэффициентом $k_2 = k$), мы немедленно получаем, что

угловой коэффициент k произвольной прямой равен тангенсу угла θ', образованного этой прямой с осью абсцисс:

$$k = \operatorname{tg} \theta'.$$

Этот угол θ' часто называют поэтому *углом наклона* рассматриваемой прямой.

Предупреждение. Подчеркнем, что угол между прямыми мы рассматриваем по крайней мере в трех различных смыслах (θ, φ и θ'). Углы θ и θ' оба — элементарно-геометрические, но, вообще говоря, различные. Каждый раз, когда речь идет об угле между прямыми, необходимо четко отдавать себе отчет, в каком именно смысле этот угол понимается.

§ 2. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Плоскость в пространстве рассматривается почти дословно так же, как прямая на плоскости.

1. Плоскость как поверхность первого порядка

Пусть в пространстве задана аффинная координатная система $Oxyz$. Для любой плоскости Π существует (отнюдь не единственная) аффиная координатная система $O'x'y'z'$, в которой эта плоскость определяется уравнением $x' = 0$. Но, как мы знаем (п. 2 § 1 гл. 2), координата x' выражается через координаты x, y, z по формуле

$$x' = Ax + By + Cz + D,$$

где A, B, C и D — некоторые вещественные числа, причем хотя бы одно из чисел A, B или C отлично от нуля (в обозначениях п. 2 § 1 гл. 2 $A = c_1^{1'}$, $B = c_2^{1'}$, $C = c_3^{1'}$ и $D = a^1$). Тем самым доказано, что

любая плоскость определяется уравнением вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

где хотя бы одно из чисел A, B или C отлично от нуля.

Уравнение плоскости, имеющее вид (1), называется ее *общим уравнением.*

Доказанное утверждение означает, что

любая плоскость является поверхностью первого порядка.

Покажем, что верно и обратное, т. е. что

любая поверхность первого порядка является плоскостью.