Глава 4

ГЕОМЕТРИИ ПРЯМЫХ, ПЛОСКОСТЕЙ И ОКРУЖНОСТЕЙ

§ 1. ГЕОМЕТРИЯ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

В обычной «школьной» геометрии основными геометрическими элементами считаются точки, а линии и поверхности рассматриваются как семейства («геометрические места») этих точек. Однако можно развить «геометрию», в которой основными элементами («точками») являются, скажем, прямые и в которой изучаются семейства прямых, зависящие от одного или нескольких параметров (семейства, зависящие от одного параметра, аналогичны линиям, а зависящие от двух параметров — поверхностям). Отдел геометрии, занимающийся этими вопросами, называют часто *высшей геометрией прямых*. Точно так же можно говорить о *высшей геометрии плоскостей*, *окружностей*, *сфер* и т. п. Впрочем, в сочинениях последнего времени эпитет «высшая» принято опускать.

Наиболее простой из этих «неточечных» геометрий является геометрия прямых на плоскости. Поэтому мы в первую очередь ею и займемся.

1. Пучки прямых

Для применения аналитических методов необходимо научиться задавать прямые некоторыми наборами чисел (координатами). Проще всего принять за эти «координаты» коэффициенты A, B, C общего уравнения

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

прямой в данной аффинной системе координат. Тем самым мы приходим к следующему определению:

Определение 1. *Координатами* прямой (1) в данной аффинной координатной системе Oxy называются коэффициенты A, B, C ее общего уравнения.

Координаты вполне определяют прямую. Вместе с тем прямая определяет координаты только с точностью до пропорциональности. Это означает, что координаты A, B, C являются *однородными координатами* (ср. п. 9 § 1 гл. 2). В соответствии с этим мы будем обозначать прямую с координатами A, B, C символом $(A : B : C)$.

Обратим внимание на то, что координаты прямых не могут быть выбраны произвольно: чтобы тройка (A, B, C) являлась тройкой координат некоторой прямой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно из чисел A, B было отлично от нуля.

Замечание 1. Можно ввести и неоднородные координаты прямых. Такими координатами являются, например, числа $k=-\frac{A}{B}$ и $b=-\frac{C}{B}$. Однако они определены лишь для прямых, не параллельных оси ординат. Можно показать (см. ниже замечание 2 п. 6), что неоднородных координат, пригодных для всех прямых плоскости, существовать не может. Этим геометрия прямых принципиально отличается от геометрии точек.

Аналогом прямой линии в геометрии прямых является семейство прямых $(A : B : C)$, задаваемое формулами [1])

$$\begin{aligned} A &= \mu A_0 + \nu A_1, \\ B &= \mu B_0 + \nu B_1, \\ C &= \mu C_0 + \nu C_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь (A_0, B_0, C_0) и (A_1, B_1, C_1) — произвольные непропорциональные тройки чисел, а μ и ν — параметры, одновременно не равные нулю.

Определение 2. Семейство прямых, задаваемое уравнениями вида (2), называется *пучком.*

Предположим сначала, что в уравнениях (2) хотя бы один из коэффициентов A_0, B_0 отличен от нуля и хотя бы один из коэффициентов A_1, B_1 также отличен от нуля. Тогда определены прямые

$$\begin{aligned} A_0x + B_0y + C_0 &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Говорят, что пучок (2) *проходит* через эти прямые (или им *инцидентен*).

Обозначив левые части уравнений (3) символами f и g, мы можем сказать, что пучок (2) состоит из всех прямых, имеющих уравнения вида

$$\mu f + \nu g = 0.$$

Поскольку тройки (A_0, B_0, C_0) и (A_1, B_1, C_1), по условию, не пропорциональны, прямые (3) различны.

---

[1]) Действительно, перейдя в параметрических уравнениях прямой $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$ к однородным координатам (например, приняв $x=\frac{X_1}{X_0}$, $y=\frac{X_2}{X_0}$) и положив $t=\frac{\nu}{\mu}$, мы получим уравнения

$$\begin{aligned} X_0 &= \mu X_0^{(0)} + \nu X_0^{(1)}, \\ X_1 &= \mu X_1^{(0)} + \nu X_1^{(1)}, \\ X_2 &= \mu X_2^{(0)} + \nu X_2^{(1)}, \end{aligned}$$

лишь обозначениями отличающиеся от уравнений (2).

Определение 3. Если прямые (3) не параллельны, пучок (2) называется *собственным*, а если они параллельны, — то *несобственным*.

Пучок, для которого одна из пар (A_0, B_0) или (A_1, B_1) равна нулю, мы также будем считать *несобственным* (заметим, что обе эти пары равны нулю быть не могут, потому что тогда тройки (A_0, B_0, C_0) и (A_1, B_1, C_1) были бы пропорциональны).

Собственные пучки характеризуются тем, что для них определитель

$$\begin{vmatrix} A_0 & B_0 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, а несобственные — тем, что этот определитель равен нулю.

Пусть пучок (2) — собственный. Поскольку прямые (3) не параллельны, они пересекаются в единственной точке $M_0(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют системе двух линейных уравнений

$$\begin{aligned} A_0x_0 + B_0y_0 + C_0 &= 0, \\ A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Определение 4. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *центром* собственного пучка.

Предложение 1. *Собственный пучок состоит из всех прямых, проходящих через его центр.*

Доказательство. Любая прямая пучка имеет вид

$$\mu(A_0x + B_0y + C_0) + \nu(A_1x + B_1y + C_1) = 0.$$

Так как ввиду соотношений (4) координаты x_0, y_0 удовлетворяют этому уравнению, то следовательно, любая прямая пучка проходит через его центр.

Обратно, пусть

$$Ax + By + C = 0 \tag{5}$$

— произвольная прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$. Выбрав на этой прямой произвольную точку $M_1(x_1, y_1)$, отличную от точки $M_0(x_0, y_0)$, рассмотрим числа

$$\begin{aligned} \mu_0 &= A_1x_1 + B_1y_1 + C_1, \\ -\nu_0 &= A_0x_1 + B_0y_1 + C_0. \end{aligned}$$

Ясно, что хотя бы одно из этих чисел отлично от нуля. Поэтому определена прямая

$$\mu_0 f + \nu_0 g = 0. \tag{6}$$

Являясь прямой рассматриваемого пучка, эта прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$. Кроме того, она проходит и через точку $M_1(x_1, y_1)$, ибо

$$\mu_0(A_0x_1 + B_0y_1 + C_0) + \nu_0(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) = \mu_0(-\nu_0) + \nu_0\mu_0 = 0.$$

Поскольку через две различные точки плоскости проходит только одна прямая, тем самым доказано, что прямая (5) совпадает с прямой (6), т. е. принадлежит нашему пучку.

Тем самым предложение 1 полностью доказано.

Замечание 2. Тот факт, что прямая (5) принадлежит пучку (2), непосредственно вытекает также из теоремы 2 п. 3 § 1 гл. 3. Действительно, так как прямые (3) и (5) проходят через одну и ту ж точку, ранг R матрицы

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 & C_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

равен двум. Поэтому (здесь используется теорема о ранге матрицы) ее строки линейно зависимы. С другой стороны, первые две строки этой матрицы, по условию, линейно независимы (не пропорциональны). Это возможно тогда и только тогда, когда последняя строка этой матрицы является линейной комбинацией ее первых строк, т. е. когда прямая (5) имеет вид (6).

Задание. Докажите, что значения параметров μ и ν, дающие прямую (5), определены этой прямой с точностью до пропорциональности однозначно.

Заметим, что

любая точка $M_0(x_0, y_0)$ плоскости является центром (единственного) собственного пучка.

Действительно, достаточно взять две прямые (3), проходящие через точку M_0, и построить по ним пучок (2).

Это простое наблюдение дальше будет играть весьма важную роль.

Пусть теперь пучок (2) — несобственный, т. е. пусть либо прямые (3) параллельны ($A_1 : A_0 = B_1 : B_0$), либо одна из пар (A_0, B_0) или (A_1, B_1) равна нулю (пусть, для определенности, равна нулю пара (A_1, B_1) и, значит, отлична от нуля пара (A_0, B_0)). Рассмотрим отношение $A_1 : A_0$ (при $A_0 = 0$ — отношение $B_1 : B_0$). Если числа μ и ν обладают тем свойством, что $\mu : \nu = -A_1 : A_0$, то

$$\mu A_0 + \nu A_1 = 0,$$
$$\mu B_0 + \nu B_1 = 0,$$

и потому при этих μ и ν мы не получаем никакой прямой. Напротив, если $\mu : \nu \neq -A_1 : A_0$, то, во-первых, хотя бы одно из чисел $\mu A_0 + \nu A_1$ и $\mu B_0 + \nu B_1$ отлично от нуля, и, во-вторых, имеет место пропорция

$$\frac{\mu A_0 + \nu A_1}{A_0} = \frac{\mu B_0 + \nu B_1}{B_0}.$$

Следовательно, при этих μ и ν мы получаем прямую, параллельную прямой

$$A_0 x + B_0 y + C_0 = 0. \tag{7}$$

Обратно, пусть

$$Ax + By + C = 0 \tag{8}$$

— произвольная прямая, параллельная прямой (7). Выбрав на ней произвольную точку $M_1(x_1, y_1)$, рассмотрим числа

$$\mu_0 = A_1x_1 + B_1y_1 + C_1,$$
$$-\nu_0 = A_0x_1 + B_0y_1 + C_0$$

(см. выше). Хотя бы одно из этих чисел отлично от нуля и потому определена прямая

$$\mu_0 f + \nu_0 g = 0.$$

Эта прямая параллельна прямой (7) (поскольку она принадлежит рассматриваемому пучку) и проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$. Следовательно, она совпадает с прямой (8).

Тем самым доказано следующее

Предложение 2. *Несобственный пучок состоит из всех прямых, параллельных некоторой фиксированной прямой.*

При этом ясно, что

совокупность всех прямых, параллельных произвольной фиксированной прямой, является несобственным пучком.

Таким образом, термин «несобственный пучок» является синонином термина «направление» (см. сноску на стр. 17).

2. Расширенная плоскость

Как было объяснено в п. 6 § 1 гл. 2, удобно считать, что кроме обыкновенных («собственных») точек каждая прямая содержит некоторую фиктивную «несобственную» точку, лежащую, так сказать, «в бесконечности». Мы теперь дополнительно условимся, что несобственные точки параллельных прямых совпадают (а непараллельных — различны). Это согласуется с интуитивным представлением параллельных прямых как прямых, «пересекающихся в бесконечности».

Таким образом, все прямые каждого несобственного пучка будут иметь теперь некоторую общую несобственную точку — его *центр*, а сам пучок будет состоять из всех прямых, проходящих через эту точку. Другими словами, мы теперь можем сказать, что

любой пучок является множеством всех прямых, проходящих через некоторую фиксированную точку.

Эта точка (центр пучка) — собственная, если пучок — собственный, и несобственная, если пучок — несобственный.

При этом

любая точка (собственная или несобственная) является центром некоторого (единственного) пучка.

Введение несобственных точек позволяет, таким образом, давать единые формулировки, пригодные как для собственных, так и для несобственных пучков.

При этом следует отчетливо понимать, что это усовершенствование носит пока чисто «лингвистический» характер, поскольку несобственные точки на аффинной плоскости не существуют и участвуют лишь в выражениях типа «прямые пересекаются в несобственной точке», а такое выражение является лишь синонимом выражения «прямые параллельны».

Однако можно сделать и следующий шаг: *расширить* нашу плоскость Π и считать ее подмножеством некоторого большего множества — *расширенной плоскости* Π^+. Элементы множества Π^+ мы по-прежнему будем называть *точками* (собственными, если они принадлежат Π, и несобственными — в противном случае). При этом мы будем считать, что нам задано некоторое соответствие, сопоставляющее каждой прямой α на плоскости Π некоторую несобственную точку плоскости Π^+ и обладающее тем свойством, что двум прямым тогда и только тогда сопоставлена одна и та же несобственная точка, когда эти прямые параллельны, и что любая несобственная точка соответствует хотя бы одной прямой. Несобственную точку, сопоставленную прямой, мы будем называть несобственной точкой *этой прямой*. Множество α^+, получающееся из прямой α присоединением ее несобственной точки, мы будем называть *прямой на расширенной плоскости*. Таким образом, любые две (различные) прямые α^+ и β^+ на расширенной плоскости будут обязательно пересекаться в единственной точке (являющейся точкой пересечения прямых α и β, если эти прямые не параллельны, и являющейся их общей несобственной точкой в противном случае).

Переход от аффинной плоскости Π к расширенной плоскости Π^+ означает, что от аффинной геометрии мы переходим к принципиально новой геометрии — *геометрии расширенной плоскости*.

Подчеркнем, что одно только использование несобственных точек еще не означает переход от аффинной геометрии к геометрии расширенной плоскости: если мы используем несобственные точки только как удобное средство для унификации формулировок, мы остаемся в рамках аффинной геометрии. Геометрия расширенной плоскости возникает тогда, когда мы фактически присоединяем к плоскости несобственные точки и считаем их равноправными с собственными точками.

Множество всех несобственных точек расширенной плоскости мы также будем считать прямой на этой плоскости и будем называть его *несобственной прямой*. Это оправдывается тем, что с любой «настоящей» прямой оно пересекается в единственной точке (а именно, в несобственной точке этой прямой). Таким образом, можно сказать, что *расширенная плоскость* *получается из аффинной присоединением одной дополнительной прямой.*

Пучком прямых на расширенной плоскости мы будем называть совокупность всех прямых, проходящих через некоторую фиксированную точку — *центр пучка.* Пучок называется *собственным*, если его центр является собственной точкой. Такому пучку соответствует собственный пучок на аффинной плоскости, состоящий из тех же прямых (а точнее, из тех же прямых, но рассматриваемых без их несобственных точек). Пучок называется *несобственным*, если его центр является несобственной точкой. Такой пучок получается из несобственного пучка на аффинной плоскости присоединением несобственной прямой (и, конечно, добавлением к каждой прямой пучка ее несобственной точки). Так же как и на аффинной плоскости,

любые две различные прямые содержатся в единственном пучке.

С другой стороны, на расширенной плоскости

любые два (различных) пучка содержат единственную общую прямую.

Последнее утверждение на аффинной плоскости уже места не имеет.

Основное отличие геометрии расширенной плоскости от аффинной геометрии состоит в том, что, как уже отмечалось,

любые две различные прямые расширенной плоскости пересекаются в единственной точке.

Вместе с тем, так же как в аффинной геометрии плоскости,

через любые две различные точки расширенной плоскости проходит единственная прямая.

Заметим, что хотя последнее утверждение формально совпадает с соответствующим утверждением в аффинной геометрии, его геометрическое содержание шире: оно содержит не только утверждение «через любые две различные точки аффинной плоскости проходит единственная прямая», но и утверждение «через любую точку аффинной плоскости проходит единственная прямая, параллельная данной прямой». Более того, оно не исчерпывается даже этими двумя утверждениями, поскольку в нем не исключен случай, когда обе данные точки несобственные — случай, «аффинными формулировками» не охватываемый. Все же, если отвлечься от такого рода исключительных случаев, можно сказать, что каждое утверждение геометрии расширенной плоскости эквивалентно нескольким (вообще говоря, многим) утверждениям аффинной геометрии. Внутреннее родство этих утверждений, проявляющееся в геометрии расширенной плоскости, остается в аффинной геометрии скрытым.

Резюмируя, мы можем сказать, что по сравнению с аффинной геометрией геометрия расширенной плоскости логически более стройна: ее утверждения имеют более общий характер и не сопровождаются исключениями.

Сказанное выше является содержательным (не формальным) обсуждением понятия «расширенная плоскость». Формально-аксиоматически, это понятие вводится следующим образом.

Определение 1. Множество $\mathfrak{M}^+$ называется *расширенной плоскостью*, если

1) оно содержит некоторую аффинную плоскость $\mathfrak{M}$ (в смысле п. 3 § 3 гл. 2);

2) каждой прямой α в плоскости $\mathfrak{M}$ (см. замечание 1 в п. 1 § 1 гл. 3) сопоставлен некоторый элемент

$$a_\infty \in \mathfrak{M}^+ \setminus \mathfrak{M};$$

3) элементы α_∞ и β_∞, сопоставленные двум прямым α и β, тогда и только тогда совпадают, когда прямые α и β параллельны;

4) любой элемент из $\mathfrak{M}^+ \setminus \mathfrak{M}$ имеет вид α_∞ для некоторой прямой α.

Элементы множества $\mathfrak{M}^+ \setminus \mathfrak{M}$ называются *несобственными точками* плоскости $\mathfrak{M}^+$ (или плоскости $\mathfrak{M}$). Несобственная точка α_∞ называется при этом *несобственной точкой прямой* α (говорят также, что точка α_∞ *инцидентна* прямой α). Точки плоскости $\mathfrak{M}$ называются *собственными точками плоскости* $\mathfrak{M}^+$.

Замечание 1 (очень важное!). Данное определение полностью пригодно и в случае, когда $\mathfrak{M}$ является плоскостью над произвольным полем $\mathbb{K}$. В этом случае $\mathfrak{M}^+$ называется расширенной плоскостью *над полем* $\mathbb{K}$. В частности, при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ мы получаем *комплексную расширенную плоскость*. Если $\mathfrak{M}$ является вещественно-комплексной плоскостью (см. п. 5 § 3 гл. 2), то $\mathfrak{M}^+$ называется *вещественно-комплексной расширенной плоскостью.*

Более того, в определении 1 нет нужды обязательно считать плоскость $\mathfrak{M}$ аффинной, она вполне может быть евклидовой. В этом случае мы получаем *евклидову расширенную плоскость* (вещественную, вещественно-комплексную или плоскость над любым полем $\mathbb{K}$).

Аффинная расширенная плоскость называется часто *аффинно-проективной плоскостью*, а евклидова расширенная плоскость — *евклидово-проективной плоскостью.*

Таким образом, мы получаем целый букет различных плоскостей (который в дальнейшем мы еще пополним), и следовательно, различных «геометрий». Относительно каждой геометрической конструкции или теоремы (безразлично, в содержательном или формально-аксиоматическом построении) следует отчетливо представлять себе, к какой собственно геометрии она относится, т. е. какой «плоскости» выполняется. Соответствующие указания мы будем часто опускать, поскольку принадлежность теоремы или конструкции к той или иной геометрии, как правило, ясна из контекста. Например, если упоминаются несобственные точки, то мы находимся в расширенной плоскости, а если упоминаются расстояния или углы — то в евклидовой[1]). В каждом случае, когда возможны недоразумения, мы, конечно, будем явно указывать, какой именно геометрией мы в данный момент занимаемся.

3. Полнота и непротиворечивость аксиом геометрии расширенной плоскости

Определение 1. Отображение

$$\eta^+ \colon \mathfrak{M}_1^+ \to \mathfrak{M}_2^+$$

одной расширенной плоскости на другую называется *изоморфизмом*, если

а) отображение η^+ переводит собственные точки в собственные, а несобственные — в несобственные;

б) получающееся отображение

$$\eta \colon \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$$

нерасширенных плоскостей является изоморфизмом;

в) отображение η^+ сохраняет отношение «несобственная точка инцидентна собственной прямой», т. е. для любой прямой α плоскости $\mathfrak{M}_1$ ее несобственная точка α_∞ переходит при отображении η^+ в несобственную точку β_∞ прямой β плоскости $\mathfrak{M}_2$, являющейся образом при изоморфизме η прямой α:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \to & \alpha_\infty \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta^+ \\ \beta & \to & \beta_\infty \end{array}$$

Замечание 1. На самом деле здесь дано не одно определение изоморфизма, а несколько (в зависимости от того, какими считаются нерасширенные плоскости — аффинными или евклидовыми, вещественными или комплексными и т. п.). Формально это находит отражение в возможности различного понимания термина «изоморфизм» в условии б).

Согласно определению 1 каждый изоморфизм

$$\eta^+ \colon \mathfrak{M}_1^+ \to \mathfrak{M}_2^+$$

индуцирует некоторый изоморфизм

$$\eta \colon \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2.$$

[1]) Следует иметь в виду, что на евклидово-проективной плоскости углы и расстояния определяются только для собственных элементов (например, об угле между собственной и несобственной прямой говорить бессмысленно).

Оказывается, что это устанавливает биективное соответствие между изоморфизмами, т. е.

любой изоморфизм

$$\eta\colon \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$$

индуцируется некоторым (единственным) изоморфизмом

$$\eta^+\colon \mathfrak{M}_1^+ \to \mathfrak{M}_2^+.$$

Действительно, пусть α — произвольная прямая плоскости $\mathfrak{M}_1$ и α_∞ — ее несобственная точка. Изоморфизм η переводит прямую α в некоторую прямую β плоскости $\mathfrak{M}_1$. Пусть β_∞ — несобственная точка прямой β. Мы положим, по определению,

$$\eta^+(\alpha_\infty) = \beta_\infty.$$

Очевидно, что это определение корректно (точка β_∞ зависит только от точки α_∞, но не от прямой α). Для собственных точек $M \in \mathfrak{M}_1$ мы, естественно, положим

$$\eta^+(M) = \eta(M).$$

Ясно, что построенное отображение

$$\eta^+\colon \mathfrak{M}_1^+ \to \mathfrak{M}_2^+$$

и является искомым изоморфизмом.

Мы будем говорить, что изоморфизм η^+ является *продолжением* изоморфизма η.

Поскольку любые две нерасширенные плоскости изоморфны, из доказанного утверждения непосредственно вытекает, что

любые две расширенные плоскости изоморфны.

Другими словами, аксиоматика геометрии расширенной плоскости полна.

Чтобы доказать непротиворечивость этой аксиоматики, нам нужно построить некоторую ее модель, т. е. проинтерпретировать ее в рамках другой аксиоматики, непротиворечивость которой уже известна. Такая модель не только докажет непротиворечивость, но и даст более наглядное представление о (несколько абстрактной) геометрии расширенной плоскости. Поэтому мы укажем не одну, а четыре различных модели, по-разному интерпретирующие расширенную плоскость.

Пусть $\mathfrak{M}'$ — произвольная нерасширенная плоскость (скажем, для определенности, аффинная и вещественная). Рассмотрим множество $\mathfrak{M}^+$ *всех пучков прямых* на плоскости $\mathfrak{M}'$ и его подмножество $\mathfrak{M}$, состоящее из собственных пучков. Как мы знаем, соответствие

$$\text{«собственный пучок»} \mapsto \text{«его центр»} \qquad (1)$$

является биективным соответствием между всевозможными собственными пучками и точками плоскости $\mathfrak{M}'$. Поэтому это соответствие позволяет определить множество $\mathfrak{M}$ как аффинную плоскость. «Точками» этой плоскости являются собственные пучки плоскости $\mathfrak{M}'$, а, например, «прямыми» — семейства пучков, обладающие тем свойством, что их центры лежат на одной прямой плоскости $\mathfrak{M}'$. Можно сказать, что плоскость $\mathfrak{M}'$ мы отождествляем с множеством $\mathfrak{M}$.

В силу этого отождествления для множества $\mathfrak{M}^+$ оказывается выполненным условие 1) определения 1 п. 2.

Пусть теперь α — некоторая прямая на плоскости $\mathfrak{M}$. Как только что было сказано, эта прямая состоит из всех пучков, центры которых принадлежат некоторой прямой α' плоскости $\mathfrak{M}'$. Пусть α_∞ — несобственный пучок прямых плоскости $\mathfrak{M}'$, состоящий из всех прямых, параллельных прямой α'. Тем самым мы построили отображение $\alpha \longmapsto \alpha_\infty$, предусмотренное условием 2) определения 1.

Ясно, что это отображение обладает свойствами 3) и 4). Таким образом,

множество $\mathfrak{M}^+$ всех пучков аффинной плоскости $\mathfrak{M}'$ является аффинной расширенной плоскостью.

Если мы за $\mathfrak{M}'$ возьмем плоскость над полем $\mathbb{K}$, то $\mathfrak{M}^+$ будет расширенной плоскостью над полем $\mathbb{K}$, а если $\mathfrak{M}'$ будет евклидовой плоскостью, то $\mathfrak{M}^+$ будет евклидовой расширенной плоскостью.

Построенная «пучковая» модель позволяет любое утверждение геометрии расширенной плоскости истолковать как некоторое утверждение (плоской) аффинной геометрии. Однако, как правило, это истолкование не очень наглядно. Более наглядную интерпретацию мы получим, «выйдя в пространство». Для простоты мы станем при этом на содержательную, наглядно геометрическую, точку зрения (и, в частности, ограничимся интерпретацией вещественной расширенной плоскости). Более формальное построение читатель, без сомнения, может провести самостоятельно.

Пусть в пространстве задана некоторая аффинная координатная система $Oxyz$. Рассмотрим координатную плоскость Oxy и координаты x, y на этой плоскости. Каждой прямой

$$Ax + By + C = 0$$

на плоскости Oxy мы сопоставим вектор в пространстве, имеющий координаты A, B, C. Тем самым каждому вектору $\boldsymbol{a}(A, B, C)$, для которого $A \neq 0$ или $B \neq 0$, т. е. каждому вектору, не параллельному оси Oz, будет соответствовать некоторая прямая на плоскости, а каждой прямой будет соответствовать семейство отличных от нуля коллинеарных векторов (не параллельных оси Oz), т. е., другими словами, семейство отличных от нуля векторов, параллельных некоторой прямой (которую, для определенности, мы можем считать проходящей через точку O).

Таким образом, мы получаем биективное соответствие между прямыми на плоскости и прямыми в пространстве, проходящими через точку O и отличными от оси Oz. В этом соответствии прямой $(A:B:C)$ отвечает прямая

$$x = At,$$
$$y = Bt,$$
$$z = Ct.$$

Пусть теперь

$$A = \mu A_0 + \nu A_1,$$
$$B = \mu B_0 + \nu B_1,$$
$$C = \mu C_0 + \nu C_1$$

— произвольный пучок прямых на плоскости Oxy. Прямым этого пучка отвечают отличные от нуля векторы $\boldsymbol{a}(A, B, C)$, имеющие вид

$$\boldsymbol{a} = \mu \boldsymbol{a}_0 + \nu \boldsymbol{a}_1, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{a}_0(A_0, B_0, C_0)$ и $\boldsymbol{a}_1(A_1, B_1, C_1)$, т. е. отличные от нуля векторы, компланарные векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Поскольку векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, по условию, линейно независимы, векторы (1) могут быть охарактеризованы как отличные от нуля векторы, параллельные некоторой плоскости (проходящей через точку O). Тем самым мы получили биективное соответствие между пучками прямых на плоскости Oxy и всевозможными плоскостями в пространстве, проходящими через точку O.

Рассматриваемый пучок — собственный тогда и только тогда, когда среди векторов (1) не содержится ни одного вектора, параллельного оси Oz, т. е. когда соответствующая плоскость не параллельна этой оси.

Комбинируя построенное биективное соответствие

«пучок» $\longmapsto$ «плоскость»

с биективным соответствием

«собственный пучок» $\longmapsto$ «его центр»,

мы получим биективное соответствие между точками плоскости Oxy и плоскостями в пространстве, проходящими через точку O и не параллельными оси Oz.

Следовательно, объявив последние плоскости «точками», мы снова получим модель аффинной плоскости. В этой модели «прямыми» являются множества плоскостей, проходящих через фиксированную прямую пространства (проходящую через точку O и отличную от оси Oz).

Как получить из этой модели модель расширенной плоскости, тепер уже совершенно ясно: нужно откинуть условие, что плоскости не параллельны оси Oz. Таким образом, «точками» этой модели являются всевозможные плоскости пространства, проходящие через точку O, а «прямыми» — множества таких плоскостей, проходящих через фиксированную прямую пространства (проходящую через точку O, но уже может быть совпадающую с осью Oz). Несобственными точками этой модели являются плоскости, проходящие через ось Oz.

«Прямые» построенной модели естественным образом отождествляются с проходящими через точку O прямыми пространства. В частности, несобственная прямая отождествляется с осью Oz.

Построенная модель позволяет любое утверждение геометрии расширенной плоскости переформулировать в виде некоторого утверждения о прямых и плоскостях в пространстве. Например, утверждение, что через любые две различные точки расширенной плоскости проходит единственная прямая, переходит при таком переформулировании в утверждение, что любые две различные плоскости, проходящие через точку O, пересекаются по единственной прямой.

Эта модель нагляднее предыдущей «пучковой» модели. Однако, последняя модель обладает свойством естественности, т. е. лежащее в ее основе соответствие «пучок»$\mapsto$«точка» строится без всякого произвола. В то же время соответствие «пучок»$\mapsto$«плоскость», на котором основана рассматриваемая сейчас модель, существенно зависит от выбора системы координат $Oxyz$ и естественным инвариантным способом построено быть не может.

4. Координаты на расширенной плоскости

Еще одну полезную модель расширенной плоскости мы получим, привлекая вещественные числа. Построение такой «числовой модели» с содержательной точки зрения равносильно введению в расширенную плоскость координат. Поэтому мы в первую очередь рассмотрим (пока с содержательных позиций), как в геометрии расширенной плоскости могут быть введены координаты.

Ясно, что распространить на несобственные точки аффинные координаты x, y невозможно, поскольку каждая пара (x, y) определяет некоторую собственную точку и для несобственных точек «не остается координат».

По-иному дело обстоит с однородными координатами, поскольку для них имеются системы значений, не отвечающие никакой собственной точке, и можно надеяться, что эти «запрещенные» значения можно сопоставить несобственным точкам.

Однородные координаты в расширенной плоскости проще всего ввести, воспользовавшись установленным выше биективным соответствием между точками расширенной плоскости и плоскостями в пространстве, проходящими через начало координат O.

Уравнение произвольной такой плоскости имеет вид

$$Xx+Yy+Zz=0,$$

где хотя бы один из коэффициентов X, Y, Z отличен от нуля. При этом плоскость однозначно определяется этими коэффициентами и, обратно, однозначно с точностью до пропорциональности их определяет.

Следовательно, комбинируя биективные соответствия

«точка расширенной плоскости» $\mapsto$ «плоскость в пространстве»

и

«плоскость в пространстве» $\mapsto$ «класс $(X:Y:Z)$ пропорциональности коэффициентов ее уравнения»,

мы получим биективное соответствие между точками расширенной плоскости и классами $(X:Y:Z)$ пропорциональных троек $(X, Y, Z)\neq(0, 0, 0)$.

Числа X, Y, Z мы и будем называть (*однородными*) *координатами* на расширенной плоскости. Они определены с точностью до пропорциональности.

Чтобы найти для этих координат явные формулы, мы должны выразить в координатах построенное соответствие.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная собственная точка плоскости. Любая прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, имеет уравнение вида

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,$$

где A и B — некоторые числа, одновременно не равные нулю (а в остальном — произвольные). Это показывает, что прямым собственного пучка с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ отвечают в пространстве векторы вида

$$(A,\ B,\ -Ax_0-By_0).$$

Но ясно, что вектор в пространстве тогда и только тогда имеет такой вид, когда он параллелен плоскости

$$x_0x+y_0y+z=0. \qquad (1)$$

Таким образом,

Собственная точка $M_0(x_0, y_0)$ изображается в пространстве плоскостью (1).

По определению, это означает, что

точка $M_0(x_0, y_0)$ имеет однородные координаты

$$X_0:Y_0:Z_0=x_0:y_0:1.$$

Замечание 1. Таким образом, построенные координаты $X_0:Y_0:Z_0$ являются (с точностью до перестановки) *однородными аффинными координатами* в смысле п. 6 § 1 гл. 2.

Рассмотрим теперь произвольную несобственную точку. Пусть эта точка является несобственной точкой прямой

$$A_0x + B_0y + C_0 = 0. \tag{2}$$

Тогда все прямые соответствующего несобственного пучка будут иметь вид

$$A_0x + B_0y + C = 0,$$

где C — произвольное число, т. е. этим прямым будут отвечать в пространстве векторы вида

$$(A_0,\ B_0,\ C)$$

(и все векторы, им коллинеарные). Но ясно, что вектор в пространстве тогда и только тогда имеет такой вид, когда он параллелен плоскости

$$-B_0x + A_0y = 0. \tag{3}$$

Таким образом,

несобственная точка прямой (2) *изображается в пространстве плоскостью* (3).

По определению, это означает, что

несобственная точка прямой (2) *имеет однородные координаты*

$$X_0 : Y_0 : Z_0 = -B_0 : A_0 : 0.$$

Мы видим, в частности, что координаты $X : Y : Z$ собственных точек характеризуются условием $Z \neq 0$, а координаты несобственных точек — условием $Z = 0$. Другими словами,

уравнение

$$Z = 0$$

является в координатах $X : Y : Z$ уравнением несобственной прямой.

Аффинные координаты собственных точек выражаются через координаты $X : Y : Z$ по формулам

$$x = \frac{X}{Z},$$

$$y = \frac{Y}{Z}.$$

Подставив эти выражения в уравнение

$$Ax + By + C = 0 \tag{4}$$

произвольной прямой, мы получим (после умножения на Z) уравнение

$$AX + BY + CZ = 0. \tag{5}$$

Координаты $X : Y : Z$ собственной точки $M(x, y)$ тогда и только тогда удовлетворяют этому уравнению, когда эта точка принадлежит прямой (4). Что же касается несобственных точек, то, полагая в уравнении (5) $Z = 0$, мы для координат X и Y получим пропорцию

$$X:Y = -B:A.$$

Следовательно, уравнению (5) удовлетворяют координаты единственной несобственной точки, а именно, несобственной точки $(-B:A:0)$ прямой (4).

Тем самым доказано, что

уравнение (5) *выражает прямую* (4), *пополненную несобственной точкой.*

Резюмируя, мы получаем следующее

Предложение 1. *Любое уравнение вида*

$$AX + BY + CZ = 0$$

(*хотя бы один из коэффициентов A, B, C которого отличен от нуля*) *выражает в координатах $X:Y:Z$ некоторую прямую расширенной плоскости, собственную, если $A \neq 0$ или $B \neq 0$, и несобственную, если $A = B = 0$.*

Теперь ясно, как построить числовую модель расширенной (аффинно-проективной) плоскости. *Точками* этой модели являются классы $(X:Y:Z)$, т. е. элементы множества $\mathbb{R}P^2$ (см. п. 6 § 1 гл. 2). Точка называется *несобственной*, если $Z = 0$. Формулы

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}$$

определяют естественное биективное соответствие между множеством всех собственных точек из $\mathbb{R}P^2$ и стандартной аффинной плоскостью $\mathbb{R}^2$ пар (x, y). Тем самым это множество определяется как аффинная плоскость. Прямыми на этой плоскости являются множества собственных точек $(X:Y:Z)$, удовлетворяющих уравнениям вида

$$AX + BY + CZ = 0,$$

где либо $A \neq 0$, либо $B \neq 0$. Ясно, что все условия определения 1 из п. 2 выполнены, так что $\mathbb{R}P^2$ действительно является расширенной плоскостью.

Определение 1. Построенная плоскость $\mathbb{R}P^2$ называется *стандартной* (или *арифметической*) *аффинно-проективной плоскостью.*

Замечание 2. Ясно, что все сказанное выше сохраняется над любым полем $\mathbb{K}$ (конечно, вместо $\mathbb{R}P^2$ нужно рассматривать множество $\mathbb{K}P^2$ классов пропорциональных троек $(X, Y, Z) \neq (0, 0, 0)$ элементов поля $\mathbb{K}$).

Различных систем однородных аффинных координат $X:Y:Z$ на расширенной плоскости может быть много (а именно, «столько же», сколько имеется различных систем аффинных координат x, y на нерасширенной плоскости). При этом переход от одних координат $X:Y:Z$ к другим координатам $X':Y':Z'$ описывается, как легко видеть, формулами вида

$$\begin{aligned} X' &= a_1X + a_2Y + a_3Z, \\ Y' &= b_1X + b_2Y + b_3Z, \\ Z' &= Z, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

(см. формулы перехода от координат x, y к координатам x', y' в п. 2 § 1 гл. 2).

Задание. Докажите формулы (6).

Это наводит на мысль о возможности независимого определения понятия аффинно-проективной плоскости, не опирающегося как определение 1 из п. 2 на понятие аффинной плоскости, а повторяющее (с соответствующими изменениями) определения из § 3 гл. 2.

Введем с этой целью группу $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}P^2)$ всех преобразований стандартной плоскости $\mathbb{R}P^2$, выражающихся формулами (6) (обратим внимание на то, что эта группа естественно изоморфна группе $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$), и затем определим *аффинно-проективную плоскость* как произвольное множество $\mathfrak{M}^+$, для которого задано семейство $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M}^+)$ биективных отображений

$$\alpha\colon \mathfrak{M}^+ \to \mathbb{R}P^2,$$

удовлетворяющее (по отношению к группе $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}P^2)$) известным нам аксиомам 1 и 2 (см. § 3).

Сказанное выше об однородных аффинных координатах показывает, что любая расширенная (аффинно-проективная) плоскость в смысле определения 1 из п. 3 является аффинно-проективной плоскостью и в смысле этого нового определения.

Обратно, аффинно-проективная плоскость в новом смысле будет, очевидно, аффинно-проективной плоскостью в смысле определения 1 п. 3, если мы определим ее несобственные точки как точки, координата Z которых в любой координатной системе $\alpha\colon \mathfrak{M}^+ \to \mathbb{R}P^2$ равна нулю (ясно, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора системы α).

Чтобы получить аналогичное определение *евклидовой расширенной* (в другой терминологии — *евклидово-проективной*) *плоскости*, достаточно потребовать, чтобы для преобразований (6) матрица

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

была ортогональной матрицей (такие преобразования составляют группу $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}P^2)$, изоморфную группе $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$). С содержательной точки зрения координатами $X:Y:Z$ на евклидово-проективной плоскости являются *однородные евклидовы координаты*, получающиеся из евклидовых (прямоугольных) координат x, y точно так же, как однородные аффинные координаты получались выше из аффинных.

Поскольку группа $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}P^2)$ является подгруппой группы $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}P^2)$, мы можем любую евклидово-проективную плоскость единственным образом превратить в аффинно-проективную плоскость; ср. п. 3 § 3 гл. 2, где подробно обсужден аналогичный вопрос для евклидовых и аффинных плоскостей (см., в частности, определение 5 п. 3 § 3 гл. 2).

Аналогично, чтобы получить определение аффинно-проективной плоскости над произвольным полем $\mathbb{K}$, достаточно заменить $\mathbb{R}P^2$ на $\mathbb{K}P^2$ (и, конечно, считать, что все коэффициенты преобразования (6) принадлежат полю $\mathbb{K}$).

Например, *комплексная аффинно-проекивная плоскость* получается, когда преобразования (6) имеют комплексные коэффициенты и являются преобразованиями в $\mathbb{C}P^2$.

Вещественно-комплексная аффинно-проективная плоскость получается, когда преобразования (6) с вещественными коэффициентами рассматриваются как преобразования в комплексной стандартной плоскости $\mathbb{C}P^2$.

5. Проективная плоскость

В расширенной плоскости мы сохраняем определенное различие между собственными и несобственными точками. Можно, однако, сделать следующий шаг и считать собственные и несобственные точки абсолютно равноправными и неотличимыми друг от друга. Расширенная плоскость, в которой различие между собственными и несобственными точками игнорируется, называется *проективной плоскостью*, а ее геометрия — *проективной геометрией* (более точное, формальное определение см. ниже).

Чтобы получить наглядную интерпретацию проективной геометрии, мы рассмотрим еще одну модель расширенной (аффинно-проективной) плоскости.

Пусть O — произвольная точка пространства и Π — некоторая плоскость, не проходящая через точку O. Тогда любая точка M плоскости Π будет однозначно определять в пространстве прямую OM, причем соответствие

$$\text{«точка } O\text{»} \mapsto \text{«прямая } OM\text{»}$$

будет биективным соответствием между точками плоскости Π и прямыми в пространстве, проходящими через точку O и не параллельными плоскости Π. Тем самым получили некоторую интерпретацию аффинной плоскости, «точками» которой являются прямые в пространстве.

Ясно, как эту интерпретацию можно распространить до интерпретации всей расширенной плоскости: достаточно включить в рассмотрение и прямые, параллельные плоскости П (проходящие через точку O), считая, что каждая такая прямая изображает несобственную точку всех прямых плоскости П, параллельных этой прямой.

В этой интерпретации прямые плоскости П будут, очевидно, изображаться плоскостями в пространстве (проходящими через точку O) или, точнее, множествами всех прямых (проходящих через точку O), содержащихся в таких плоскостях. Если плоскость пересекает плоскость П, то она изображает собственную прямую (линию пересечения). Плоскость, параллельная плоскости П (и проходящая через точку O), изображает несобственную прямую плоскости П.

Теперь ясно, как от этой интерпретации аффинно-проективной плоскости перейти к интерпретации проективной плоскости: нужно «забыть» о плоскости П и об особом положении, которое имеют прямые, параллельные этой плоскости.

Построенную таким образом модель проективной плоскости мы будем обозначать символом $\mathfrak{M}_O$. По определению, точками этой модели являются прямые в пространстве, проходящие через точку O, а прямыми — плоскости в пространстве (также проходящие через точку O).

Пусть $Oe_1e_2e_3$ — произвольный аффинный репер в пространстве (с началом в точке O) и пусть A — произвольная точка проективной плоскости $\mathfrak{M}_O$, т. е. прямая в пространстве, проходящая через точку O. Параметрические уравнения этой прямой имеют вид

$$x = Xt,$$
$$y = Yt,$$
$$z = Zt,$$

где X, Y, Z — координаты (в репере $Oe_1e_2e_3$) некоторой точки прямой A (отличной от точки O). Ясно, что числа X, Y, Z однозначно определяют прямую A и, с точностью до пропорциональности, однозначно этой прямой определены.

Определение 1. Числа X, Y, Z мы будем называть *проективными координатами* рассматриваемой точки проективной плоскости $\mathfrak{M}_O$, *ассоциированными* с данным репером $Oe_1e_2e_3$.

Вообще говоря, разные реперы $Oe_1e_2e_3$ и $Oe_{1'}e_{2'}e_{3'}$ могут приводить к одним и тем же координатам $X:Y:Z$. Например, это заведомо так, если реперы *гомотетичны*, т. е. если существует такое число $h \neq 0$, что

$$\boldsymbol{e}_{1'} = h\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_{2'} = h\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_{3'} = h\boldsymbol{e}_3.$$

Покажем, что этим исчерпываются все возможности, т. е. *если для любой точки проективной плоскости $\mathfrak{M}_O$ координаты $X:Y:Z$, ассоциированные с реперами $Oe_1e_2e_3$ и $Oe_{1'}e_{2'}e_{3'}$, совпадают, то эти реперы гомотетичны.*

Действительно, рассмотрим, например, прямую E_1, проходящую через точку O параллельно вектору e_1. Эта точка плоскости $\mathfrak{M}_O$ имеет в координатной системе, ассоциированной с репером $Oe_1e_2e_3$, проективные координаты $1:0:0$. По условию те же координаты она имеет и в координатной системе, ассоциированной с репером $Oe_{1'}e_{2'}e_{3'}$, а это означает, что вектор $e_{1'}$ параллелен прямой E_1. Следовательно, векторы e_1 и $e_{1'}$ коллинеарны, т. е. существует такое число h_1, что

$$e_{1'} = h_1 e_1.$$

Аналогично доказывается, что

$$e_{2'} = h_2 e_2, \quad e_{3'} = h_3 e_3.$$

Рассмотрим теперь прямую E_0, проходящую через точку O параллельно вектору

$$e_0 = e_1 + e_2 + e_3 = \frac{e_{1'}}{h_1} + \frac{e_{2'}}{h_2} + \frac{e_{3'}}{h_3}.$$

Ассоциированные с репером $Oe_1e_2e_3$ координаты этой точки проективной плоскости $\mathfrak{M}_O$ равны $1:1:1$, а ассоциированные с репером $Oe_{1'}e_{2'}e_{3'}$ равны $\frac{1}{h_1}:\frac{1}{h_2}:\frac{1}{h_3}$. Так как эти координаты должны совпадать, то, следовательно,

$$h_1 = h_2 = h_3.$$

Таким образом, реперы $Oe_1e_2e_3$ и $Oe_{1'}e_{2'}e_{3'}$ гомотетичны.

Чтобы указать удобные условия гомотетичности реперов, мы произвольный репер $Oe_1e_2e_3$ пополним вектором

$$e_0 = e_1 + e_2 + e_3.$$

Легко видеть, что

реперы $Oe_1e_2e_3$ и $Oe_{1'}e_{2'}e_{3'}$ тогда и только тогда гомотетичны, когда для любого $i = 0, 1, 2, 3$ вектор $e_{i'}$ коллинеарен вектору e_i.

Действительно, если реперы гомотетичны:

$$e_{1'} = he_1, \quad e_{2'} = he_2, \quad e_{3'} = he_3,$$

то

$$e_{0'} = e_{1'} + e_{2'} + e_{3'} = h(e_1 + e_2 + e_3) = he_0,$$

так что для любого $i = 0, 1, 2, 3$ вектор $e_{i'}$ коллинеарен вектору e_i.

Обратно, пусть для любого $i = 0, 1, 2, 3$ вектор $e_{i'}$ коллинеарен вектору e_i, т. е. пусть существуют такие числа h_0, h_1, h_2 и h_3, что

$$e_{0'} = h_0e_0, \quad e_{1'} = h_1e_1, \quad e_{2'} = h_2e_2, \quad e_{3'} = h_3e_3.$$

Тогда

$$h_0(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)=h_0\boldsymbol{e}_0=\boldsymbol{e}_{0'}=\boldsymbol{e}_{1'}+\boldsymbol{e}_{2'}+\boldsymbol{e}_{3'}=h_1\boldsymbol{e}_1+h_2\boldsymbol{e}_2+h_3\boldsymbol{e}_3,$$

и потому

$$h_0=h_1=h_2=h_3.$$

Следовательно, реперы $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ и $O\boldsymbol{e}_{1'}\boldsymbol{e}_{2'}\boldsymbol{e}_{3'}$ гомотетичны.

Ясно, что любые три из четырех векторов

$$\boldsymbol{e}_0=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$$

линейно независимы. Это означает, что проходящие через точку O прямые E_0, E_1, E_2, E_3 с направляющими векторами $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ составляют в проективной плоскости $\mathfrak{M}_O$ четверку точек, обладающую тем свойством, что никакие три из них не принадлежат одной прямой.

Обратно, пусть в проективной плоскости $\mathfrak{M}_O$ нам дана четверка E_0, E_1, E_2, E_3 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Мы всегда можем выбрать направляющие векторы $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ этих прямых так, чтобы имело место равенство

$$\boldsymbol{e}_0=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3.$$

Задание. Докажите возможность такого выбора векторов $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Согласно доказанному выше утверждению, этим условием векторы $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ однозначно определены при данных прямых E_0, E_1, E_2, E_3 с точностью до общего множителя, т. е. репер $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ однозначно определен с точностью до гомотетии. Следовательно, однозначно определены и ассоциированные проективные координаты.

Определение 2. Четыре точки проективной плоскости, из которых никакие три не лежат на одной прямой, называются *точками общего положения.*

Определение 3. О точках, имеющих в данной проективной координатной системе координаты

$$1:1:1,\quad 1:0:0,\quad 0:1:0,\quad 0:0:1,$$

говорят, что они составляют *проективный координатный репер* этой координатной системы.

В силу этих определений доказанные выше утверждения мы можем суммировать в следующем предложении:

Предложение 1. *Проективная координатная система однозначно определяется своим проективным координатным репером. Точки E_0, E_1, E_2, E_3 тогда и только тогда составляют проективный координатный репер, когда они являются точками общего положения.*

Определение 4. Прямые

$$E_2E_3,\quad E_1E_3,\quad E_1E_2 \tag{1}$$

называются *координатными прямыми* данного репера (или соответствующей проективной координатной системы), а точка E_0 — его *единичной точкой*. Тройка прямых (1) называется *координатным треугольником* репера (проективной координатной системы). Поскольку этот треугольник однозначно определяет точки E_1, E_2, E_3,

проективная координатная система однозначно определяется ее координатным треугольником и единичной точкой.

Поскольку прямая E_2E_3 изображается в пространстве плоскостью, проходящей через прямые E_2 и E_3 с направляющими векторами e_2 и e_3, то для всех точек этой плоскости их абсцисса (в репере $Oe_1e_2e_3$) равна нулю. Это показывает, что

в проективных координатах $X:Y:Z$ с репером E_0, E_1, E_2, E_3 точки координатной прямой E_2E_3 характеризуются условием

$$X=0.$$

Аналогично показывается, что

точки координатной прямой E_1E_3 характеризуются условием

$$Y=0,$$

а точки координатной прямой E_1E_2 — условием

$$Z=0.$$

Это позволяет переформулировать предложение 1 в следующем виде:

Предложение 2. *Проективная координатная система однозначно определяется координатными прямыми $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ и единичной точкой $E_0(1:1:1)$. Чтобы тройка прямых была тройкой координатных прямых некоторой проективной координатной системы, необходимо и достаточно, чтобы эти прямые не проходили через одну точку. Единичной точкой может служить любая точка, не принадлежащая этим прямым.*

Рассмотрим теперь вопрос о формулах перехода от одной проективной координатной системы к другой.

Поскольку проективные координаты (на проективной плоскости $\mathfrak{M}_O$) являются не чем иным, как аффинными координатами в пространстве, переход от одних проективных координат к другим сводится к переходу от одних аффинных координат в пространстве к другим аффинным координатам (с тем же началом O), т. е. к переходу, описывать который мы умеем (см. п. 2 § 1 гл. 2).

Таким образом,

переход от одних проективных координат $X:Y:Z$ к другим проективным координатам $X':Y':Z'$ описывается формулами вида

$$\begin{aligned} \rho X' &= a_1X+a_2Y+a_3Z,\\ \rho Y' &= b_1X+b_2Y+b_3Z,\\ \rho Z' &= c_1X+c_2Y+c_3Z, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Здесь ρ — произвольный множитель (подчеркивающий, что проективные координаты определены только с точностью до пропорциональности).

Сказанное выше представляет собой содержательное обсуждение понятий проективной плоскости и проективной координатной системы. Теперь мы можем (по уже известному образцу) дать этим понятиям и формально-аксиоматическое определение.

С этой целью мы введем в рассмотрение всевозможные преобразования множества $\mathbb{R}P^2$, задаваемые формулами вида (2). Ясно, что

совокупность $\operatorname{Proj}(\mathbb{R}P^2)$ *всех таких преобразований образует группу.*

Определение 5. Множество $\mathfrak{M}$ называется *проективной плоскостью*, если задано семейство $\operatorname{Coor}(\mathfrak{M})$ биективных отображений

$$\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}P^2$$

(называемых *проективными координатными системами*) и выполнены следующие (уже привычные для нас) аксиомы:

Аксиома 1. *Если* $\alpha \in \operatorname{Coor}(\mathfrak{M})$ *и* $\varphi \in \operatorname{Proj}(\mathbb{R}P^2)$, *то*

$$\varphi \circ \alpha \in \operatorname{Coor}(\mathfrak{M}).$$

Аксиома 2. *Если* α, $\alpha' \in \operatorname{Coor}(\mathfrak{M})$, *то*

$$\alpha' \circ \alpha^{-1} \in \operatorname{Proj}(\mathbb{R}P^2).$$

Примером проективной плоскости (доказывающим непротиворечивость аксиом) является *стандартная* (или *арифметическая*) *проективная плоскость* $\mathbb{R}P^2$, для которой, по определению, $\operatorname{Coor}(\mathbb{R}P^2) = \operatorname{Proj}(\mathbb{R}P^2)$ (а также, конечно, рассмотренная выше плоскость $\mathfrak{M}_O$).

Понятие *изоморфизма* проективных плоскостей вводится точно так же, как, скажем, для евклидовых плоскостей (см. п. 2 § 3 гл. 2), причем все перечисленные в п. 2 § 3 гл. 2 свойства изоморфизмов полностью сохраняются (например, любой изоморфизм является отображением по равенству координат и отображение $\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}P^2$ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда оно представляет собой проективную координатную систему из $\operatorname{Coor}(\mathfrak{M})$). В частности, мы видим, что *любая проективная плоскость* $\mathfrak{M}$ *изоморфна стандартной проективной плоскости* $\mathbb{R}P^2$.

Следовательно, аксиомы 1 и 2 полны.

Замечание 1. Совершенно аналогичным образом определяется проективная плоскость *над любым полем* $\mathbb{K}$, *в частности, комплексная проективная плоскость.* Чтобы получить *вещественно-комплексную проективную плоскость*, следует группу $\mathrm{Proj}(\mathbb{R}P^2)$ рассматривать как группу преобразований множества $\mathbb{C}P^2$.

Конечно, можно, не ограничиваясь случаем $n=2$, аналогично определить *проективное пространство* (над любым полем).

Покажем, что и с формально-аксиоматической точки зрения проективные плоскости можно рассматривать как расширенные плоскости, в которых игнорировано различие между собственными и несобственными точками.

С этой целью заметим, что группа $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}P^2)$ (см. предыдущий пункт) является, очевидно, подгруппой группы $\mathrm{Proj}(\mathbb{R}P^2)$. Поэтому (ср. п. 3 § 3 гл. 2) каждой аффинно-проективной плоскости $\mathfrak{M}^+$ мы можем сопоставить вполне определенную проективную плоскость $\mathfrak{M}_{\text{проект}}$, состоящую из тех же точек, проективными координатными системами которой являются отображения вида $\varphi\circ\alpha$, где α — произвольная однородная аффинная координатная система на плоскости $\mathfrak{M}^+$, а φ — произвольное преобразование из группы $\mathrm{Proj}(\mathbb{R}P^2)$.

Это означает, что проективная геометрия находится по отношению к аффинно-проективной геометрии в положении, сходном с положением аффинной геометрии по отношению к евклидовой (первая является «частью» второй или, что то же самое, вторая «богаче» первой).

Замечание 2. Тот факт, что проективные координатные системы имеют вид $\varphi\circ\alpha$, где $\alpha\in\mathrm{Coor}(\mathfrak{M}^+)$, $\varphi\in\mathrm{Proj}(\mathbb{R}P^2)$, означает, что соответствующие координаты $X':Y':Z'$ связаны с некоторыми однородными аффинными координатами $X:Y:Z$ формулами вида (1). Заменив в этих формулах однородные координаты соответствующими неоднородными аффинными координатами x, y, мы получим формулы, только обозначениями отличающиеся от формул (4) п. 6 § 1 гл. 2. Это показывает, что теперешняя концепция «проективных координат» совпадает с концепцией «однородных проективных координат» в смысле п. 6 § 1, гл. 2.

Чтобы, обратно, получить из проективной плоскости $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_{\text{проект}}$ аффинно-проективную плоскость, нужно выбрать некоторую проективную координатную систему

$$\alpha_0\colon \mathfrak{M}\to\mathbb{R}P^2$$

и принять за однородные аффинные координатные системы отображения вида $\varphi\circ\alpha_0$, где $\varphi\in\mathrm{Aff}(\mathbb{R}P^2)$. Получающаяся аффинно-проективная плоскость $\mathfrak{M}_{\alpha_0}$ зависит от выбора системы α_0.

Задание. Докажите, что *плоскости* $\mathfrak{M}_{\alpha_0}$ *и* $\mathfrak{M}_{\alpha_1}$, *отвечающие двум координатным системам* $\alpha_0\colon\mathfrak{M}\to\mathbb{R}P^2$ *и* $\alpha_1\colon\mathfrak{M}\to\mathbb{R}P^2$, *тогда и только тогда совпадают, когда*

$$\alpha_1\circ\alpha_0^{-1}\in\mathrm{Aff}(\mathbb{R}P^2). \tag{3}$$

Пусть теперь λ_0 — прямая на плоскости $\mathfrak{M}$, определяемая уравнеием

$$Z = 0 \qquad (4)$$

в координатной системе α_0, а λ_1 — прямая, определяемая тем же уравнением, но в координатной системе α_1.

Покажем, что

соотношение (3) *имеет место тогда и только тогда, когда прямые* λ_0 *и* λ_1 *совпадают.*

Действительно, пусть $X:Y:Z$ — координаты в системе α_0, а $X':Y':Z'$ — координаты в системе α_1. Если выполнено (3), то эти координаты связаны формулами (6) п. 4, и, в частности, $Z' = Z$. Поэтому $Z' = 0$ тогда и только тогда, когда $Z = 0$.

Обратно, пусть прямые λ_0 и λ_1 совпадают, т. е. $Z = 0$ тогда и только тогда, когда $Z' = 0$. Согласно аксиоме 2, $\alpha_1 \circ \alpha_0^{-1} \in \operatorname{Proj}(\mathbb{R}P^2)$, т. е. координаты $X:Y:Z$ и $X':Y':Z'$ связаны формулами (2), и, в частности,

$$Z' = c_1X + c_2Y + c_3Z.$$

Рассмотрим точку, для которой $X:Y:Z = 1:0:0$. Для этой точки $Z' = c_1$, а, с другой стороны, по условию $Z = 0$. Следовательно, $c_1 = 0$. Рассмотрев точку $X:Y:Z = 0:1:0$, мы аналогично получим, что $c_2 = 0$. Кроме того, поскольку все наши координаты заданы только с точностью до пропорциональности, мы без ограничения общности можем предполагать, что $c_3 = 1$ (вопрос: почему $c_3 \neq 0$?). Таким образом, формулы (2) совпадают в рассматриваемом случае с формулами (6) п. 4, т. е. имеет место соотношение (3).

Поскольку прямая (4) является в плоскости $\mathfrak{M}_{\alpha_0}$ несобственной прямой, мы видим, таким образом, что

переход от проективной плоскости к аффинно-проективной сводится к выбору некоторой (совершенно произвольной) прямой в качестве несобственной прямой.

Другими словами,

две аффинно-проективные плоскости, определяющие одну и ту же проективную плоскость, отличаются друг от друга только тем, какая прямая является несобственной прямой.

Это и является точным формальным выражением утверждения, что проективная плоскость получается из аффинно-проективной плоскости игнорированием различия между собственными и несобственными точками.

Упражнение. Докажите, что, аналогичным образом, вещественно-комплексные плоскости $\mathfrak{M}$, определяющие одну и ту же комплексную плоскость $\mathfrak{M}^{\text{компл}}$ (см. п. 5 § 3 гл. 2), отличаются только тем, какое подмножество является вещественной плоскостью $\mathfrak{M}^{\text{вещ}}$.

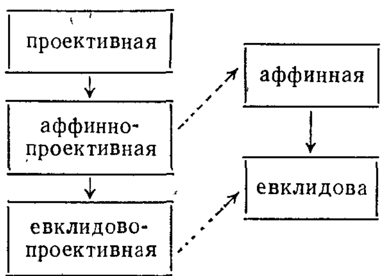
Мы ввели, таким образом, целую иерархию различных плоскостей и соответствующих геометрий. В некотором смысле наиболее общей (наиболее «бедной») является проективная геометрия. Чтобы получить более «богатую» аффинно-проективную геометрию, нужно в проективной плоскости фиксировать некоторую прямую. Это отражается в том, что от группы $\mathrm{Proj}(\mathbb{R}P^2)$ мы переходим к «меньшей» группе $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}P^2)$.

Чтобы затем получить аффинную геометрию, надо эту фиксированную прямую удалить. Группа $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}P^2)$ при этом не меняется (точнее, заменяется изоморфной группой $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$), а геометрия несколько «обедняется» (ее «поле действия» уменьшается).

Переход от аффинной геометрии к евклидовой, связанный с уменьшением группы $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ до ее подгруппы $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$, снова существенно обогащает геометрию.

Вместо того чтобы переходить от аффинно-проективной геометрии к аффинной, мы можем перейти к евклидово-проективной геометрии, сузив группу $\mathrm{Proj}(\mathbb{R}P^2)$ до ее подгруппы $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}P^2)$, и лишь затем получить евклидову геометрию, перейдя к изоморфной группе $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$ (и удалив несобственную прямую).

Эти взаимоотношения между геометриями можно изобразить следующей схемой:



Сплошные стрелки здесь означают переход к меньшей группе, а пунктирные — удаление несобственной прямой.

Конечно, аналогичная схема имеет место для любого поля $\mathbb{K}$, а для случая поля $\mathbb{C}$ даже в двух вариантах — «чисто комплексном» и «вещественно-комплексном».

Кроме того, все эти геометрии можно строить, например, при $n = 1$. В результате мы получаем понятия *проективной прямой*, *аффинно-проективной прямой* и т. д.

Задание. Опишите все соответствующие группы преобразований ($\mathrm{Proj}(\mathbb{R}P^1)$, $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}P^1)$ и т. д.).

Конечно, такого рода «одномерные» геометрии весьма просты и потому большого интереса не представляют (см., впрочем, конец п. 4 § 3 гл. 2).

Замечание 3 (очень важное!). Ясно, что любая прямая евклидовой или аффинной плоскости автоматически является евклидовой или, соответственно, аффинной прямой. То же самое верно и для прямых на проективной плоскости. Интересно, что для прямых на аффинно-проективной плоскости это, вообще говоря, неверно. Действительно, для несобственной прямой у нас нет никакого естественного способа определить ее как аффинно-проективную прямую, т. е. выделить на ней некоторую особую («несобственную») точку. Напротив, собственные прямые аффинно-проективной плоскости естественным образом определяются как аффинно-проективные прямые.

Таким образом, *несобственную прямую аффинно-проективной плоскости мы можем определить только как проективную прямую*. Аналитически это отражается в том, что на ней могут быть заданы однородные координаты, осуществляющие ее изоморфное отображение на стандартную проективную прямую $\mathbb{R}P^1$. Такие координаты мы, например, получим, сопоставив каждой несобственной точке плоскости координаты $l:m$ направляющего вектора произвольной собственной прямой, проходящей через эту несобственную точку.

Как уже отмечалось, нужно всегда отчетливо понимать, в какой именно геометрии справедливо то или иное утверждение. Помощь в этом может оказать тот факт, что для каждой геометрии существуют *предпочитаемые координатные системы*, наиболее приспособленные для ее изучения. Для проективной геометрии это — проективные координатные системы, для аффинно-проективной — однородные аффинные координатные системы и т. д. Поэтому использование, скажем, проективных координат, как правило, указывает, что соответствующее утверждение относится к проективной геометрии.

Конечно, любую геометрию можно изучать и в «чужих» координатах. Однако это всегда приводит к дополнительным осложнениям. Например, формулы евклидовой геометрии в аффинных координатах получаются существенно более сложными, чем в евклидовых (прямоугольных) координатах (появляются метрические коэффициенты базиса) и т. д.

6. Интерпретации проективной геометрии и их применения

Поскольку проективную плоскость можно получить из аффинно-проективной плоскости игнорированием различия между собственными и несобственными точками, построенные в п. 3 модели аффинно-проективной геометрии («пучковая» и «пространственная») являются одновременно и моделями проективной геометрии (только, конечно, в первой модели следует не различать собственные и несобственные пучки, а во второй — не обращать внимания на расположение прямых и плоскостей по отношению к оси Oz).

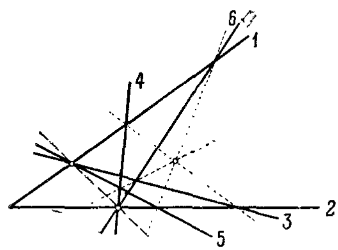
Это позволяет проинтерпретировать любое утверждение проективной геометрии как некоторое высказывание, скажем, о прямых и плоскостях в пространстве и потому применить к его доказательству стереометрические соображения.

Впрочем, на практике более удобно интерпретировать, скажем, прямые на проективной плоскости не прямыми в пространстве, а их направляющими векторами (как, по существу, мы и делали в п. 3), что позволяет применить к доказательству теорем проективной геометрии разработанный аппарат векторного исчисления.

Предупреждение. Следует всегда помнить, что прямой соответствует не один вектор, а целое семейство коллинеарных векторов. Нужно также не забывать, что нулевой вектор не соответствует никакой прямой.

Проиллюстрируем эти общие соображения на примере доказательства знаменитой теоремы Паппа — Брианшона.

Пусть на проективной плоскости даны шесть попарно различных прямых. Будем обозначать эти прямые цифрами **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**. Точку пересечения прямых n и m мы обозначим символом nm, а прямую, проходящую через точки nm и n_1m_1 (при условии, что $nm \neq n_1m_1$), — символом $nm \cdot n_1m_1$.

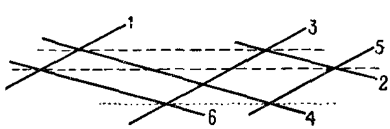


Теорема Паппа — Брианшона. *Если прямые* **1**, **3**, **5** *пересекаются в одной точке* ($13 = 15 = 35$), *а прямые* **2**, **4**, **6** *также пересекаются в одной точке* ($24 = 26 = 46$), *причем* $13 \neq 24$ *и ни одна из данных прямых не совпадает с прямой* $13 \cdot 24$, *то прямые*

$$14 \cdot 23, \quad 25 \cdot 16, \quad 36 \cdot 45$$

также пересекаются в одной точке.

Замечание 1. Являясь теоремой проективной геометрии, эта теорема справедлива и в аффинно-проективной геометрии. Однако на аффинно-проективной плоскости она распадается на несколько утверждений, в зависимости от того, сколько точек, явно или не явно участвующих в теореме, являются собственными, а сколько — несобственными. При соответствующей переформулировке эти утверждения становятся теоремами аффинной геометрии. Одним из таких частных случаев теоремы Паппа—Брианшона на аффинной плоскости является, например, следующее утверждение: если прямые **1**, **3**, **5** параллельны и прямые **2**, **4**, **6** также параллельны (но не параллельны прямым **1**, **3**, **5**) и если, кроме того, прямые $14 \cdot 23$ и $25 \cdot 16$ параллельны, то прямая $36 \cdot 45$ параллельна прямым $14 \cdot 23$ и $25 \cdot 16$.



Задание. Составьте полный список утверждений аффинной геометрии, являющихся частными случаями теоремы Паппа — Брианшона (и сделайте соответствующие чертежи).

Для доказательства теоремы Паппа — Брианшона мы переформулируем ее на языке векторного исчисления.

Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 — векторы, соответствующие прямым **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, а a_7, a_8, a_9 — векторы, соответствующие прямым **14·23**, **25·16**, **36·45**. Каждой прямой, проходящей через точку **14**, соответствует вектор вида $\mu_1 a_1 + \mu_4 a_4$, а каждой прямой, проходящей через точку **23**, — вектор вида $\nu_2 a_2 + \nu_3 a_3$. Следовательно, вектор a_7 обладает тем свойством, что он может быть представлен как в виде $\mu_1 a_1 + \mu_4 a_4$, так и в виде $\nu_2 a_2 + \nu_3 a_3$. Аналогично, вектор a_8 может быть представлен как в виде $\mu_2 a_2 + \mu_5 a_5$, так и в виде $\nu_1 a_1 + \nu_6 a_6$, а вектор a_9 — как в виде $\mu_3 a_3 + \mu_6 a_6$, так и в виде $\nu_4 a_4 + \nu_5 a_5$. Далее, тот факт, что прямые **1**, **3**, **5** проходят через одну точку (принадлежат одному пучку), означает, что векторы a_1, a_3, a_5 компланарны. Аналогично, тот факт, что прямые **2**, **4**, **6** проходят через одну точку, означает, что векторы a_2, a_4, a_6 компланарны. Наконец, условие, что **13** $\neq$ **24** и что ни одна из прямых **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** не совпадает с прямой **13·24**, означает, что ни один из векторов a_1, a_3, a_5 не компланарен векторам a_2, a_4, a_6 и, обратно, ни один из векторов a_2, a_4, a_6 не компланарен векторам a_1, a_3, a_5.

Это означает, что теорема Паппа — Брианшона может быть переформулирована следующим образом:

если

а) *векторы* a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 *попарно не коллинеарны*;

б) *векторы* a_1, a_3, a_5, *а также векторы* a_2, a_4, a_6, *компланарны*;

в) *ни один из векторов* a_1, a_3, a_5 *не компланарен векторам* a_2, a_4, a_6 *и ни один из векторов* a_2, a_4, a_6 *не компланарен векторам* a_1, a_3, a_5,

то векторы a_7, a_8, a_9, *удовлетворяющие соотношениям*

$$\begin{aligned} a_7 &= \mu_1 a_1 + \mu_4 a_4 = \nu_2 a_2 + \nu_3 a_3, \\ a_8 &= \mu_2 a_2 + \mu_5 a_5 = \nu_1 a_1 + \nu_6 a_6, \\ a_9 &= \mu_3 a_3 + \mu_6 a_6 = \nu_4 a_4 + \nu_5 a_5, \end{aligned} \tag{1}$$

компланарны.

В этом виде мы и будем ее доказывать.

Поскольку векторы a_1, a_3, a_5 компланарны, они параллельны некоторой плоскости Π_1. Аналогично, векторы a_2, a_4, a_6 параллельны некоторой плоскости Π_2. Плоскости Π_1 и Π_2 не параллельны, и потому существует единственная прямая, параллельная обеим этим плоскостям. Пусть e_0 — некоторый направляющий вектор этой прямой. Пусть, далее, e_1 — произвольный вектор, параллельный плоскости Π_1, но не коллинеарный вектору e_0, а e_2 — произвольный вектор, параллельный плоскости Π_2 и также не коллинеарный вектору e_0. Из условий, наложенных на векторы $a_1, \ldots, a_6$, немедленно следует, что векторы e_0, e_1, e_2 линейно независимы (составляют базис пространства) и что ни один из векторов $a_1, \ldots, a_6$ не коллинеарен вектору e_0.

При этом векторы a_1, a_3, a_5 выражаются через векторы e_0, e_1, а векторы a_2, a_4, a_6 — через векторы e_0, e_2.

Заметим теперь, что векторы $a_1, \ldots, a_6$ нам заданы лишь с точностью до коллинеарности. Поэтому, без потери общности, мы можем предполагать, что

$$\begin{aligned} a_1 &= k_1e_0 + e_1, & a_2 &= k_2e_0 + e_2, \\ a_3 &= k_3e_0 + e_1, & a_4 &= k_4e_0 + e_2, \\ a_5 &= k_5e_0 + e_1, & a_6 &= k_6e_0 + e_2, \end{aligned}$$

где k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6 — некоторые числа.

Подставив эти выражения в первое из равенств (1), мы немедленно получим, что

$$a_7 = (\mu_1k_1 + \mu_4k_4)\, e_0 + \mu_1e_1 + \mu_4e_2 = (\nu_2k_2 + \nu_3k_3)\, e_0 + \nu_3e_1 + \nu_2e_2.$$

Так как векторы e_0, e_1, e_2 линейно независимы, это равенство может иметь место только тогда, когда

$$\mu_1 = \nu_3, \quad \mu_4 = \nu_2$$

и

$$\mu_1k_1 + \mu_4k_4 = \nu_2k_2 + \nu_3k_3.$$

Следовательно,

$$\mu_1(k_1 - k_3) = \mu_4(k_2 - k_4).$$

Поскольку вектор a_7 нам задан также лишь с точностью до коллинеарности, мы без ограничения общности можем считать, что $\mu_1 = k_2 - k_4$ (заметим, что $k_2 \neq k_4$, ибо в противном случае векторы a_2 и a_4 совпадают). Тогда $\mu_4 = k_1 - k_3$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} a_7 &= [(k_2 - k_4)\, k_1 + (k_1 - k_3)\, k_4]\, e_0 + (k_2 - k_4)\, e_1 + (k_1 - k_3)\, e_2 = \\ &= (k_1k_2 - k_3k_4)\, e_0 + (k_2 - k_4)\, e_1 + (k_1 - k_3)\, e_2. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что

$$\begin{aligned} a_8 &= (k_1k_2 - k_5k_6)\, e_0 + (k_2 - k_6)\, e_1 + (k_1 - k_5)\, e_2, \\ a_9 &= (k_3k_4 - k_5k_6)\, e_0 + (k_4 - k_6)\, e_1 + (k_3 - k_5)\, e_2. \end{aligned}$$

Но теперь ясно, что

$$a_7 + a_9 = a_8$$

и, следовательно, векторы a_7, a_8, a_9 компланарны. Тем самым теорема Паппа — Брианшона полностью доказана.

Вспомним теперь, что наряду с «пространственной» интерпретацией, которой мы воспользовались для доказательства теоремы Паппа — Брианшона (и в которой точки изображаются плоскостями, а прямые — прямыми), у нас есть также и рассмотренная в п. 4 интерпретация $\mathfrak{M}_O$ (в которой точки изображаются прямыми, а прямые — плоскостями), которую мы с равным правом можем использовать для доказательства теорем проективной геометрии. Поэтому одно и то же стереометрическое рассуждение даст нам две (как правило, различные) теоремы проективной геометрии: одну, когда мы воспользуемся первой интерпретацией, и другую, когда мы воспользуемся второй интерпретацией. Чтобы сравнить друг с другом эти теоремы, нам удобно усовершенствовать терминологию (впрочем, этой усовершенствованной терминологией мы уже иногда пользовались, так что читателю она должна быть знакома). Именно, вместо того чтобы говорить «прямая проходит через точку», т. е. что «точка лежит на прямой», мы будем говорить, что прямая и точка *инцидентны*. Аналогично, мы будем говорить, что прямая и плоскость инцидентны, если прямая содержится в плоскости.

Теорему, в которой говорится только о точках и прямых (или прямых и плоскостях) и об отношении инцидентности между ними, мы будем называть *конфигурационной теоремой*.

Обратим теперь внимание на то, что обе построенные выше интерпретации *сохраняют отношение инцидентности*, т. е. если точка и прямая инцидентны на проективной плоскости, то соответствующие прямая и плоскость в пространстве также инцидентны (и наоборот). Поэтому любая верная конфигурационная теорема $\mathscr{A}$ на проективной плоскости переходит при каждой интерпретации в верную конфигурационную теорему в пространстве. Пусть это будет теорема $\mathscr{A}_1$ для первой интерпретации и теорема $\mathscr{A}_2$ для второй интерпретации. Формально переход от теоремы $\mathscr{A}$, скажем, к теореме $\mathscr{A}_1$, состоит в том, что слово «точка» всюду заменяется словом «плоскость». Аналогично, чтобы из теоремы $\mathscr{A}$ получить теорему $\mathscr{A}_2$, нужно слово «точка» заменить словом «прямая», а слово «прямая» — словом «плоскость». Поэтому теоремы $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ (вообще говоря, различные) переходят друг в друга при замене слова «плоскость» словом «прямая», а слова «прямая» словом «плоскость».

Например, если мы примем за $\mathscr{A}$ теорему «любые две различные точки инцидентны единственной прямой», то теоремой $\mathscr{A}_1$ будет высказывание «любые две различные плоскости инцидентны единственной прямой», а теоремой $\mathscr{A}_2$ — высказывание «любые две различные прямые инцидентны единственной плоскости» (напомним, что мы рассматриваем лишь прямые и плоскости пространства, проходящие через фиксированную точку O).

Определение 6. Две конфигурационные теоремы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}'$ на проективной плоскости называются *двойственными*, если одна из них получается из второй заменой (всюду) слова «точка» словом «прямая» и слова «прямая» — словом «точка».

Из сказанного выше непосредственно вытекает, что

теоремы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ тогда и только тогда двойственны, когда теорема $\mathcal{A}_1$, отвечающая теореме $\mathcal{A}$ в первой интерпретации, совпадает с теоремой $\mathcal{A}'_2$, отвечающей теореме $\mathcal{A}'$ во второй интерпретации:

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}'_2.$$

Но мы знаем, что теоремы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_1$ (а также теоремы $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}'_2$) одновременно верны или неверны. Поэтому справедлив следующий общий принцип:

Принцип двойственности. *Конфигурационная теорема, двойственная верной теореме, также верна.*

Например, верной теореме «любые две различные точки инцидентны единственной прямой» двойственна верная (на проективной плоскости!) теорема «любые две различные прямые инцидентны единственной точке».

Замечание 2. Подчеркнем, что принцип двойственности не является теоремой проективной геометрии, поскольку он говорит не о точках и прямых, а о теоремах. Он принадлежит науке, изучающей теоремы проективной геометрии (эту науку можно, если угодно, назвать *метагеометрией*).

Принцип двойственности позволяет «бесплатно» получать из доказанных теорем новые верные утверждения (правда, иногда теорема может оказаться «самодвойственной» и тогда никакой новой теоремы мы не получим).

Например, теореме Паппа — Брианшона двойственна следующая

Теорема Паппа—Паскаля. *Если из шести точек* **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** *точки* **1**, **3**, **5** *расположены на одной прямой и точки* **2**, **4**, **6** *также расположены на одной прямой (отличной от первой), причем ни одна из точек* **1**, ..., **6** *не совпадает с точкой пересечения этих прямых, то точка пересечения прямой* **14** *с прямой* **23**, *точка пересечения прямой* **25** *с прямой* **16** *и точка пересечения прямой* **36** *с прямой* **45** *расположены на одной прямой*[1].

Чтобы полнее уяснить содержание этой теоремы, мы заметим, что в ней участвуют девять точек: данные точки **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** и три точки пересечения (точка **7** пересечения прямых **14** и **23**, точка **8** пересечения прямых **25** и **16**, точка **9** пересечения прямых **36** и **45**), а также девять прямых

13, **14**, **25**, **27**, **39**, **46**, **59**, **68**, **79**.

Обозначив эти прямые (в указанном порядке) цифрами

5, **7**, **8**, **3**, **6**, **2**, **4**, **1**, **9**,

мы можем теорему Паппа — Паскаля переформулировать следующим образом:

---

[1]) Обратим внимание на то, что аксиома Паппа аффинной планиметрии (см. дополнение к § 3 гл. 2) является одним из аффинных частных случаев этой теоремы.

(*) *если каждая из точек* **1—8** *инцидентна с прямой, обозначенной той же цифрой, то точка* **9** *также инцидентна с прямой* **9**.

Конфигурация, состоящая из точек **1—9** и прямых **1—9**, называется *конфигурацией Паппа.* В ней каждая прямая инцидентна трем точкам и каждая точка инцидентна трем прямым.

Эта конфигурация обладает замечательным свойством симметрии, состоящим в том, что если мы выберем в ней две тройки коллинеарных точек и будем по ним строить (указанным выше образом) конфигурацию Паппа, то в результате получим ту же конфигурацию. Другими словами, конфигурация Паппа не зависит от того, какие составляющие ее точки мы обозначаем цифрами **1—6**. Еще иначе, можно сказать, что *все точки конфигурации Паппа совершенно равноправны.*

Двойственная теорема Паппа — Брианшона аналогичным образом может рассматриваться как теорема, обеспечивающая возможность построения некоторой конфигурации точек и прямых, исходя из двух троек прямых, проходящих через одну точку. Замечательно, что при этом получается т а ж е конфигурация Паппа. Действительно, переформулировав теорему Паппа—Брианшона, подобно тому как мы выше переформулировали теорему Паппа—Паскаля, как легко видеть, получим ту же формулировку (*) (достаточно заметить, что формулировка (*) сама себе двойственна). Таким образом, *обе теоремы Паппа—Паскаля и Паппа — Брианшона выражают в сущности один и тот же математический факт* — существование конфигурации Паппа; только теорема Паппа — Паскаля обеспечивает возможность построения этой конфигурации, «исходя из точек», а теорема Паппа — Брианшона — «исходя из прямых».

Заметим, что теорема Паппа — Брианшона обеспечивает также полную симметричность конфигурации Паппа и в отношении прямых.

7. Конфигурационная геометрия

При исследовании отношения инцидентности точек и прямых на проективной плоскости целесообразно несколько изменить точку зрения и рассматривать прямые не как множества точек, а как некие новые объекты, связанные с точками отношением инцидентности. Формализуя этот подход, мы приходим к следующему определению:

Определение 1. Пусть $\mathfrak{P}$ — множество элементов двух сортов, одни из которых называются *точками*, а другие — *прямыми.* Предположим, что на множестве $\mathfrak{P}$ задано некоторое отношение, связывающее точки и прямые и называемое отношением *инцидентности.* Такое множество $\mathfrak{P}$ называется *конфигурационной плоскостью*, если выполнены следующие аксиомы:

Инц. 1. *Любые две различные точки инцидентны одной и только одной прямой.*

Инц. 2. *Любые две различные прямые инцидентны одной и только одной точке.*

Инц. 3. *Любая прямая инцидентна по крайней мере трем различным точкам.*

Инц. 4. *Любая точка инцидентна по крайней мере трем различным прямым.*

Замечание 1. Термин «конфигурационная плоскость» мало употребителен. Обычно предпочитают говорить о «проективной плоскости». Однако это для нас неприемлемо, поскольку термин «проективная плоскость» мы уже употребляем в другом смысле (см. определение 1 п. 5). Конечно, каждая проективная плоскость является конфигурационной плоскостью (точнее, множество ее точек и прямых составляют конфигурационную плоскость), но (как показывают простые примеры) обратное неверно.

Трудно ожидать, чтобы из тощих аксиом Инц. 1—4 можно было извлечь интересные следствия. Поэтому обычно к этим аксиомам добавляют еще другие дополнительные аксиомы. Наиболее важной из них является следующая аксиома Паппа:

Инц. 5. *Возможно построение конфигураций Паппа, т. е. выполнены теоремы Паппа — Паскаля и Паппа — Брианшона.*

Определение 2. Конфигурационная плоскость, в которой выполнена аксиома Паппа, называется *папповой плоскостью.*

Поскольку доказательство теоремы Паппа — Брианшона, изложенное в предыдущем пункте, проходит, очевидно, в проективной геометрии над любым полем $\mathbb{K}$, то

проективная плоскость над любым полем $\mathbb{K}$ является папповой плоскостью.

Замечательно, что обратное утверждение также справедливо.

Теорема 1. *Любая паппова плоскость изоморфна проективной плоскости над некоторым полем $\mathbb{K}$.*

Термин «изоморфна» понимается здесь в естественном смысле: существует биективное отображение, переводящее точки в точки, прямые в прямые и сохраняющее отношение инцидентности.

Доказательство теоремы 1 в достаточной мере трудно и мы его опустим [1]).

Из теоремы 1 следует, что аксиомы Инц. 1—5 *полны*, в том (новом для нас) смысле, что каждая конфигурационная теорема, верная в проективной геометрии над любым полем $\mathbb{K}$, может быть выведена из этих аксиом.

Это не мешает, конечно, существованию конфигурационных теорем, не вытекающих из аксиом Инц. 1—5. Примером является следующая теорема:

---

[1]) Доказательство можно найти в книжке Р. Хартсхорна, Основы проективной геометрии, Мир, 1970 г. (а также в книжке Э. Артина, Геометрическая алгебра, Наука, 1969 г.).

Теорема Фано. *Для любой четверки точек* **1, 2, 3, 4,** *любые три из которых неколлинеарны, точки*

12·34, 13·24, 14·23

не коллинеарны.

Упражнение. Докажите, что *в проективной геометрии над полем* $\mathbb{K}$ *тогда и только тогда справедлива теорема Фано, когда характеристика поля* $\mathbb{K}$ *отлична от двух.*

Указание: рассмотрите проективную координатную систему, в которой точки 1, 2, 3, 4 имеют координаты $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$ и $(1:1:1)$.

Примером теоремы, вытекающей из аксиом Инц. 1—5, является следующая

Теорема Дезарга. *Пусть* **1, 2, 3, 4, 5, 6** — *такие (попарно различные) точки, что прямые* **14, 25** *и* **36** *инцидентны одной точке (отличной от точек* **1—6**). *Тогда точки*

12·45, 13·46, 23·56

коллинеарны [1]).

Упражнение. Докажите, что теорема Дезарга справедлива в проективной геометрии над любым полем $\mathbb{K}$. Затем выведите ее из аксиом Инц. 1—5, т. е. покажите, что она справедлива в любой папповой плоскости.

Задание. Сформулируйте теорему, обратную к теореме Дезарга, и теорему, двойственную теореме Дезарга. Установите, что обе эти теоремы равносильны теореме Дезарга (обеспечивают возможность построения одной и той же конфигурации).

К вопросу о роли теоремы Дезарга в геометрии плоскости мы еще вернемся в п. 4 § 2.

«Конфигурационная» точка зрения проливает также новый свет на принцип двойственности (см. п. 6). Действительно, очевидно, что аксиомы Инц. 1 — 4 попарно двойственны. Кроме того, аксиома Инц. 5, как мы знаем, сама себе двойственна.

Поэтому, если мы возьмем произвольную конфигурационную теорему, вытекающую из аксиом Инц. 1—5, и в ее выводе всюду поменяем местами слова «точка» и «прямая», то получим правильный вывод двойственной теоремы из двойственных (т. е. тех же) аксиом. Это доказывает, что

в любой папповой плоскости справедлив принцип двойственности.

Поскольку любая проективная плоскость (над произвольным полем $\mathbb{K}$) является папповой плоскостью, отсюда, казалось бы, вытекает принцип двойственности и для проективных плоскостей (и притом над произвольным полем $\mathbb{K}$). Однако это не совсем так: таким способом принцип двойственности обосновывается лишь для теорем, вытекающих из аксиом Инц. 1—5 (т. е. справедливых над л ю б ы м полем $\mathbb{K}$). Применим ли принцип

[1]) Аффинным частным случаем этой теоремы является аксиома Дезарга из дополнения к § 3 гл. 2.

двойственности, например, к теореме Фано, остается при этом совершенно неясным.

Чтобы «конфигурационными» рассуждениями доказать принцип двойственности в полном объеме (и над любым полем $\mathbb{K}$), можно поступить, например, следующим образом.

Определение 3. *Антиавтоморфизмом* (употребителен также термин *коррелятивное преобразование*) конфигурационной плоскости $\mathfrak{P}$ называется ее биективное отображение на себя (преобразование), переводящее точки в прямые, прямые в точки и сохраняющее отношение инцидентности (т. е. обладающее тем свойством, что точка A и прямая α тогда и только тогда инцидентны, когда прямая, соответствующая точке A, инцидентна точке, соответствующей прямой α).

Ясно, что

если конфигурационная плоскость обладает хотя бы одним антиавтоморфизмом, то на ней выполнен принцип двойственности.

Поэтому для доказательства принципа двойственности в проективной геометрии над полем $\mathbb{K}$ достаточно доказать, что

проективная плоскость над полем $\mathbb{K}$ обладает хотя бы одним антиавтоморфизмом.

Но какой-нибудь антиавтоморфизм проективной плоскости строится очень легко: достаточно выбрать на плоскости произвольную проективную координатную систему и сопоставить каждой точке $(X:Y:Z)$ прямую с теми же координатами (т. е. имеющую числа X, Y, Z коэффициентами ее общего уравнения). Ясно, что это соответствие биективно. Покажем, что оно сохраняет отношение инцидентности.

Пусть точка $(X:Y:Z)$ и прямая $(A:B:C)$ инцидентны. Это означает, что

$$AX+BY+CZ=0. \tag{1}$$

При нашем соответствии точка $(X:Y:Z)$ переходит в прямую $(X:Y:Z)$, а прямая $(A:B:C)$ — в точку $(A:B:C)$. Поскольку инцидентность прямой $(X:Y:Z)$ и точки $(A:B:C)$ выражается тем же уравнением (1), наше утверждение, тем самым, полностью доказано.

Факт существования антиавтоморфизма означает, что

проективную плоскость можно проинтерпретировать в себе так, чтобы точкам соответствовали прямые, а прямым — точки.

В этом смысле геометрия прямых на проективной плоскости полностью эквивалентна геометрии точек.

Именно это обстоятельство и определяет красоту и изящество проективной геометрии (по сравнению с аффинной).

Замечание 2. Теперь мы можем объяснить, почему прямые на аффинной плоскости нельзя описывать неоднородными (всюду определенными) координатами (см. замечание 1 п. 1). Действительно, множество всех прямых аффинной плоскости получается из множества всех прямых проективной плоскости удалением одной прямой. Поэтому любой антиавтоморфизм проективной плоскости переводит это множество в множество всех точек проективной плоскости, за исключением одной точки. Если бы в множество всех прямых аффинной плоскости можно было ввести неоднородные координаты, то неоднородные координаты можно было бы ввести и в множество точек проективной плоскости, получающееся удалением одной точки. Но это, как мы знаем, сделать нельзя (нужно удалить целую прямую).

Дополнение. **Трилинейные координаты**

Определение 1. Пусть на евклидовой плоскости дана некоторая прямая λ и точка M_0, не принадлежащая прямой λ. Для любой точки M плоскости отношение r расстояния от точки M до прямой λ к расстоянию от M_0 до λ, взятое со знаком «плюс», если точки M и M_0 находятся по одну сторону от λ, и со знаком «минус» в противном случае, мы будем называть *расстоянием точки M до прямой λ по отношению к точке M_0.*

Пусть x, y — прямоугольные координаты на плоскости,

$$Ax + By + C = 0$$

— уравнение прямой λ в этих координатах и (x_0, y_0) — координаты точки M_0. В силу результатов п. 5 § 1 гл. 3 расстояние r произвольной точки $M(x, y)$ до прямой λ по отношению к точке M_0 выражается формулой

$$r = \frac{Ax + By + C}{Ax_0 + By_0 + C}. \tag{1}$$

Несмотря на то, что в определении расстояния r участвуют метрические понятия, оказывается, что *это расстояние аффинно-инвариантно* (т. е. принадлежит аффинной геометрии).

Упражнение. Покажите, что формула (1) остается верной в любых аффинных координатах x, y, дайте также геометрическое определение величины r в терминах, имеющих афинно-инвариантный смысл.

Предположим теперь, что на (аффинной) плоскости нам даны три прямые общего положения

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3$$

и некоторая точка E, не принадлежащая ни одной из этих прямых. Тогда для любой точки M будут определены три числа:

x_1 — расстояние точки M до прямой λ_1 по отношению к точке E;
x_2 — расстояние точки M до прямой λ_2 по отношению к точке E;
x_3 — расстояние точки M до прямой λ_3 по отношению к точке E.

Определение 2. Числа x_1, x_2, x_3 называются *трилинейными координатами* точки M, определенными прямыми λ_1, λ_2, λ_3 и точкой E.

Основной целью этого дополнения является доказательство следующего предложения:

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{M}^+$ — аффинно-проективная плоскость, полученная расширением аффинной плоскости $\mathfrak{M}$. Рассмотрим на плоскости $\mathfrak{M}^+$ проектив-*

ную координатную систему с репером E_0, E_1, E_2, E_3, состоящим из собственных точек (т. е. из точек плоскости $\mathfrak{M}$). Пусть

$$\lambda_1 = E_2E_3, \quad \lambda_2 = E_1E_3, \quad \lambda_3 = E_1E_2$$

— соответствующие координатные прямые. Тогда для любой собственной точки M ее проективные координаты $X : Y : Z$ пропорциональны ее трилинейным координатам x_1, x_2, x_3, определенным прямыми λ_1, λ_2, λ_3 и точкой E_0.

Короче:

проективные координаты пропорциональны трилинейным.

Это предложение дает вполне удовлетворительное наглядное описание проективных координат любых собственных точек.

Доказательство. Поскольку все аффинно-проективные плоскости изоморфны, мы без ограничения общности можем считать, что плоскостью $\mathfrak{M}^+$ является рассмотренная в начале п. 5 аффинно-проективная плоскость, точками которой являются прямые в пространстве, проходящие через фиксированную точку O. По определению, точка этой плоскости является собственной точкой, если как прямая в пространстве она не параллельна некоторой фиксированной плоскости П, не проходящей через точку O. Следовательно, сопоставив такой прямой ее точку пересечения с плоскостью П, мы можем аффинную плоскость $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^+$ отождествить с плоскостью П. В частности, точки E_0, E_1, E_2, E_3 мы можем считать точками плоскости П.

Согласно п. 5 для построения проективной координатной системы с репером E_0, E_1, E_2, E_3 мы должны рассмотреть в пространстве прямые

$$OE_0, \quad OE_1, \quad OE_2, \quad OE_3$$

и найти такие направляющие векторы e_1, e_2, e_3 прямых OE_1, OE_2, OE_3, чтобы вектор

$$e_0 = e_1 + e_2 + e_3$$

был направляющим вектором прямой OE_0. Тогда для любой собственной точки плоскости $\mathfrak{M}^+$ (т. е. некоторой точки M плоскости П) ее проективные координаты $X : Y : Z$ в координатной системе с репером E_0, E_1, E_2, E_3 будут пропорциональны ее аффинным координатам x, y, z (как точки пространства) в репере $Oe_1e_2e_3$. Таким образом, для доказательства предложения 1 нам нужно только доказать, что

$$x : y : z = x_1 : x_2 : x_3$$

для любой точки плоскости П.

Пусть

$$\overrightarrow{OE}_0 = k_0e_0, \quad \overrightarrow{OE}_1 = k_1e_1, \quad \overrightarrow{OE}_2 = k_2e_2, \quad \overrightarrow{OE}_3 = k_3e_3.$$

Тогда точки E_0, E_1, E_2, E_3 будут иметь в пространстве (относительно репера $Oe_1e_2e_3$) аффинные координаты

$$E_0\,(k_0, k_0, k_0), \quad E_1\,(k_1, 0, 0), \quad E_2\,(0, k_2, 0), \quad E_3\,(0, 0, k_3),$$

причем будет иметь место равенство

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}.$$

Рассмотрим теперь в пространстве новый аффинный координатный репер $O'e'_1e'_2e'_3$, для которого

$$O' = E_1, \quad e'_1 = \overrightarrow{OE_1}, \quad e'_2 = \overrightarrow{E_1E_2}, \quad e'_3 = \overrightarrow{E_1E_3}.$$

Так как

$$e'_1 = \overrightarrow{OE_1} = k_1e_1,$$

$$e'_2 = -\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2} = -k_1e_1 + k_2e_2,$$

$$e'_3 = -\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_3} = -k_1e_1 + k_3e_3$$

и

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OE_1} = k_1e_1,$$

то формулы перехода от координат x', y', z' в репере $O'e'_1e'_2e'_3$ к координатам x, y, z в репере $Oe_1e_2e_3$ имеют вид

$$\begin{aligned} x &= k_1x' - k_1y' - k_1z' + k_1, \\ y &= \phantom{k_1x' - {}} k_2y', \\ z &= \phantom{k_1x' - k_1y' - {}} k_3z', \end{aligned}$$

а потому формулы перехода от координат x, y, z к координатам x', y', z' — вид

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{k_1} + \frac{y}{k_2} + \frac{z}{k_3} - 1, \\ y' &= \phantom{\frac{x}{k_1} + {}} \frac{y}{k_2}, \\ z' &= \phantom{\frac{x}{k_1} + \frac{y}{k_2} + {}} \frac{z}{k_3}. \end{aligned}$$

При этом уравнение плоскости П в координатах x', y', z' будет иметь вид

$$x' = 0,$$

а величины

$$\xi = y', \quad \eta = z'$$

будут аффинными координатами на плоскости П, определенными репером $O'e'_2e'_3$.

В координатах ξ, η точки E_0, E_1, E_2, E_3 плоскости П имеют, очевидно, координаты:

$$E_0\left(\frac{k_0}{k_2}, \frac{k_0}{k_3}\right), \quad E_1\,(0, 0), \quad E_2\,(1, 0), \quad E_3\,(0, 1).$$

Поэтому координатная прямая $\lambda_1 = E_2E_3$ будет иметь уравнение

$$\xi + \eta - 1 = 0,$$

координатная прямая $\lambda_2 = E_1E_3$ — уравнение

$$\xi = 0$$

(т. е. будет осью ординат), а координатная прямая $\lambda_3 = E_1E_2$ будет осью абсцисс

$$\eta = 0.$$

Следовательно, для любой точки $M(\xi, \eta)$ плоскости Π ее трилинейные координаты x_1, x_2, x_3, определенные прямыми λ_1, λ_2, λ_3 и точкой E_0, будут выражаться формулами

$$x_1 = \frac{\xi + \eta - 1}{\frac{k_0}{k_2} + \frac{k_0}{k_3} - 1} = \frac{k_1}{k_0}(1 - \xi - \eta),$$

$$x_2 = \frac{k_2}{k_0}\xi,$$

$$x_3 = \frac{k_3}{k_0}\eta,$$

т. е. формулами

$$x_1 = \frac{k_1}{k_0}(1 - y' - z') = \frac{x - k_1 x'}{k_0} = \frac{x}{k_0},$$

$$x_2 = \frac{k_2}{k_0} y' = \frac{y}{k_0},$$

$$x_3 = \frac{k_3}{k_0} z' = \frac{z}{k_0}$$

(в первом преобразовании мы воспользовались тем, что $x' = 0$ для точек плоскости Π).

Таким образом, действительно $x : y : z = x_1 : x_2 : x_3$.

Пусть x, y — произвольные аффинные координаты на плоскости Π и пусть

$$(x_0, y_0), \quad (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3)$$

— координаты точек E_0, E_1, E_2, E_3 в этой координатной системе. Тогда уравнения прямых λ_1, λ_2, λ_3 будут иметь вид

$$(y_3 - y_2)(x - x_2) - (x_3 - x_2)(y - y_2) = 0,$$
$$(y_3 - y_1)(x - x_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1) = 0,$$
$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0,$$

и, следовательно, трилинейные координаты x_1, x_2, x_3 произвольной точки $M(x, y)$ будут выражаться формулами

$$x_1 = \frac{(y_3 - y_2)(x - x_2) - (x_3 - x_2)(y - y_2)}{(y_3 - y_2)(x_0 - x_2) - (x_3 - x_2)(y_0 - y_2)},$$

$$x_2 = \frac{(y_3 - y_1)(x - x_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1)}{(y_3 - y_1)(x_0 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_0 - y_1)},$$

$$x_3 = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1)}{(y_2 - y_1)(x_0 - x_1) - (x_2 - x_1)(y_0 - y_1)}.$$

Тем самым доказано, что

проективные координаты $X : Y : Z$ произвольной (собственной) точки $M(x, y)$ в проективной системе координат с репером

$$E_0(x_0, y_0), \quad E_1(x_1, y_1), \quad E_2(x_2, y_2), \quad E_3(x_3, y_3)$$

выражаются формулами

$$\rho X = \frac{(y_3 - y_2)(x - x_2) - (x_3 - x_2)(y - y_2)}{(y_3 - y_2)(x_0 - x_2) - (x_3 - x_2)(y_0 - y_2)},$$
$$\rho Y = \frac{(y_3 - y_1)(x - x_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1)}{(y_3 - y_1)(x_0 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_0 - y_1)}, \qquad (1)$$
$$\rho Z = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1)}{(y_2 - y_1)(x_0 - x_1) - (x_2 - x_1)(y_0 - y_1)},$$

где ρ — *произвольный множитель пропорциональности.*

Формулы (1) представляют собой *формулы перехода* от аффинных координат x, y к проективным координатам $X : Y : Z$.

Формулы (1) можно разрешить относительно x, y, т. е. выразить координаты x, y через координаты $X : Y : Z$. В общем случае мы этого делать не будем, а ограничимся только случаем, когда точки E_1, E_2, E_3 имеют координаты

$$(1, 0), \quad (0, 1), \quad (0, 0)$$

(заметим, что для любых трех неколлинеарных точек E_1, E_2, E_3 всегда существует, и притом единственная, аффинная координатная система, в которой точки E_1, E_2, E_3 имеют эти координаты).

В этом случае формулы (1) приобретают вид

$$\rho X = \frac{x}{x_0},$$
$$\rho Y = \frac{y}{y_0},$$
$$\rho Z = \frac{x + y - 1}{x_0 + y_0 - 1}.$$

Находя из этих формул x, y, мы получаем

$$x = \frac{X x_0}{X x_0 + Y y_0 - Z(x_0 + y_0 - 1)},$$
$$y = \frac{Y y_0}{X x_0 + Y y_0 - Z(x_0 + y_0 - 1)}.$$

Если

$$x_0 = \frac{1}{3}, \quad y_0 = \frac{1}{3},$$

т. е. если точка E_0 является центром тяжести точек E_1, E_2, E_3, эти формулы упрощаются:

$$x = \frac{X}{X + Y + Z},$$
$$y = \frac{Y}{X + Y + Z}.$$

Полученные формулы означают, что числа x, y являются координатами центра тяжести масс X, Y, Z, помещенных в точках E_1, E_2, E_3. Следовательно, $X : Y : Z$ являются не чем иным, как барицентрическими координатами (см. п. 6 § 1 гл. 2). Таким образом, *барицентрические координаты являются частным случаем проективных координат, получающимся, когда точка E_0 является центром тяжести точек E_1, E_2, E_3.*

Аналогично можно найти формулы перехода от аффинных координат x, y к проективным координатам $X : Y : Z$, определенным репером, одна или две точки которого являются несобственными точками. Мы не будем разбирать этот вопрос в полной общности (хотя и настоятельно рекомендуем сделать это читателю), а ограничимся случаем, когда точки E_0 и E_3 — собственные, а точки E_1 и E_2 — несобственные. При этом мы дополнительно будем предполагать, что точка E_0 имеет координаты $(1, 1)$, точка E_3 — координаты $(0, 0)$ (является началом координат), точка E_1 является несобственной точкой оси абсцисс, а точка E_2 — несобственной точкой оси ординат.

Согласно общему определению из п. 5 проективные координаты с таким репером являются аффинными координатами в пространстве, отвечающими аффинному координатному реперу $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, для которого векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ параллельны осям координат данной аффинной координатной системы Oxy на плоскости П, вектор $\boldsymbol{e}_3$ параллелен прямой OE_3, а вектор

$$\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$$

обладает тем свойством, что он параллелен прямой OE_0. Ясно, что все эти условия будут выполнены, если мы выберем репер $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ так, чтобы в соответствующих аффинных координатах X, Y, Z плоскость П определялась уравнением

$$Z = 1,$$

а координаты X, Y совпадали на плоскости П с данными координатами x, y. (Заметим, что эти условия однозначно определяют репер $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$.)

Поскольку проективными координатами точки $M(x, y)$ плоскости являются, по определению, ее координаты X, Y, Z в этом репере, тем самым доказано, что

проективные координаты $X : Y : Z$ произвольной (собственной) точки $M(x, y)$ в проективной координатной системе с репером E_0, E_1, E_2, E_3, для которого

а) *точка E_0 имеет координаты* $(1, 1)$;

б) *точка E_1 является несобственной точкой оси абсцисс Ox*;

в) *точка E_2 является несобственной точкой оси ординат Oy*;

г) *точка E_3 имеет координаты* $(0,0)$ (*является началом координат*), *определяются соотношением*

$$X : Y : Z = x : y : 1,$$

т. е. являются однородными аффинными координатами.

§ 2. ГЕОМЕТРИЯ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Геометрия плоскостей в пространстве во многом аналогична геометрии прямых на плоскости. Поэтому некоторые утверждения мы будем оставлять читателю в качестве упражнений и заданий.