При $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2>0$ угол θ — острый, а при $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2<0$ — тупой. При $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ этот угол равен $\pi/2$. Таким образом,

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \iff A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Чтобы получить острый (точнее — не тупой) угол между плоскостями, следует правую часть формулы (4) взять по абсолютной величине.

В случае, когда плоскости Π_1 и Π_2 заданы нормальными уравнениями

$$x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-p_1=0$$

и

$$x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2-p_2=0,$$

угол θ между ними определяется формулой

$$\cos\theta=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2.$$

В частности,

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \iff \cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0.$$

Далее можно продолжать так же, как и для прямых (ввести углы φ и θ' и получить для них соответствующие формулы). Без сомнения, читатель может теперь это сделать самостоятельно и потому мы этим заниматься здесь не будем.

§ 3. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Прямая в аффинном пространстве

Любая прямая в пространстве является пересечением двух непараллельных плоскостей и потому задается (в фиксированной аффинной координатной системе $Oxyz$) двумя уравнениями первой степени

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Для того чтобы такие уравнения являлись уравнениями некоторой прямой, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие плоскости были не параллельны, т. е. чтобы ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

был равен двум.

Прямую в пространстве можно задавать также ее произвольной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и некоторым отличным от нуля вектором $\boldsymbol{a}(l, m, n)$, параллельным этой прямой (т. е. ее *направляющим вектором*; ср. п. 2 § 1). На этом пути мы приходим к *параметрическим уравнениям*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tl, \\ y &= y_0 + tm, \\ z &= z_0 + tn \end{aligned}$$

прямой и к ее *каноническим уравнениям*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

двумя разными способами выражающим тот факт, что точка $M(x, y, z)$ тогда и только тогда принадлежит прямой, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$ (ср. п. 2 § 1).

Заметим, что хотя канонических уравнений формально три:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{z - z_0}{n}, \quad \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

но каждое из них является следствием двух других, так что на самом деле мы имеем, как и полагается, только два независимых уравнения.

Чтобы от общих уравнений

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

перейти к каноническим уравнениям, нужно найти

1) хотя бы одну точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой (2);

2) некоторый ее направляющий вектор $\boldsymbol{a}(l, m, n)$.

Для нахождения точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ следует одному из неизвестных x, y, z в уравнениях (2) придать произвольное значение (скажем, 0) и решить получающуюся систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Чтобы обеспечить существование решения, нужно при этом «свободную» неизвестную (которой мы придаем произвольное значение) выбрать так, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при других двух неизвестных, был отличен от нуля (это всегда можно сделать, поскольку ранг матрицы (1) по условию равен двум).

Чтобы найти направляющий вектор, можно, например, найти на данной прямой вторую точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, отличную от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (для этого достаточно дать свободной неизвестной иное значение) и принять за вектор $\boldsymbol{a}$ вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$.

Можно поступить и более «инвариантным» образом, заметив, что вектор $\boldsymbol{a}$ тогда и только тогда является направляющим вектором прямой, когда он параллелен обеим плоскостям, пересечением которых является эта прямая, т. е. (см. п. 2 § 2) когда его координаты l, m, n удовлетворяют уравнениям

$$A_1l+B_1m+C_1n=0,$$
$$A_2l+B_2m+C_2n=0.$$

Тривиальное вычисление показывает, что этим уравнениям удовлетворяют, например, числа

$$l=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad m=-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad n=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

(среди которых хотя бы одно не равно нулю). Таким образом, эти числа можно принять за координаты вектора $\boldsymbol{a}$.

Этот направляющий вектор можно записать в следующем виде:

$$\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

удобном для запоминания.

Замечание 1. В случае прямоугольных координат (и только в этом случае!) — т. е. в случае, когда базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ ортонормирован — вектор $\boldsymbol{a}$ является векторным произведением векторов $\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, перпендикулярных рассматриваемым плоскостям.

Из полученных формул для направляющего вектора $\boldsymbol{a}$ немедленно вытекает, в частности, что

для прямой

$$\lambda: \begin{matrix} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{matrix}$$

имеют место следующие эквивалентности:

а) $\lambda \parallel Oxy \iff \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0,$

б) $\lambda \parallel Oxz \iff \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}=0,$

в) $\lambda \parallel Oyz \iff \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0.$

Замечание 2. Мы видим, таким образом, что равенство нулю какого-либо минора матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

имеет (при фиксированной координатной системе) *инвариантный геометрический смысл*, т. е. сохраняется при любом другом выборе пары плоскостей, определяющих данную прямую. В дополнении к § 2 гл. 4 мы выясним причины этого.

В случае, когда $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, т. е. когда рассматриваемая прямая не параллельна координатной плоскости Oxy, мы можем решить уравнения этой прямой относительно x и y, т. е. привести их к виду

$$\begin{aligned} x &= az + p, \\ y &= bz + q. \end{aligned} \tag{3}$$

Такие уравнения прямой называются ее *приведенными уравнениями*. Задание прямой приведенными уравнениями означает ее представление в виде пересечения двух плоскостей, одна из которых параллельна оси ординат Oy (плоскость $x = az + p$), а другая — оси абсцисс Ox (плоскость $y = bz + q$). Первое из уравнений (3) (уравнение $x = az + p$) является одновременно уравнением проекции данной прямой (параллельно оси Oy) на плоскость Oxz (в имеющихся на этой плоскости координатах x, z), а второе (уравнение $y = bz + q$) — уравнением проекции данной прямой (параллельно оси Ox) на плоскость Oyz (в имеющихся на этой плоскости координатах y, z).

Чтобы помочь читателю освоиться с уравнениями прямой, решим для примера две простые задачи на прямую и плоскость.

Задача 1. *Найти плоскость, проходящую через прямую*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

и точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, не лежащую на этой прямой.

Ясно, что точка $M(x, y, z)$ тогда и только тогда принадлежит искомой плоскости, когда векторы

$$\overrightarrow{M_0M}(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0), \quad \overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$$

и

$$\mathbf{a}(l, m, n)$$

компланарны. Поэтому уравнение этой плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

Это действительно уравнение первой степени (т. е. хотя бы один из коэффициентов при x, y, z отличен от нуля), поскольку векторы $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ и $\mathbf{a}(l, m, n)$ не коллинеарны.

Задача 2. Найти плоскость, проходящую через прямую

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

параллельно прямой

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

в предположении, что эти прямые не параллельны (иначе задача была бы неопределенной).

Искомая плоскость может быть рассматриваема как плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно неколлинеарным векторам $\mathbf{a}(l, m, n)$ и $\mathbf{a}_1(l_1, m_1, n_1)$. Следовательно (п. 2 § 2), ее уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}=0.$$

2. Взаимное расположение прямых и плоскостей

Две прямые λ_1 и λ_2 в пространстве могут

а) скрещиваться (т. е. не принадлежать одной плоскости); это — *общий тип* расположения двух прямых в пространстве;

б) пересекаться (и потому лежать в одной плоскости);

в) быть параллельными (и потому также лежать в одной плоскости), но не совпадать;

г) совпадать.

Пусть прямые λ_1 и λ_2 заданы их каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

и

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Рассмотрим направляющие векторы $\mathbf{a}_1(l_1, m_1, n_1)$, $\mathbf{a}_2(l_2, m_2, n_2)$ этих прямых и вектор $\mathbf{r}=\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$. Очевидно, что прямые тогда и только тогда скрещиваются, когда векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{r}$ не компланарны. Если эти векторы компланарны, но векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не коллинеарны, то прямые пересекаются. Если векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны, но не коллинеарны вектору $\mathbf{r}$, то прямые параллельны, но не совпадают. Если все три вектора $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{r}$ попарно коллинеарны, то прямые совпадают. Вспоминая условия компланарности и коллинеарности векторов и обозначая через r ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix},$$

а через R — ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

мы немедленно получаем отсюда, что

прямые λ_1 *и* λ_2

а) *скрещиваются* $\Leftrightarrow R = 3$;

б) *пересекаются* $\Leftrightarrow r = 2,\ R = 2$;

в) *параллельны* $\Leftrightarrow r = 1,\ R = 2$;

г) *совпадают* $\Leftrightarrow r = 1,\ R = 1$.

В частности,

прямые λ_1 *и* λ_2 *тогда и только тогда компланарны* (*лежат в одной плоскости*), *когда определитель матрицы* (1) *равен нулю.*

Прямая λ и плоскость Π в пространстве могут

а) пересекаться в единственной точке; это — *общий тип* расположения прямой и плоскости в пространстве;

б) не иметь ни одной общей точки (прямая параллельна плоскости, но в ней не содержится);

в) быть инцидентными (по определению, это означает, что прямая содержится в плоскости).

Пусть прямая λ задана каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

а плоскость Π — общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Прямая тогда и только тогда пересекает плоскость в единственной точке, когда ее направляющий вектор $\boldsymbol{a}(l, m, n)$ не параллелен этой плоскости, т. е. (п. 2 § 2) когда

$$Al + Bm + Cn \neq 0.$$

Если $Al + Bm + Cn = 0$, но ни одна точка прямой, и, в частности, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не принадлежит плоскости, то прямая и плоскость параллельны, но не инцидентны. Наконец, если $Al + Bm + Cn = 0$ и точка M_0 принадлежит плоскости ($Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$), то прямая инцидентна плоскости. Таким образом,

прямая λ *и плоскость* Π

а) *пересекаются* $\Leftrightarrow Al + Bm + Cn \neq 0$;

б) *параллельны, но не инцидентны* $\Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0$, *но* $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$;

в) *инцидентны* $\Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0$ *и* $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Это утверждение можно доказать и по-иному, если поставить задачу о разыскании точек пересечения (общих точек) прямой и плоскости. Параметрические уравнения нашей прямой имеют вид

$$x = x_0 + lt,$$
$$y = y_0 + mt,$$
$$z = z_0 + nt,$$

и потому значения параметра t, соответствующие точкам пересечения, определяются из уравнения

$$A(x_0 + lt) + B(y_0 + mt) + C(z_0 + nt) + D = 0,$$

т. е. из уравнения

$$(Al + Bm + Cn)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0.$$

При $Al + Bm + Cn \neq 0$ это уравнение имеет единственное решение (и, следовательно, имеет место случай а)), при $Al + Bm + Cn = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ это уравнение не имеет решений (случай б)), а при $Al + Bm + Cn = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ оно удовлетворяется тождественно (случай в)).

Вопрос о взаимном расположении прямой и плоскости можно ставить и тогда, когда прямая λ задана своими общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

В этом случае все сводится к теореме 2 п. 3 § 2 о взаимном расположении трех плоскостей.

Пусть r — ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix},$$

а R — ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 2 п. 3 § 2

прямая λ *и плоскость* Π

а) *пересекаются в одной точке* $\Leftrightarrow$ $r = 3,\ R = 3$;

б) *параллельны, но не инцидентны* $\Leftrightarrow$ $r = 2,\ R = 3$;

в) *инцидентны* $\Leftrightarrow$ $r = 2,\ R = 2$.

Действительно, случай а) имеет место тогда и только тогда, когда все три рассматриваемые плоскости расположены по типу 1, случай б) — когда они расположены по типу 2 или 3, а случай в) — когда они расположены по типу 4 или 5. (Заметим, что типы расположения 6, 7 и 8 в рассматриваемом случае невозможны.)

3. Прямая в евклидовом пространстве

Напомним, что расстоянием точки от прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Пусть

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{1}$$

— канонические уравнения произвольной прямой. Для любой точки $M(x, y, z)$ (с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$), не принадлежащей этой прямой, рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{a}(l, m, n)$ (имеется в виду, что эти векторы отложены от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Высота этого параллелограмма равна, по определению, расстоянию d точки M от прямой (1). Поэтому его площадь равна произведению расстояния d на длину $|\boldsymbol{a}|$ вектора $\boldsymbol{a}$. Но эта площадь равна площади бивектора $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\wedge\boldsymbol{a}$ (т. е. длине $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{a}|$ векторного произведения [1]) $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{a})$. Следовательно,

расстояние d точки $M(x, y, z)$ от прямой (1) *выражается формулой*

$$d=\frac{|(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{2}$$

В координатах эта формула имеет вид

$$d=\frac{\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ l & m\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-x_0 & z-z_0 \\ l & n\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ m & n\end{vmatrix}^2}{l^2+m^2+n^2}.$$

Формулу (2) можно получить и иначе, заметив, что по известной теореме о перпендикуляре и наклонной, расстояние d точки M от прямой является минимумом расстояний от этой точки до произвольной точки рассматриваемой прямой. Поскольку каждая точка нашей прямой имеет радиус-вектор $\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t$, где t — некоторое число, мы, обозначая расстояние от точки M до этой точки символом $\omega(t)$, можем поэтому написать, что

$$d=\min_t \omega(t),$$

где минимум берется по всем вещественным t. Для вычислений удобнее эту формулу возвести в квадрат:

$$d^2=\min_t \omega^2(t).$$

---

[1]) Поскольку наши рассуждения имеют сугубо метрический характер, переход от бивекторов к ассоциированным векторам вполне оправдан.

Согласно формуле для расстояния между двумя точками

$$\omega^2(t) = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{a}t)^2,$$

где $\boldsymbol{r}$, как и выше, — радиус-вектор точки M. Дифференцируя эту формулу по t (легко видеть, что обычные правила дифференцирования суммы и произведения остаются справедливыми и для векторов[1])), мы немедленно находим, что

$$\frac{d\omega^2(t)}{dt} = -2(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{a}t)\boldsymbol{a}, \qquad \frac{d^2\omega^2(t)}{dt^2} = 2\boldsymbol{a}^2 > 0.$$

Поскольку $\frac{d^2\omega^2(t)}{dt^2} > 0$, значение t, при котором $\frac{d\omega^2(t)}{dt} = 0$, соответствует минимуму функции $\omega^2(t)$. Это значение, очевидно, равно

$$t_0 = \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2}.$$

Следовательно,

$$d^2 = \omega^2(t_0) = \left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 - \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}\right)^2 = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)^2 - 2\frac{((\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a})^2}{\boldsymbol{a}^2} + \frac{((\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a})^2}{\boldsymbol{a}^2} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)^2 - \frac{((\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a})^2}{\boldsymbol{a}^2}.$$

Полученную формулу можно переписать в более симметричном виде:

$$d^2 = \frac{\begin{vmatrix} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)^2 & \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \\ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}^2 \end{vmatrix}}{\boldsymbol{a}^2}.$$

Определитель в числителе является не чем иным, как определителем Грама $\Gamma(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})$ векторов $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{a}$ (см. п. 4 § 6 гл. 1), и потому он равен квадрату площади их внешнего произведения. Следовательно, окончательно,

$$d = \frac{|(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \wedge \boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|},$$

что совпадает с полученным выше результатом.

Заметим, что мы не только вычислили минимум, но и доказали его существование.

Кроме того, мы теперь без особого труда можем написать параметрические (или, что равносильно, канонические) уравнения перпендикуляра, опущенного из произвольной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на прямую (1).

Действительно, как мы видели, основанию этого перпендикуляра соответствует значение

$$t_0 = \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2}$$

параметра t. Поэтому его радиус-вектор равен

$$\boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a},$$

откуда после тривиальных алгебраических преобразований получается, что *перпендикуляр, опущенный из точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на прямую*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t,$$

---

[1]) Проще всего это проверить, написав соответствующие формулы в координатах.

задается параметрическим уравнением

$$r = \frac{\begin{vmatrix} (1-t)\boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{r}_1 & (1-t)\boldsymbol{a} \\ (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}^2 \end{vmatrix}}{\boldsymbol{a}^2}. \qquad (3)$$

Напомним, что *углом* между двумя прямыми в пространстве называется угол между параллельными им прямыми, проходящими через произвольную точку (и потому лежащими в одной плоскости). Очевидно, что это определение корректно (не зависит от выбора точки). Оно дает для угла между прямыми два значения, дополняющие друг друга до π.

Один из этих дополнительных углов равен, очевидно, углу θ между направляющими векторами рассматриваемых прямых. Поэтому

для угла θ между прямыми

$$\lambda_1\colon\ \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

и

$$\lambda_2\colon\ \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

справедлива формула

$$\cos\theta = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \qquad (4)$$

Угол θ — тупой, если $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 < 0$, острый, — если $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 > 0$, и равен $\pi/2$, если $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$.

Чтобы получить острый (точнее — не тупой) угол между прямыми, следует правую часть формулы (4) взять по абсолютной величине.

В частности, мы видим, что

$$\lambda_1 \perp \lambda_2 \iff l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0.$$

Угол *между прямой и плоскостью*, подобно углу между двумя прямыми, принимает, вообще говоря, два значения, дополняющие друг друга до π. Мы будем интересоваться только острым (точнее — не тупым) из этих двух углов. Обозначим его через θ. Этот угол можно определить как дополнение до $\pi/2$ нетупого угла φ между данной прямой и перпендикуляром к данной плоскости:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

При $\varphi \neq 0$, т. е. в случае когда прямая и плоскость не перпендикулярны, угол θ можно также определить как острый угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость.

Пусть прямая λ задана ее каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

а плоскость П — ее общим уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

По определению, угол φ является либо углом между векторами $\boldsymbol{a}(l, m, n)$ и $\boldsymbol{n}(A, B, C)$, либо представляет собой дополнение этого угла до π. Поэтому

$$\cos\varphi=\left|\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\right|.$$

Но $\cos\varphi=\sin\theta$, ибо $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$. Следовательно,

$$\sin\theta=\left|\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\right|. \tag{5}$$

В частности, мы снова получаем, что

$$\lambda \parallel \Pi \iff Al+Bm+Cn=0.$$

Из формулы (5) довольно трудно получить условие, когда $\theta=\pi/2$, т. е. когда $\lambda\perp\Pi$. Проще, не пользуясь этой формулой, непосредственно воспользоваться тем, что вектор $\boldsymbol{a}(l, m, n)$ параллелен прямой λ, а вектор $\boldsymbol{n}(A, B, C)$ перпендикулярен плоскости П. Поэтому

$$\lambda\perp\Pi \iff \frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}.$$

Отсюда, в частности, непосредственно вытекает, что

уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

имеют вид

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C},$$

а уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно прямой

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n},$$

имеет вид

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0.$$

Плоскость, проходящая через прямую λ перпендикулярно плоскости П, может быть охарактеризована как плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно двум векторам $\boldsymbol{a}(l, m, n)$ и $\boldsymbol{n}(A, B, C)$ (мы предполагаем, что эти векторы не коллинеарны, т. е. что прямая λ и плоскость Π не перпендикулярны, ибо, в противном случае, искомая плоскость не была бы однозначно определена). Поэтому

уравнение плоскости, проходящей через прямую λ перпендикулярно плоскости Π, *имеет вид*

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично, перпендикуляр, опущенный из точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на прямую λ, является пересечением двух плоскостей: одной, проходящей через точку M_1 перпендикулярно прямой λ, и другой, проходящей через точку M_1 и прямую λ (см. задачу 1 в п. 1). Поэтому

перпендикуляр, опущенный из точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на прямую λ, может быть задан уравнениями

$$\begin{gathered} l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0 \\ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Упражнение. Сравните уравнения (6) с полученными выше параметрическими уравнениями этого перпендикуляра (см. формулы (3)).

4. Расстояние между двумя прямыми в пространстве

По определению, расстояние между двумя прямыми равно минимуму расстояний точек одной прямой до точек другой.

Если прямые пересекаются (или совпадают), то этот минимум равен нулю. Если прямые параллельны, то этот минимум равен расстоянию о произвольной точки одной прямой до другой прямой и может быть вычислен по формуле (2) предыдущего пункта. Поэтому вопрос о вычислении расстояния между двумя прямыми интересен лишь для скрещивающихся прямых.

Пусть

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$
$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

— канонические уравнения двух скрещивающихся прямых λ_1 и λ_2. Радиус-векторы точек прямой λ_1 имеют вид $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}_1t_1$, а прямой λ_2 — вид $\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{a}_2t_2$, где $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ — радиус-векторы точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ — направляющие векторы (l_1, m_1, n_1) и (l_2, m_2, n_2), а t_1 и t_2 — числовые параметры. Поэтому расстояние между точкой прямой λ_1, отвечающей значению параметра t_1, и точкой прямой λ_2, отвечающей значению параметра t_2, равно

$$\omega(t_1, t_2) = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_2 t_2 - \boldsymbol{a}_1 t_1|,$$

а квадрат этого расстояния равен

$$\omega^2(t_1, t_2) = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_2 t_2 - \boldsymbol{a}_1 t_1)^2.$$

По определению, расстояние d между рассматриваемыми прямыми выражается формулой

$$d = \min_{t_1, t_2} \omega(t_1, t_2),$$

а квадрат этого расстояния — формулой

$$d^2 = \min_{t_1, t_2} \omega^2(t_1, t_2),$$

где минимум берется по всем вещественным t_1 и t_2.

Чтобы найти этот минимум, вычислим [1]) частные производные функции $\omega^2(t_1, t_2)$ по t_1 и t_2. Имеем:

$$\frac{\partial \omega^2(t_1, t_2)}{\partial t_1} = -2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_2 t_2 - \boldsymbol{a}_1 t_1)\boldsymbol{a}_1,$$

$$\frac{\partial \omega^2(t_1, t_2)}{\partial t_2} = 2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_2 t_2 - \boldsymbol{a}_1 t_1)\boldsymbol{a}_2$$

и

$$\frac{\partial^2 \omega^2}{\partial t_1^2} = 2\boldsymbol{a}_1^2, \quad \frac{\partial^2 \omega^2}{\partial t_1 \partial t_2} = -2\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2, \quad \frac{\partial^2 \omega^2}{\partial t_2^2} = 2\boldsymbol{a}_2^2.$$

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \omega^2}{\partial t_1^2} & \dfrac{\partial^2 \omega^2}{\partial t_1 \partial t_2} \\ \dfrac{\partial^2 \omega^2}{\partial t_1 \partial t_2} & \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial t_2^2} \end{vmatrix} = 4\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) > 0,$$

где

$$\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1^2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^2 \end{vmatrix}$$

— определитель Грама векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Поэтому значения t_1 и t_2, при которых

$$\frac{\partial^2 \omega^2(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \frac{\partial^2 \omega^2(t_1, t_2)}{\partial t_2} = 0,$$

[1]) Читатель, не знакомый с аналитическими методами отыскания экстремумов функций двух переменных, найдет геометрический вывод формулы для расстояния d в конце этого пункта.

соответствуют минимуму функции $\omega^2(t_1, t_2)$, т. е. при этих значениях функция $\omega^2(t_1, t_2)$ равна квадрату d^2 искомого расстояния d.

Эти значения являются решениями системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_2 t_2 - \boldsymbol{a}_1 t_1)\,\boldsymbol{a}_1 &= 0,\\ (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_2 t_2 - \boldsymbol{a}_1 t_1)\,\boldsymbol{a}_2 &= 0,\end{aligned} \tag{1}$$

т. е. системы

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1^2 t_1 - \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 t_2 &= (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_1,\\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 t_1 - \boldsymbol{a}_2^2 t_2 &= (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_2\end{aligned}$$

с определителем $-\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \neq 0$, и потому выражаются формулами

$$t_1 = \frac{\begin{vmatrix}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\\ (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2^2\end{vmatrix}}{\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)},$$

$$t_2 = \frac{\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1^2 & (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 & (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_2\end{vmatrix}}{\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)}.$$

Подставив эти значения в формулу для $\omega^2(t_1, t_2)$, мы получим, что

$$d^2 = \left(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 - \frac{\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1^2 & (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 & (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_2\end{vmatrix}}{\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)}\,\boldsymbol{a}_2 - \frac{\begin{vmatrix}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\\ (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2^2\end{vmatrix}}{\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)}\,\boldsymbol{a}_1\right)^2.$$

Используя формулу разложения определителя третьего порядка по элементам первой строки и учитывая, что $\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1^2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^2\end{vmatrix}$, эту формулу можно записать в более симметричном виде:

$$d^2 = \frac{\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\\ (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\\ (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2^2\end{vmatrix}^2}{\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)^2}. \tag{2}$$

Формулу (2) можно привести к более простому виду. Мы не будем это делать прямым вычислением, а предпочтем обходной путь, не требующий почти никаких выкладок.

Пусть N_1 и N_2 — точки наших прямых, соответствующие найденным значениям параметров t_1 и t_2. Тогда

$$d^2 = (\overrightarrow{N_1N_2})^2,$$

причем, по доказанному,

$$\overrightarrow{N_1N_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_2 t_2 - \boldsymbol{a}_1 t_1 = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \\ (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 \\ (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2^2 \end{vmatrix}}{\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)}.$$

Заметим теперь, что уравнения (1) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N_1N_2}\,\boldsymbol{a}_1 &= 0, \\ \overrightarrow{N_1N_2}\,\boldsymbol{a}_2 &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

означающем, что вектор $\overrightarrow{N_1N_2}$ ортогонален векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Поэтому

$$d^2 = (\overrightarrow{N_1N_2})^2 = \overrightarrow{N_1N_2}\,(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_2 t_2 - \boldsymbol{a}_1 t_1) = \overrightarrow{N_1N_2}\,(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1).$$

Но умножение определителя, одна строка которого состоит из векторов, на некоторый вектор можно, очевидно[1]), произвести, умножая эту строку на данный вектор. Поэтому

$$d^2 = \frac{\begin{vmatrix} (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)^2 & \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) & \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \\ (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^2 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 \\ (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2^2 \end{vmatrix}}{\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)}.$$

Числитель этой формулы является определителем Грама $\Gamma(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ векторов $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Тем самым нами доказано, что

квадрат d^2 расстояния d между прямыми $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 t$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2 t$ выражается формулой

$$d^2 = \frac{\Gamma(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)}{\Gamma(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)}. \tag{4}$$

Поскольку определитель Грама трех векторов равен квадрату их смешанного произведения, а определитель Грама двух векторов равен квадрату длины их векторного произведения, формулу (4) можно переписать (извлекая квадратный корень) в следующем виде:

$$d = \frac{|(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|}. \tag{5}$$

---

[1]) Достаточно разложить определитель по элементам «векторной» строки.

В координатах формула (5) (до извлечения корня) имеет вид

$$d^2 = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}.$$

Подчеркнем, что мы не только нашли расстояние d, но и доказали, что оно существует, т. е. что соответствующий минимум достигается.

Замечание 1. Поскольку векторы $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ могут быть произвольными (не компланарными) векторами пространства, сравнение формул (2) и (4) показывает, что для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ справедлива формула

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{cb} \\ \boldsymbol{ac} & \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix}^2 = \Gamma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\,\Gamma(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

Упражнение. Докажите эту формулу прямым вычислением и выясните ее геометрический смысл. Напишите (и докажите) аналог этой формулы для двух векторов.

Как известно, *общим перпендикуляром* двух прямых λ_1 и λ_2 называется прямая, пересекающая каждую из прямых и им перпендикулярная. Из только что полученных результатов непосредственно вытекает, что

для любых двух скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр.

Действительно, пусть N_1 и N_2 — построенные выше точки прямых λ_1 и λ_2. Рассмотрим прямую N_1N_2. Согласно формулам (3) направляющий вектор $\overrightarrow{N_1N_2}$ этой прямой ортогонален направляющим векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ прямых λ_1 и λ_2, т. е. прямая N_1N_2 перпендикулярна этим прямым. Кроме того, она пересекает обе прямые λ_1 и λ_2. Следовательно, прямая N_1N_2 является их общим перпендикуляром.

Рассмотрим теперь произвольный общий перпендикуляр $N_1'N_2'$, проходящий через некоторые точки N_1' и N_2' прямых λ_1 и λ_2. Единственность общего перпендикуляра будет доказана, если мы покажем, что $N_1 = N_1'$ и $N_2 = N_2'$. С этой целью заметим, что поскольку прямая $N_1'N_2'$ перпендикулярна прямым λ_1 и λ_2, ее направляющий вектор $\overrightarrow{N_1'N_2'}$ ортогонален направляющим векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, т. е. для него имеют место равенства (3). Но эти равенства равносильны уравнениям (1), т. е. тому, что при соответствующих значениях параметров t_1 и t_2 обращаются в нуль частные производные $\frac{\partial\omega^2(t_1, t_2)}{\partial t_1}$ и $\frac{\partial\omega^2(t_1, t_2)}{\partial t^2}$. Но мы уже видели, что эти частные производные обращаются в нуль только для одних вполне определенных значений t_1 и t_2, которым соответствуют точки N_1 и N_2. Следовательно, $N_1'=N_1$ и $N_2'=N_2$. Тем самым существование и единственность общего перпендикуляра полностью доказаны.

Для пересекающихся прямых также существует единственный общий перпендикуляр (проходящий через точку их пересечения перпендикулярно плоскости, в которой эти прямые содержатся). Для параллельных (или совпадающих) прямых существует бесчисленное множество общих перпендикуляров.

Пользуясь полученными выше формулами, можно также без труда написать и уравнения общего перпендикуляра. Поскольку нам известна его точка N_1 с радиус-вектором

$$\boldsymbol{r}_1+\frac{\begin{vmatrix}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\\ (\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2^2\end{vmatrix}}{\Gamma(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)}\boldsymbol{a}_1$$

и направляющий вектор

$$\overrightarrow{N_1N_2}=\frac{\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\\ (\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^2 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1\\ (\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2^2\end{vmatrix}}{\Gamma(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)},$$

проще всего написать его параметрические (или канонические) уравнения. Сделав это, мы после тривиальных алгебраических преобразований получим, что

векторное параметрическое уравнение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}_1t$ *и* $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{a}_2t$ *может быть записано в следующем виде*:

$$\boldsymbol{r}=\frac{\begin{vmatrix}(1-t)\boldsymbol{r}_1+t\boldsymbol{r}_2 & -(1-t)\boldsymbol{a}_1 & t\boldsymbol{a}_2\\ (\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^2 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1\\ (\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2^2\end{vmatrix}}{\Gamma(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)}. \qquad (\theta)$$

Чтобы получить *общие уравнения* общего перпендикуляра, т. е. представить этот перпендикуляр в виде пересечения двух плоскостей, удобнее всего рассмотреть плоскости, содержащие этот перпендикуляр и одну из данных прямых. Первую из этих плоскостей можно определить как плоскость, проходящую через точку M_1 параллельно неколлинеарным векторам $\overrightarrow{N_1N_2}$ и $\boldsymbol{a}_1$, а вторую — как плоскость, проходящую через точку M_2 параллельно неколлинеарным векторам $\overrightarrow{N_1N_2}$ и $\boldsymbol{a}_2$. Получающиеся формулы можно упростить, заметив, что вектор $\overrightarrow{N_1N_2}$, будучи ортогональным неколлинеарным векторам $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, коллинеарен их векторному произведению $a_1 \times a_2$ и потому может быть им заменен. Переходя к координатам, мы получаем, что

общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad и \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

может быть задан уравнениями

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0, \\
&\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Замечание 2. Тот факт, что векторное произведение $a_1 \times a_2$ коллинеарно вектору $\overrightarrow{N_1N_2}$, означает, что для любых трех векторов $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ вектор

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{r} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{ra} & \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{ba} \\ \boldsymbol{rb} & \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{b}^2 \end{vmatrix}$$

с точностью до коллинеарности не зависит от вектора $\boldsymbol{r}$. Это показывает, что должна иметь место формула

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{r} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{ra} & \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{ba} \\ \boldsymbol{rb} & \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{b}^2 \end{vmatrix} = C(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}), \qquad (8)$$

где C — некоторый числовой коэффициент (зависящий от векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{r}$).

Упражнение. Докажите формулу (8) прямым вычислением и найдите коэффициент C.

Допуская определенную вольность речи, принято называть *длиной общего перпендикуляра* двух скрещивающихся прямых длину его отрезка $\overline{N_1N_2}$. Но, как мы знаем, длина этого отрезка равна расстоянию d между прямыми. Следовательно,

длина общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых равна расстоянию между этими прямыми.

Это открывает возможности для воспроизведения полученных выше результатов более геометрическим образом. Для этого следует, в первую очередь, **о п р е д е л и т ь** расстояние между двумя скрещивающимися прямыми λ_1 и λ_2 как длину их общего перпендикуляра, предварительно доказав, конечно, его существование и единственность (что без труда делается на основе стандартных элементарно-геометрических соображений). Затем можно рассуждать, например, следующим образом.

Рассмотрим параллелепипед, построенный на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ (отложенных от точки M_1). Высота этого параллелепипеда равна, очевидно, длине d общего перпендикуляра прямых λ_1 и λ_2, а его основание является параллелограммом, построенным на векторах $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Поэтому длина d равна отношению объема параллелепипеда (т. е. абсолютного значения величины смешанного произведения $(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$ векторов $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$) к площади его основания (т. е. к длине векторного произведения $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$ векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$):

$$d=\frac{|(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2|}.$$

Тем самым мы заново получили формулу (5).

Можно поступить и иначе, заметив, что для точек пересечения N_1 и N_2 общего перпендикуляра с прямыми λ_1 и λ_2 должны иметь место формулы (3) (уже не как раньше — в силу равенства нулю частных производных, а потому, что прямая N_1N_2 перпендикулярна прямым λ_1 и λ_2). Из этих уравнений (написанных в форме (1)) мы, как и раньше, найдем соответствующие значения параметров t_1 и t_2, т. е. найдем радиус-векторы точек N_1 и N_2, а значит, и величину d^2.

Имея выражения для радиус-векторов точек N_1 и N_2, мы точно так же, как и выше, можем написать параметрические уравнения (6) общего перпендикуляра N_1N_2. Что же касается его общих уравнений (в форме (7)), то для их вывода предварительное вычисление точек N_1 и N_2 даже и не требуется.