Применяя формулу (6) к оси абсцисс (имеющей угловой коэффициент $k_1 = 0$) и к произвольной прямой (с угловым коэффициентом $k_2 = k$), мы немедленно получаем, что

угловой коэффициент k произвольной прямой равен тангенсу угла θ', образованного этой прямой с осью абсцисс:

$$k = \operatorname{tg} \theta'.$$

Этот угол θ' часто называют поэтому *углом наклона* рассматриваемой прямой.

Предупреждение. Подчеркнем, что угол между прямыми мы рассматриваем по крайней мере в трех различных смыслах (θ, φ и θ'). Углы θ и θ' оба — элементарно-геометрические, но, вообще говоря, различные. Каждый раз, когда речь идет об угле между прямыми, необходимо четко отдавать себе отчет, в каком именно смысле этот угол понимается.

§ 2. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Плоскость в пространстве рассматривается почти дословно так же, как прямая на плоскости.

1. Плоскость как поверхность первого порядка

Пусть в пространстве задана аффинная координатная система $Oxyz$. Для любой плоскости Π существует (отнюдь не единственная) аффиная координатная система $O'x'y'z'$, в которой эта плоскость определяется уравнением $x' = 0$. Но, как мы знаем (п. 2 § 1 гл. 2), координата x' выражается через координаты x, y, z по формуле

$$x' = Ax + By + Cz + D,$$

где A, B, C и D — некоторые вещественные числа, причем хотя бы одно из чисел A, B или C отлично от нуля (в обозначениях п. 2 § 1 гл. 2 $A = c_1^{1'}$, $B = c_2^{1'}$, $C = c_3^{1'}$ и $D = a^1$). Тем самым доказано, что

любая плоскость определяется уравнением вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

где хотя бы одно из чисел A, B или C отлично от нуля.

Уравнение плоскости, имеющее вид (1), называется ее *общим уравнением.*

Доказанное утверждение означает, что

любая плоскость является поверхностью первого порядка.

Покажем, что верно и обратное, т. е. что

любая поверхность первого порядка является плоскостью.

Действительно, пусть

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

— уравнение произвольной поверхности первого порядка. Подберем числа A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 так, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля (например, при $A^2 + B^2 \neq 0$ можно положить $A_1 = -B$, $B_1 = A$, $C_1 = 0$ и $A_2 = B_2 = 0$, $C_2 = 1$, а при $A = B = 0$ можно положить $A_1 = C_1 = 0$, $B_1 = 1$ и $A_2 = 1$, $B_2 = C_2 = 0$). Тогда формулы

$$\begin{aligned} x' &= Ax + By + Cz + D, \\ y' &= A_1x + B_1y + C_1z + D_1, \\ z' &= A_2x + B_2y + C_2z + D_2, \end{aligned}$$

где D_1 и D_2 — произвольные числа (например, можно считать, что $D_1 = D_2 = 0$), описывают переход от координат x, y, z к некоторым новым координатам x', y', z'. В координатах x', y', z' данная поверхность выражается, очевидно, уравнением $x' = 0$ и, следовательно, является плоскостью. Поскольку тот факт, что данная поверхность является плоскостью, не зависит от системы координат, наше утверждение полностью доказано.

Собирая вместе доказанные утверждения, мы получаем следующую теорему:

Теорема 1. *Поверхность в пространстве тогда и только тогда представляет собой плоскость, когда она является алгебраической поверхностью первого порядка.*

Соглашение об обозначениях. В дальнейшем символом Π мы будем обозначать плоскость с уравнением (1). В случае, когда нам придется рассматривать несколько прямых, мы будем снабжать символ Π индексами и будем предполагать, что соответствующими индексами снабжены и коэффициенты уравнения (1) (ср. соглашение для прямых в п. 1 § 1).

Равенство нулю одного (или нескольких) коэффициентов A, B, C, D указывает на специальное положение плоскости относительно координатных осей.

Задание. Докажите, что

$$\begin{aligned} A = 0 &\iff \Pi \parallel Ox, \\ B = 0 &\iff \Pi \parallel Oy, \\ C = 0 &\iff \Pi \parallel Oz, \\ D = 0 &\iff \Pi \text{ проходит через точку } O(0, 0, 0). \end{aligned}$$

2. Параметрические уравнения плоскости

Определение 1. *Направляющим бивектором* плоскости П называется произвольный отличный от нуля бивектор, параллельный этой плоскости, т. е. принадлежащий соответствующему линеалу Biv(2). Этот бивектор определен с точностью до коллинеарности (и представляет собой не что иное, как базис линеала Biv(2)).

Предложение 1. *Вектор* $\boldsymbol{a}(l, m, n)$ *тогда и только тогда параллелен плоскости* П *(принадлежит соответствующему линеалу* Vectп (2)*), когда*

$$Al + Bm + Cn = 0. \tag{1}$$

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 1 из п. 1 § 1, и мы его опустим.

Задание. Докажите предложение 1.

Следствие. *Бивектор* $\mathfrak{a}(A, B, C)$ *является направляющим бивектором плоскости* П.

Здесь запись $\mathfrak{a}(A, B, C)$ означает, что бивектор $\mathfrak{a}$ имеет координаты A, B, C в бивекторном базисе $\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$, соответствующем данному базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ пространства.

Доказательство. В отличие от случая прямой (когда соответствующий вывод тривиален), для доказательства этого следствия требуется некоторая алгебраическая техника. Проще всего (хотя и несколько искусственно) это доказательство можно провести следующим образом.

Ясно, что уравнение (1) будет удовлетворено при

$$l = -B, \quad m = A, \quad n = 0.$$

Обозначим вектор с этими координатами через $\boldsymbol{a}_1$. С другой стороны, уравнение (1) удовлетворяется также и при

$$l = 0, \quad m = -C, \quad n = B.$$

Обозначим вектор с этими координатами через $\boldsymbol{a}_2$. Если $B \neq 0$, то векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ не коллинеарны, и потому их внешнее произведение $\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2$ отлично от нуля. Поскольку векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ параллельны согласно предложению 1 рассматриваемой плоскости, это внешнее произведение будет, поэтому, направляющим бивектором этой плоскости. Но тогда направляющим бивектором будет и бивектор

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{B}(\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2).$$

Для завершения доказательства остается заметить, что согласно общей формуле для внешнего произведения двух векторов

(п. 3 § 6 гл. 1)

$$\mathfrak{a}=\frac{1}{B}\begin{vmatrix} e_2\wedge e_3 & e_3\wedge e_1 & e_1\wedge e_2 \\ -B & A & 0 \\ 0 & -C & B \end{vmatrix}=$$

$$=A(e_2\wedge e_3)+B(e_3\wedge e_1)+C(e_1\wedge e_2).$$

При $B=0$, $A\neq 0$ доказательство проводится аналогично, только за вектор a_2 следует принять вектор с координатами

$$l=-C,\quad m=0,\quad n=A.$$

При $A=B=0$ (тогда обязательно $C\neq 0$) следует за вектор a_1 принять вектор с координатами

$$l=-C,\quad m=0,\quad n=0\quad (=A).$$

Замечание 1. Это следствие можно доказать и по-иному, рассмотрев координаты

$$\begin{aligned} x' &= Ax+By+Cz+D, \\ y' &= A_1x+B_1y+C_1z+D_1, \\ z' &= A_2x+B_2y+C_2z+D_2, \end{aligned}$$

в которых данная плоскость П является плоскостью $x'=0$ (см. выше). Согласно формулам преобразования координат бивекторов (п. 3 § 6 гл. 1) бивектор $\mathfrak{a}$ в этой координатной системе имеет координаты

$$\begin{vmatrix} A & A_1 & A_2 \\ B & B_1 & B_2 \\ C & C_1 & C_2 \end{vmatrix}\neq 0,\qquad \begin{vmatrix} A & A & A_2 \\ B & B & B_2 \\ C & C & C_2 \end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix} A & A_1 & A \\ B & B_1 & B \\ C & C_1 & C \end{vmatrix}=0$$

и потому коллинеарен бивектору $e_2'\wedge e_3'$. Для завершения доказательства остается заметить, что последний бивектор, очевидно, параллелен рассматриваемой плоскости.

Пусть плоскость П с направляющим бивектором $\mathfrak{a}$ проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Представим бивектор $\mathfrak{a}$ в виде внешнего произведения $a\wedge b$ каких-то двух векторов a и b. Поскольку векторы a, b составляют, очевидно, базис линеала $\mathrm{Vect}_\Pi(2)$, точка $M(x, y, z)$ тогда и только тогда принадлежит плоскости, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ линейно выражается через векторы a и b, т. е. когда существуют такие числа u и v, что

$$\overrightarrow{M_0M}=ua+vb.$$

Пусть r_0 — радиус-вектор точки M_0, а r — радиус-вектор точки M. Тогда предыдущее равенство может быть записано в виде

$$r=r_0+ua+vb.$$

Это — *параметрическое уравнение плоскости в векторной форме*. Записав его в координатах, мы получим *параметрические уравнения плоскости в координатной форме*:

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1,$$
$$y = y_0 + ua_2 + vb_2,$$
$$z = z_0 + ua_3 + vb_3,$$

где a_1, a_2, a_3 — координаты вектора $\boldsymbol{a}$, а b_1, b_2, b_3 — координаты вектора $\boldsymbol{b}$.

Точка M_0 и векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ определяют на плоскости аффинную координатную систему с репером $M_0\boldsymbol{ab}$. Очевидно, что *параметры u и v являются аффинными координатами на плоскости относительно репера $M_0\boldsymbol{ab}$*.

Поскольку векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, тот факт, что вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ линейно через них выражается, равносилен тому, что векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно зависимы (компланарны), т. е. тому, что составленный из их координат определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Это равенство выражает необходимое и достаточное условие того, что данная точка принадлежит рассматриваемой плоскости, т. е. является ее уравнением. Это уравнение плоскости иногда называется *уравнением в детерминантной форме*.

Обозначив алгебраические дополнения элементов первой строки определителя (2) через A, B и C и разложив определитель по этой строке, мы получим уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Это — *общее уравнение плоскости, проходящей через данную точку*.

Плоскость полностью определена, если на ней заданы три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой. Рассмотрим векторы

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_0M_1}\,(x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0),$$
$$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M_0M_2}\,(x_2 - x_0,\ y_2 - y_0,\ z_2 - z_0).$$

Эти векторы не коллинеарны, и потому их внешнее произведение $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ отлично от нуля. Оно, очевидно, является направляющим бивектором данной плоскости.

В соответствии со сказанным выше отсюда вытекает, что *плоскость, проходящая через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеет уравнение*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Замечание 2. Уравнение (3) иногда удобно записывать в следующем более симметричном виде:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Для доказательства равносильности уравнений (3) и (4) достаточно вторую строку определителя (4) вычесть последовательно из всех остальных строк и после этого разложить определитель по последнему столбцу.

Параметрические уравнения рассматриваемой плоскости имеют, очевидно, вид

$$\begin{aligned} x &= x_0 + u(x_1 - x_0) + v(x_2 - x_0), \\ y &= y_0 + u(y_1 - y_0) + v(y_2 - y_0), \\ z &= z_0 + u(z_1 - z_0) + v(z_2 - z_0), \end{aligned}$$

т. е. вид

$$\begin{aligned} x &= (1 - u - v)\, x_0 + ux_1 + vx_2, \\ y &= (1 - u - v)\, y_0 + uy_1 + vy_2, \\ z &= (1 - u - v)\, z_0 + uz_1 + vz_2. \end{aligned}$$

Следовательно (см. п. 6 § 1 гл. 2),

числа $1 - u - v$, u, v являются однородными барицентрическими координатами на плоскости.

3. Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Ясно, что две плоскости Π и Π_1 тогда и только тогда параллельны[1]), когда их направляющие бивекторы коллинеарны. Следовательно, справедливо следующее

Предложение 1.

$$\Pi \parallel \Pi_1 \iff \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} \iff r = 1.$$

---

[1]) Как и для случая прямых, совпадающие плоскости мы считаем параллельными.

Здесь r — ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Вместо направляющих бивекторов $\mathfrak{a}$ в этом рассуждении можно было бы рассматривать ассоциированные с ними векторы $\mathfrak{a}^{\perp}$, перпендикулярные данным плоскостям (см. п. 3 § 6 гл. 1). Однако это означает использование метрических понятий. Если оставаться в рамках аффинной геометрии, то использование бивекторов неизбежно (быть может, в завуалированной форме).

Параллельные плоскости совпадают, если они имеют хотя бы одну общую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, т. е. если существуют такие числа x_0, y_0, z_0, что

$$\begin{gathered} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Пусть $A = \rho A_1$, $B = \rho B_1$, $C = \rho C_1$. Вычитая из первого из равенств (1) второе, умноженное на ρ, мы немедленно получим, что $D - \rho D_1 = 0$, т. е. что $D = \rho D_1$. Ясно, что обратное также верно: если $D = \rho D_1$, то рассматриваемые плоскости совпадают. Тем самым доказано следующее

Предложение 2.

$$\Pi = \Pi_1 \iff \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{D}{D_1} \iff R = 1.$$

Здесь R — ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix}.$$

Это — теорема единственности для поверхностей первого порядка.

Оба доказанных утверждения можно объединить в следующую теорему о взаимном расположении двух плоскостей:

Теорема 1.

а) *плоскости* Π *и* Π_1 *пересекаются (по прямой)* $\iff r = 2$;

б) $\Pi \parallel \Pi_1$, *но* $\Pi \neq \Pi_1 \iff r = 1,\ R = 2$;

в) $\Pi = \Pi_1 \iff R = 1$.

В частности,

плоскости Π *и* Π_1 *тогда и только тогда имеют хотя бы одну общую точку, когда* $r = R$.

Это — снова специальный случай теоремы Кронекера — Капелли.

Для трех плоскостей Π, Π_1, Π_2 в пространстве возможны восемь существенно различных типов их взаимного расположения:

Тип 1. Плоскости попарно не параллельны и имеют одну и только одну общую точку; это — *общий тип.*

Тип 2. Плоскости попарно не параллельны, но прямые, по которым они попарно пересекаются, параллельны между собой и не совпадают (в этом случае плоскости не имеют ни одной общей точки и вырезают из пространства бесконечную треугольную призму).

Тип 3. Две из плоскостей параллельны, но не совпадают, а третья их пересекает.

Тип 4. Плоскости попарно не параллельны и имеют общую прямую.

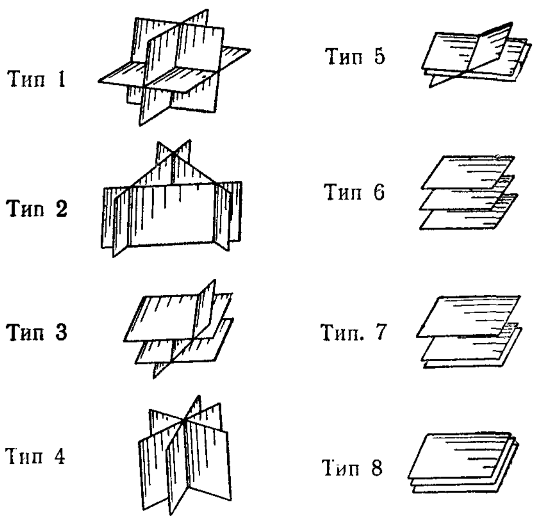
Тип 5. Две плоскости совпадают, а третья их пересекает.

Тип 6. Все три плоскости параллельны, но никакие две из них не совпадают.

Тип 7. Две плоскости совпадают, а третья им параллельна, но от них отлична.

Тип 8. Все три плоскости совпадают.

Схематически:



Для исследования этих типов взаимного расположения удобно рассмотреть следующие пять случаев:

Случай 1 (тип 1): имеется хотя бы одна пара непараллельных плоскостей и прямая их пересечения пересекает третью плоскость.

Случай 2 (типы 2 и 3): имеется хотя бы одна пара непараллельных плоскостей и прямая их пересечения параллельна третьей плоскости (но в ней не содержится).

Случай 3 (типы 4 и 5): имеется хотя бы одна пара непараллельных плоскостей и прямая их пересечения содержится в третьей плоскости.

С л у ч а й 4 (типы 6 и 7): все плоскости параллельны и среди них по крайней мере две не совпадают.

С л у ч а й 5 (тип 8): все плоскости совпадают.

Пусть r — ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix},$$

а R — ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$

Оказывается, что справедлива следующая т е о р е м а о в з а и м н о м р а с п о л о ж е н и и т р е х п л о с к о с т е й в п р о с т р а н с т в е:

Теорема 2.

$$\begin{aligned} &\textit{Случай } 1 \Leftrightarrow r=3,\ R=3; \\ &\textit{случай } 2 \Leftrightarrow r=2,\ R=3; \\ &\textit{случай } 3 \Leftrightarrow r=2,\ R=2; \\ &\textit{случай } 4 \Leftrightarrow r=1,\ R=2; \\ &\textit{случай } 5 \Leftrightarrow r=1,\ R=1. \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 2 из п. 3 § 1, и мы его опустим.

Упражнение. Докажите теорему 2.

Из теоремы 2 снова вытекает соответствующий частный случай теоремы Кронекера — Капелли:

три плоскости тогда и только тогда имеют хотя бы одну общую точку, когда $r = R$.

4. Полупространства, на которые плоскость разбивает пространство

Подобно тому как прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, плоскость разбивает пространство на два полупространства: точки M_1 и M_2 (не принадлежащие плоскости) тогда и только тогда принадлежат одному полупространству, когда отрезок $\overline{M_1M_2}$ не пересекает плоскость.

Пусть рассматриваемая плоскость задана уравнением

$$F(x, y, z) \equiv Ax + By + Cz + D = 0.$$

Предложение 1. *Точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ тогда и только тогда принадлежат одному полупространству, когда числа $F(x_1, y_1, z_1)$ и $F(x_2, y_2, z_2)$ имеют один и тот же знак.*

Доказательство (вполне аналогичное доказательству предложения 1 из п. 4 § 1). Рассмотрим прямую, проходящую через точки M_1 и M_2. Как было показано в п. 2 § 1, ее параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} x &= (1-t)\,x_1 + tx_2, \\ y &= (1-t)\,y_1 + ty_2, \\ z &= (1-t)\,z_1 + tz_2, \end{aligned} \tag{1}$$

причем точкам отрезка $\overline{M_1M_2}$ отвечают значения параметра, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Чтобы найти точку пересечения этой прямой с нашей плоскостью (когда эта точка существует), следует подставить выражения (1) в уравнение плоскости и решить получающееся уравнение относительно t. Сделав это, мы немедленно получим, что точке пересечения отвечает значение параметра

$$t_0 = \frac{F(x_1, y_1, z_1)}{F(x_1, y_1, z_1) - F(x_2, y_2, z_2)}. \tag{2}$$

Но, по определению, точки M_1 и M_2 тогда и только тогда лежат в разных полупространствах, когда точка пересечения существует и принадлежит отрезку $\overline{M_1M_2}$, т. е. когда t_0 определено и $0 < t_0 < 1$. Для завершения доказательства остается заметить, что в силу формулы (2) условие $0 < t_0 < 1$ равносильно тому, что числа $F(x_1, y_1, z_1)$ и $F(x_2, y_2, z_2)$ имеют разные знаки.

Таким образом, при данном уравнении плоскости П:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

точки одного полупространства, на которые эта плоскость делит пространство, характеризуются неравенством $Ax + By + Cz + D > 0$, а точки другого полупространства — неравенством $Ax + By + Cz + D < 0$. В соответствии с этим первое полупространство называется *положительным* (относительно данного уравнения плоскости), а второе — *отрицательным.*

Используя терминологию, введенную в п. 4 § 4 гл. 1, мы можем сказать, что *задание уравнения плоскости определяет некоторую сторону этой плоскости.* Но поскольку у нас в пространстве задана аффинная координатная система, пространство ориентировано, а задание в ориентированном пространстве некоторой стороны плоскости равносильно заданию ориентации этой плоскости (п. 4 § 4 гл. 1). Таким образом,

каждое уравнение плоскости задает некоторую ориентацию этой плоскости; при умножении уравнения на положительное число эта ориентация не меняется, а при умножении на отрицательное число — переходит в противоположную.

Ориентация плоскости, соответствующая уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$, задается ее направляющим бивектором α, обладающим тем свойством, что внешнее произведение $\mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{n}$ бивектора $\mathfrak{a}$ и некоторого вектора $\boldsymbol{n}$, направленного в положительную сторону плоскости, определяет ту же ориентацию пространства, что и внешнее произведение $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$ векторов координатного базиса.

Чтобы найти этот бивектор, мы заметим сначала, что

вектор $\boldsymbol{n}(A, B, C)$ *направлен в положительную сторону плоскости* Π.

Действительно, пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка плоскости и пусть $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_0M_1}$. Тогда точка M_1 имеет координаты $x_0 + A$, $y_0 + B$ и $z_0 + C$. Остается заметить, что

$$A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C(z_0 + C) + D = A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Отсюда немедленно вытекает, что

описанная выше ориентация плоскости Π *задается направляющим бивектором* $\mathfrak{a}(A, B, C)$.

Действительно,

$$\mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{n} = (A(\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) + B(\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1) + C(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2)) \wedge (A\boldsymbol{e}_1 + B\boldsymbol{e}_2 + C\boldsymbol{e}_3) = \\ = (A^2 + B^2 + C^2)(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3).$$

Поскольку $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, ориентации тривекторов $\mathfrak{a} \wedge \boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$ совпадают.

5. Плоскость в евклидовом пространстве

Мы переходим теперь к изучению евклидовых (метрических) свойств плоскостей в пространстве. В соответствии с этим мы будем впредь считать наши координаты x, y, z *прямоугольными*.

В евклидовом пространстве каждую плоскость можно задать ее произвольной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и некоторым (отличным от нуля) вектором $\boldsymbol{n}$, перпендикулярным этой плоскости. Для любой точки $M(x, y, z)$ рассматриваемой плоскости вектор $\overrightarrow{M_0M}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{n}$ и потому скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$\boldsymbol{n}\overrightarrow{M_0M} = 0.$$

Обозначая радиус-вектор точки M_0 через $\boldsymbol{r}_0$, а радиус-вектор точки M — через $\boldsymbol{r}$, мы можем это равенство записать в следующем виде:

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0 \tag{1}$$

или, раскрывая скобки, — в виде

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{r} - p = 0, \tag{2}$$

где $p = \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_0$. Таким образом, радиус-вектор каждой точки нашей плоскости удовлетворяет уравнениям (1) или (2). Ясно, что и обратно, если радиус-вектор некоторой точки M удовлетворяет уравнениям (1) или (2), то эта точка принадлежит рассматриваемой плоскости. В соответствии с этим уравнения (1) и (2) называются *уравнениями плоскости в векторной форме.*

Обозначая координаты вектора $\boldsymbol{n}$ через A, B, C и полагая $D=-p$, мы можем уравнение (2) переписать в уже известной нам *координатной форме*

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Аналогично, уравнение (1) дает нам *общее уравнение плоскости, проходящей через данную точку*:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Замечание 1. Изложенные соображения еще раз независимо показывают (правда, только для евклидова пространства), что любую плоскость можно задать уравнением первого порядка.

Кроме того, мы видим, что
вектор $\boldsymbol{n}(A, B, C)$ перпендикулярен плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Замечание 2. Таким образом, вектор $\boldsymbol{a}(l, m, n)$ тогда и только тогда параллелен плоскости, когда он ортогонален вектору $\boldsymbol{n}(A, B, C)$, т. е. когда

$$Al+Bm+Cn=0.$$

Это — уже известная нам формула (1) из п. 1. Подчеркнем, что согласно п. 1 она имеет место в любых аффинных координатах, когда вектор $\boldsymbol{n}(A, B, C)$ уже не перпендикулярен плоскости (а скалярное произведение двух векторов не является суммой произведений одноименных координат).

Рассмотрим случай, когда вектор $\boldsymbol{n}$ является ортом (единичным вектором). Обозначая координаты этого орта через $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (это — его направляющие косинусы; см. п. 5 § 5 гл. 1) мы получаем в этом случае для рассматриваемой плоскости уравнение

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.$$

При $p\geqslant 0$ (чего всегда можно добиться заменой, в случае необходимости, вектора $\boldsymbol{n}$ противоположным вектором $-\boldsymbol{n}$) это уравнение называется *нормальным уравнением* плоскости. Таким образом, уравнение

$$Ax+By+Cz+D=0$$

является нормальным уравнением, если

$$A^2+B^2+C^2=1 \quad \text{и} \quad D\leqslant 0.$$

Чтобы из общего уравнения плоскости получить ее нормальное уравнение, достаточно умножить его на «нормирующий множитель»

$$\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Знак нормирующего множителя следует выбирать противоположным знаку свободного члена D (если $D\neq 0$; при $D=0$ можно взять любой знак).

Заметим, что *при* $D\neq 0$ *нормальное уравнение однозначно определено плоскостью*, а при $D=0$ (т. е. в случае, когда плоскость проходит через начало координат) имеется два нормальных уравнения, получающихся друг из друга умножением на -1.

Предложение 1. *Расстояние d произвольной точки $M(x,y,z)$ от плоскости с нормальным уравнением*

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

равно абсолютной величине числа, получающегося при подстановке координат этой точки в уравнение плоскости:

$$d=|x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p| \tag{3}$$

(*как мы уже знаем, число* $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p$ *отрицательно, если точка* M *расположена по ту же сторону плоскости, что и начало координат, и положительно в противном случае*).

Доказательство этого предложения по существу дословно совпадает с доказательством соответствующего предложения 1 из п. 5 § 1, и мы его опустим.

Задание. Докажите предложение 1.

В частности, мы видим, что

коэффициент p равен расстоянию от начала координат до плоскости, т. е. равен длине перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость.

Две (пересекающиеся) плоскости Π_1 и Π_2 образуют два смежных угла, сумма которых равна π. Если плоскости параллельны или совпадают, то угол между ними, по определению, считается равным 0 (или π).

Один из углов между плоскостями Π_1 и Π_2 (обозначим его символом θ) совпадает с углом между векторами $\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, перпендикулярными этим плоскостям. Поэтому

$$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{4}$$

При $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 > 0$ угол θ — острый, а при $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 < 0$ — тупой. При $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ этот угол равен $\pi/2$. Таким образом,

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Чтобы получить острый (точнее — не тупой) угол между плоскостями, следует правую часть формулы (4) взять по абсолютной величине.

В случае, когда плоскости Π_1 и Π_2 заданы нормальными уравнениями

$$x \cos\alpha_1 + y \cos\beta_1 + z \cos\gamma_1 - p_1 = 0$$

и

$$x \cos\alpha_2 + y \cos\beta_2 + z \cos\gamma_2 - p_2 = 0,$$

угол θ между ними определяется формулой

$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2.$$

В частности,

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \iff \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0.$$

Далее можно продолжать так же, как и для прямых (ввести углы φ и θ' и получить для них соответствующие формулы). Без сомнения, читатель может теперь это сделать самостоятельно и потому мы этим заниматься здесь не будем.

§ 3. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Прямая в аффинном пространстве

Любая прямая в пространстве является пересечением двух непараллельных плоскостей и потому задается (в фиксированной аффинной координатной системе $Oxyz$) двумя уравнениями первой степени

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Для того чтобы такие уравнения являлись уравнениями некоторой прямой, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие плоскости были не параллельны, т. е. чтобы ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

был равен двум.

Прямую в пространстве можно задавать также ее произвольной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и некоторым отличным от нуля