(см. п. 6 § 1 гл. 2). Таким образом, *барицентрические координаты являются частным случаем проективных координат, получающимся, когда точка E_0 является центром тяжести точек E_1, E_2, E_3.*

Аналогично можно найти формулы перехода от аффинных координат x, y к проективным координатам $X : Y : Z$, определенным репером, одна или две точки которого являются несобственными точками. Мы не будем разбирать этот вопрос в полной общности (хотя и настоятельно рекомендуем сделать это читателю), а ограничимся случаем, когда точки E_0 и E_3 — собственные, а точки E_1 и E_2 — несобственные. При этом мы дополнительно будем предполагать, что точка E_0 имеет координаты $(1, 1)$, точка E_3 — координаты $(0, 0)$ (является началом координат), точка E_1 является несобственной точкой оси абсцисс, а точка E_2 — несобственной точкой оси ординат.

Согласно общему определению из п. 5 проективные координаты с таким репером являются аффинными координатами в пространстве, отвечающими аффинному координатному реперу $Oe_1e_2e_3$, для которого векторы e_1, e_2 параллельны осям координат данной аффинной координатной системы Oxy на плоскости П, вектор e_3 параллелен прямой OE_3, а вектор

$$e_0 = e_1 + e_2 + e_3$$

обладает тем свойством, что он параллелен прямой OE_0. Ясно, что все эти условия будут выполнены, если мы выберем репер $Oe_1e_2e_3$ так, чтобы в соответствующих аффинных координатах X, Y, Z плоскость П определялась уравнением

$$Z = 1,$$

а координаты X, Y совпадали на плоскости П с данными координатами x, y. (Заметим, что эти условия однозначно определяют репер $Oe_1e_2e_3$.)

Поскольку проективными координатами точки $M(x, y)$ плоскости являются, по определению, ее координаты X, Y, Z в этом репере, тем самым доказано, что

проективные координаты $X : Y : Z$ произвольной (собственной) точки $M(x, y)$ в проективной координатной системе с репером E_0, E_1, E_2, E_3, для которого

а) *точка E_0 имеет координаты* $(1, 1)$;

б) *точка E_1 является несобственной точкой оси абсцисс Ox*;

в) *точка E_2 является несобственной точкой оси ординат Oy*;

г) *точка E_3 имеет координаты* $(0,0)$ (*является началом координат*), *определяются соотношением*

$$X : Y : Z = x : y : 1,$$

т. е. являются однородными аффинными координатами.

§ 2. ГЕОМЕТРИЯ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Геометрия плоскостей в пространстве во многом аналогична геометрии прямых на плоскости. Поэтому некоторые утверждения мы будем оставлять читателю в качестве упражнений и заданий.

1. Пучки плоскостей

Пусть в пространстве фиксирована некоторая аффинная система координат $Oxyz$.

Определение 1. *Координатами* произвольной плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

в этой координатной системе мы будем называть коэффициенты A, B, C, D ее уравнения.

Координаты плоскости — это однородные координаты, т. е. по плоскости они определены только с точностью до пропорциональности. Плоскость с координатами A, B, C, D мы будем обозначать символом $(A:B:C:D)$. Числа A, B, C, D тогда и только тогда являются координатами некоторой плоскости, когда хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля.

Определение 2. *Пучком плоскостей* называется множество плоскостей $(A:B:C:D)$, координаты которых выражаются формулами

$$\begin{aligned} A&=\mu A_0+\nu A_1,\\ B&=\mu B_0+\nu B_1,\\ C&=\mu C_0+\nu C_1,\\ D&=\mu D_0+\nu D_1, \end{aligned} \tag{1}$$

где A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1, D_0, D_1 — постоянные числа, обладающие тем свойством, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0\\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

равен двум, а μ и ν — переменные параметры, одновременно не равные нулю. (Если ранг матрицы (2) равен единице, т. е. если четверки (A_0, B_0, C_0, D_0) и (A_1, B_1, C_1, D_1) пропорциональны, но пучок вырождается в единственную плоскость.)

Если каждая из троек (A_0, B_0, C_0) и (A_1, B_1, C_1) отлична от нулевой тройки (содержит отличное от нуля число) и если эти тройки не пропорциональны, то пучок (1) называется *собственным*. В противном случае, этот пучок называется *несобственным*. Таким образом, пучок тогда и только тогда — собственный, когда ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 & C_0\\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix}.$$

равен двум. Для собственного пучка определены две плоскости с уравнениями

$$\begin{aligned} A_0x+B_0y+C_0z+D_0&=0,\\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0, \end{aligned}$$

и эти плоскости не параллельны (и не совпадают). Прямую пересечения этих плоскостей мы будем называть *центральной прямой* пучка.

Предложение 1. *Каждый собственный пучок состоит из всех плоскостей, проходящих через центральную прямую пучка.*

Предложение 2. *Каждый несобственный пучок состоит из всех плоскостей, параллельных некоторой плоскости.*

При этом

любая прямая является центральной прямой некоторого собственного пучка

и

совокупность всех плоскостей, параллельных произвольной фиксированной плоскости, является несобственным пучком.

Кроме того,

для собственных пучков плоскостей любые значения параметров μ и ν (конечно, одновременно отличные от нуля) определяют некоторую плоскость, тогда как для каждого несобственного пучка имеются значения этих параметров (с точностью до пропорциональности, однозначно определенные), которым никакая плоскость не соответствует.

Задание. Докажите предложения 1 и 2 и следующие за ними утверждения (ср. п. 1 § 1).

2. Связки плоскостей

Пучки плоскостей (подобно пучкам прямым) аналогичны прямым «точечной» геометрии. Рассмотрим теперь аналоги плоскостей.

Определение 1. *Связкой плоскостей* называется множество плоскостей $(A:B:C:D)$, координаты которых выражаются формулами

$$\begin{aligned} A &= \mu A_0 + \nu A_1 + \xi A_2, \\ B &= \mu B_0 + \nu B_1 + \xi B_2, \\ C &= \mu C_0 + \nu C_1 + \xi C_2, \\ D &= \mu D_0 + \nu D_1 + \xi D_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $A_0, A_1, \ldots, D_1, D_2$ — постоянные числа, обладающие тем свойством, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & C_1 & C_2 \\ D_0 & D_1 & D_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

равен трем, а μ, ν, ξ — переменные параметры, одновременно не равные нулю. (Если ранг матрицы (2) меньше трех, связка вырождается в пучок.)

Связка называется *собственной*, если определитель

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & C_1 & C_2 \end{vmatrix} \tag{3}$$

отличен от нуля. В противном случае связка называется *несобственной*.

Для собственной связки определены три плоскости

$$\begin{aligned} A_0x + B_0y + C_0z + D_0 &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned}$$

пересекающиеся в единственной точке. Эта точка называется *центром* собственной связки.

Предложение 1. *Любая собственная связка состоит из всех плоскостей, проходящих через ее центр.*

Доказательство. Ясно, что каждая плоскость собственной связки проходит через центр $M_0(x_0, y_0, z_0)$ связки (его координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости). Обратно, пусть

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{4}$$

— произвольная плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Выберем на этой плоскости две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой с точкой M_0, и попробуем найти в связке плоскость, проходящую через эти точки. Параметры μ, ν, ξ, отвечающие этой плоскости, должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} &(\mu A_0 + \nu A_1 + \xi A_2)\, x_1 + (\mu B_0 + \nu B_1 + \xi B_2)\, y_1 + \\ &\qquad + (\mu C_0 + \nu C_1 + \xi C_2)\, z_1 + (\mu D_0 + \nu D_1 + \xi D_2) = 0, \\ &(\mu A_0 + \nu A_1 + \xi A_2)\, x_2 + (\mu B_0 + \nu B_1 + \xi B_2)\, y_2 + \\ &\qquad + (\mu C_0 + \nu C_1 + \xi C_2)\, z_2 + (\mu D_0 + \nu D_1 + \xi D_0) = 0, \end{aligned}$$

т. е. соотношениям

$$\begin{aligned} &(A_0x_1 + B_0y_1 + C_0z_1 + D_0)\,\mu + (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1)\,\nu + \\ &\qquad + (A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2)\,\xi = 0, \\ &(A_0x_2 + B_0y_2 + C_0z_2 + D_0)\,\mu + (A_1x_2 + B_1y_2 + C_1z_2 + D_1)\,\nu + \\ &\qquad + (A_2x_2 + B_2y_2 + C_2z_2 + D_2)\,\xi = 0. \end{aligned}$$

Эти равенства представляют собой два однородных уравнения относительно трех неизвестных μ, ν и ξ. Из алгебры известно, что у таких уравнений всегда имеется нетривиальное решение[1]) $\mu_0 : \nu_0 : \xi_0$. Соответствующая этим значениям параметров плоскость связки и является плоскостью, проходящей через точки M_1 и M_2. Являясь плоскостью связки, эта плоскость проходит, кроме того, и через точку M_0. Но через три не лежащие на одной прямой точки проходит только одна плоскость. Поэтому найденная плоскость совпадает с данной плоскостью (4).

Замечание 1. Тот факт, что плоскость (4) принадлежит связке, можно доказать и по-иному. Действительно, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} A_0\mu + A_1\nu + A_2\xi &= A, \\ B_0\mu + B_1\nu + B_2\xi &= B, \\ C_0\mu + C_1\nu + C_2\xi &= C \end{aligned}$$

относительно неизвестных μ, ν, ξ. По условию, определитель этой системы отличен от нуля и потому она имеет единственное решение μ_0, ν_0, ξ_0. Ясно, что хотя бы одно из чисел μ_0, ν_0, ξ_0 отлично от нуля (ибо в противном случае все три числа A, B, C были бы равны нулю). Плоскость связки, соответствующая этим значениям параметра, параллельна плоскости (4) и имеет с ней общую точку M_0. Следовательно, она совпадает с этой плоскостью.

Задание. Докажите, что значения μ_0, ν_0, ξ_0 параметров, дающие плоскость (4), определены этой плоскостью однозначно с точностью до пропорциональности.

Подчеркнем, что

любая точка пространства является центром некоторой собственной связки.

Для доказательства этого утверждения достаточно выбрать три плоскости, пересекающиеся только в этой точке, и рассмотреть собственную связку, ими определенную.

Предложение 2. *Любая несобственная связка состоит из всех плоскостей, параллельных некоторой прямой.*

Доказательство. Для несобственной связки ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 & C_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

меньше трех. Этот ранг не может быть равен единице, поскольку тогда ранг матрицы (2) будет, вопреки предположению, меньше трех. Следовательно, ранг матрицы (5) в точности равен

[1]) В пространстве с координатами μ, ν, ξ эти уравнения определяют две плоскости, проходящие через начало координат. Поэтому им удовлетворяют координаты любой точки прямой, являющейся пересечением этих плоскостей.

двум. Это означает, что матрица (5) содержит две непропорциональные строки, линейной комбинацией которых является третья строка. Пусть, для определенности, не пропорциональны первые две строки. Тогда соответствующие плоскости

$$\begin{aligned} A_0x+B_0y+C_0z+D_0=0, \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \end{aligned} \tag{6}$$

не параллельны и потому пересекаются по некоторой прямой (уравнениями которой и являются уравнения (6)).

Рассмотрим теперь произвольную плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{7}$$

принадлежащую нашей связке. В матрице

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 & C_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A & B & C \end{pmatrix} \tag{8}$$

первые две строки не пропорциональны, а третья строка, линейно выражаясь по условию через строки матрицы (5), линейно выражается через первые две строки. Следовательно, ранг матрицы (8) равен двум. Поэтому (см. п. 2 § 3 гл. 3) плоскость (7) параллельна прямой (6).

Обратно, пусть

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{9}$$

— произвольная плоскость, параллельная прямой (6). Тогда ранг матрицы (8) равен двум, и потому ее третья строка линейно выражается через первые две строки (по условию, линейно независимые). Следовательно, ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 & C_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{pmatrix} \tag{10}$$

также равен двум (дополнительная строка A_2, B_2, C_2 линейно выражается, как мы знаем, через первые две строки).

Рассмотрим теперь матрицу

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A & B & C & D \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Она получается из матрицы (10) прибавлением одного столбца, и потому ее ранг может увеличиться только на единицу. Следовательно, ранг матрицы (11) не превосходит трех. Но, по условию, первые три строки матрицы (11) линейно независимы (они составляют матрицу (2), ранг которой равен трем). Следовательно, ранг матрицы (11) в точности равен трем и ее последняя строка линейно выражается через предыдущие. Это означает, что

$$\begin{aligned} A &= \mu A_0 + \nu A_1 + \xi A_2, \\ B &= \mu B_0 + \nu B_1 + \xi B_2, \\ C &= \mu C_0 + \nu C_1 + \xi C_2, \\ D &= \mu D_0 + \nu D_1 + \xi D_2, \end{aligned}$$

т. е. плоскость (9) принадлежит рассматриваемой связке.

3. Расширенное пространство

Аналогично расширенной плоскости мы можем построить *расширенное пространство*, точками которого являются все точки аффинного пространства плюс некоторое множество «несобственных точек». При этом каждой прямой λ аффинного пространства сопоставлена некоторая несобственная точка — *несобственная точка* этой прямой, причем так, что любая несобственная точка является несобственной точкой некоторой прямой и двум различным прямым тогда и только тогда сопоставлена одна и та же точка, когда эти прямые параллельны. Предполагая такое соответствие заданным, мы назовем *прямой расширенного пространства* либо произвольную прямую λ аффинного пространства, к которой присоединена ее несобственная точка, либо множество несобственных точек всевозможных прямых некоторой плоскости (*несобственную прямую этой плоскости*). Аналогично, *плоскостями расширенного пространства* мы будем называть либо плоскости аффинного пространства, расширенные присоединением их несобственных прямых, либо множество всех несобственных точек (*несобственную плоскость пространства*).

Аналогично аффинной геометрии в геометрии расширенного пространства

через любые две различные точки проходит единственная прямая, и через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.

С другой стороны, в противоположность аффинной геометрии, в расширенном пространстве

любые две различные плоскости пересекаются по единственной прямой, и любые три плоскости, из которых ни одна не содержит прямую пересечения двух других, пересекаются в единственной точке.

Пучком плоскостей в расширенном пространстве называется множество всех плоскостей, содержащих данную прямую — *центральную прямую пучка*. Пучок называется *собственным*, когда эта прямая — собственная, и *несобственным*, когда эта прямая — несобственная. Аналогично, *связкой плоскостей* в расширенном пространстве называется множество всех плоскостей, содержащих данную точку — *центр связки*. Если эта точка — собственная, связка называется *собственной*, а если она — несобственная, то связка также называется *несобственной*.

Ясно, что каждый собственный пучок и каждая собственная связка состоит из тех же плоскостей (лишь пополненных несобственными прямыми), что и соответствующие пучок или связка в аффинном пространстве. Что же касается несобственных пучков и связок, то они получаются из соответствующих пучков и связок в аффинном пространстве присоединением дополнительно несобственной плоскости (и конечно, добавлением к каждой плоскости ее несобственной прямой). При этом центральной прямой несобственного пучка будет несобственная прямая плоскости, которой в аффинном пространстве параллельны плоскости пучка, а центром несобственной связки будет несобственная точка прямой, которой параллельны плоскости связки.

Автоматическая проверка показывает, что в расширенном пространстве

любые две различные плоскости содержатся в единственном пучке, и любые три плоскости, не принадлежащие одному пучку, содержатся в единственной связке.

Кроме того,

любые две различные связки содержат единственный общий пучок, и любые три связки, не содержащие общего пучка, содержат единственную общую плоскость.

Мы не будем здесь давать формально-аксиоматические определения расширенного пространства, поскольку это делается в точной аналогии со случаем плоскости (см. п. 2 § 1), и лишь отметим, что при расширении аффинного пространства получается *аффинно-проективное пространство*, а при расширении евклидова пространства — *евклидово-проективное пространство*. Кроме того, конечно, все это можно делать над любым полем $\mathbb{K}$, причем в случае $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ — в двух известных нам вариантах («чисто комплексном» и «вещественно-комплексном»).

Задание. Дайте формальные определения аффинно-проективного и евклидово-проективного пространств над произвольным полем $\mathbb{K}$ и, в частности над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Чтобы построить «аффинную» модель расширенного пространства, мы рассмотрим в аффинном пространстве множество всевозможных связок. Примем эти связки за «точки» нашей модели. Множество таких точек мы назовем «прямой», если оно состоит из всех связок, содержащих некоторый фиксированный пучок. Тем самым «прямые» нашей модели и пучки плоскостей аффинного пространства будут находиться в естественном биективном соответствии. Наконец, множество точек мы назовем «плоскостью», если оно либо состоит из всех несобственных связок, либо является множеством всех связок, содержащих некоторую фиксированную плоскость аффинного пространства.

Без труда проверяется (ср. п. 3 § 1), что тем самым мы действительно получим модель расширенного пространства. Собственными точками этой модели являются собственные связки и только они. Аналогично, собственным прямым соответствуют собственные пучки плоскостей, а несобственным прямым — несобственные пучки.

Замечание 1. Никакого аналога «пространственной» или «векторной» интерпретации расширенной плоскости мы для расширенного пространства получить не можем (поскольку в нашем распоряжении нет «четырехмерного пространства»).

Однако отсутствие «векторной» модели не мешает введению в расширенном пространстве однородных координат (и, следовательно, построению «числовой модели»).

Пусть в пространстве (нерасширенном) задана произвольная аффинная координатная система $Oxyz$.

Для любой точки M расширенного (аффинно-проективного) пространства мы будем считать ее *однородными аффинными координатами* числа X, Y, Z, T, определенные с точностью до пропорциональности соотношениями

$$X:Y:Z:T=x:y:z:1,$$

если точка M — собственная и имеет аффинные координаты x, y, z, и соотношениями

$$X:Y:Z:T=l:m:n:0,$$

если точка M — несобственная и является несобственной точкой прямой

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (1)$$

Ясно, что тем самым мы получим взаимно однозначное соответствие между точками расширенного пространства и элементами множества $\mathbb{R}P^3$.

Если координаты x, y, z являются прямоугольными (евклидовыми) координатами, координаты $X:Y:Z:T$ называются *однородными евклидовыми координатами* (конечно, здесь уже речь идет о расширенном евклидовом, т. е. евклидово-проективном, пространстве).

По определению, собственные точки характеризуются условием $T \neq 0$, а несобственные — условием $T = 0$. Следовательно, *уравнение*

$$T = 0$$

является в координатах $X : Y : Z : T$ *уравнением несобственной плоскости.*

Аффинные координаты собственных точек выражаются через координаты $X : Y : Z : T$ по формулам

$$x = \frac{X}{T}, \quad y = \frac{Y}{T}, \quad z = \frac{Z}{T}.$$

Подставив эти выражения в уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

произвольной плоскости, мы получим (после умножения на T) уравнение

$$AX + BY + CZ + DT = 0. \tag{3}$$

Координаты $X : Y : Z : T$ собственной точки тогда и только тогда удовлетворяют этому уравнению, когда точка принадлежит плоскости (2). Что же касается несобственных точек, то для любой такой точки ее координаты $X : Y : Z : T = l : m : n : 0$ тогда и только тогда удовлетворяют уравнению (3), когда

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

т. е. когда прямая (1) параллельна плоскости (2), и, значит, рассматриваемая несобственная точка (являющаяся несобственной точкой прямой (1)) принадлежит плоскости (2).

Этим доказано, что

уравнение (3) *выражает в расширенном пространстве плоскость* (2), *пополненную всеми ее несобственными точками.*

Тем самым, нами доказано следующее

Предложение 1. *В расширенном пространстве любое уравнение вида*

$$AX + BY + CZ + DT = 0$$

(*хотя бы один коэффициент которого отличен от нуля*) *выражает некоторую плоскость: собственную, если отличен от нуля хотя бы один из коэффициентов A, B, C, и несобственную, если $A = B = C = 0$.*

Поэтому прямые в расширенном пространстве задаются двумя (не пропорциональными) уравнениями вида

$$A_0X + B_0Y + C_0Z + D_0T = 0,$$
$$A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1T = 0.$$

Теперь уже ясно (в полной аналогии с п. 4 § 1), что «числовой моделью» расширенного пространства будет стандартное (арифметическое) афинно-проективное пространство $\mathbb{R}P^3$, точками которого являются классы $(X : Y : Z : T)$ пропорциональных четверок $(X, Y, Z, T) \neq (0, 0, 0, 0)$. Несобственные точки в этом пространстве характеризуются условием $T = 0$.

Можно, конечно, дать и независимое определение аффинно-проективного (и евклидово-проективного) пространства с помощью (очевидным образом определяемых) групп $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}P^3)$ и $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}P^3)$ (ср. п. 4 § 1).

Задание. Определите группы $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}P^3)$ и $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}P^3)$ и сформулируйте аксиомы аффинно-проективного и евклидово-проективного пространств.

4. Проективное пространство

Проективным пространством называется аффинно-проективное пространство, в котором игнорируется различие между собственными и несобственными точками.

Задание. Введите группу $\mathrm{Proj}(\mathbb{R}P^3)$ и дайте формальное определение проективного пространства (ср. п. 5 § 1).

Обратим внимание на то, что каждая плоскость проективного пространства автоматически является проективной плоскостью в смысле п. 5 § 1 и, аналогично, каждая собственная плоскость аффинно-проективного пространства является аффинно-проективной плоскостью. Напротив, несобственная плоскость аффинно-проективного пространства является лишь проективный плоскостью.

Идея считать прямые и плоскости самостоятельными объектами (а не множеством точек) приводит, аналогично случаю плоскости (см. п. 7 § 1), к следующему определению:

Определение 1. *Конфигурационным пространством* называется множество $\mathfrak{P}$, состоящее из объектов трех сортов: *точек*, *прямых*, *плоскостей*, связанных отношением *инцидентности*, удовлетворяющим следующим аксиомам:

Инц. 1. *Любые две различные точки инцидентны одной и только одной прямой.*

Инц. 2. *Любые две различные прямые, инцидентные одной плоскости, инцидентны одной и только одной точке.*

Инц. 3. *Любая прямая инцидентна по крайней мере трем различным точкам.*

Инц. 4. *Любая точка инцидентна по меньшей мере трем различным прямым.*

Инц. 5. *Любые две различные плоскости инцидентны единственной прямой.*

Инц. 6. *Любые две различные прямые, инцидентные одной точке, инцидентны единственной плоскости.*

Инц. 7. *Любая прямая инцидентна по крайней мере трем различным плоскостям.*

Инц. 8. *Любая плоскость инцидентна по крайней мере трем различным прямым.*

Инц. 9. *Любая плоскость и любая не инцидентная ей прямая инцидентны единственной точке.*

Инц. 10. *Любая точка и любая не инцидентная ей прямая инцидентны единственной плоскости.*

Обратим внимание на то, что аксиомы Инц. 1—4 совпадают (с точностью до оговорки в аксиоме Инц. 2) с аксиомами Инц. 1—4 из определения 1 п. 7 § 1. Следовательно,

множество всех точек и прямых, инцидентных некоторой плоскости конфигурационного пространства, является конфигурационной плоскостью.

Определение 2. Конфигурационное пространство называется *папповым пространством*, если любая его плоскость является папповой плоскостью (см. определение 2 п. 7 § 1).

Ясно, что

проективное пространство над любым полем $\mathbb{K}$ *является папповым пространством.*

Обратное утверждение мы (как и для случая плоскости) приведем без доказательства:

Теорема 1. *Любое паппово пространство изоморфно проективному пространству над некоторым полем* $\mathbb{K}$.

Поэтому аксиомы паппова пространства *полны* в том смысле, что каждая конфигурационная теорема, верная в проективной геометрии над любым полем $\mathbb{K}$, может быть выведена из этих аксиом.

Мы видим, что ситуация в «пространственном» случае, казалось бы, вполне аналогична ситуации, имеющей место в «плоском» случае. Однако более глубокое исследование вскрывает замечательное различие между этими двумя случаями.

Пусть $\mathbb{K}$ — произвольное *тело*[1]) (некоммутативное поле). Назовем две четверки (X_1, Y_1, Z_1, T_1) и (X_2, Y_2, Z_2, T_2) элементов тела $\mathbb{K}$, отличные от нулевой четверки $(0, 0, 0, 0)$, *пропорциональными*, если существует такой элемент ρ тела $\mathbb{K}$, что

$$X_2 = X_1\rho, \quad Y_2 = Y_1\rho, \quad Z_2 = Z_1\rho, \quad T_2 = T_1\rho.$$

(Обратите внимание на то, что порядок множителей здесь существен: четверки (X, Y, Z, T) и $(\rho X, \rho Y, \rho Z, \rho T)$, вообще говоря, не пропорциональны). Без труда проверяется (так же, как для случая, когда $\mathbb{K}$ коммутативно), что отношение пропорциональности является отношением эквивалентности. Соответствующие классы эквивалентности обозначаются символом $(X : Y : Z : T)$, а их множество — символом $\mathbb{K}P^3$.

Аналогично вводится множество $\mathbb{K}P^2$ классов $(X : Y : Z)$ пропорциональных троек и, вообще, множество $\mathbb{K}P^n$ при любом $n \geqslant 1$.

---

[1]) Примером тела является рассматриваемое в п. 4 § 2 гл. 7 тело кватернионов.

Элементы $(X:Y:Z:T)$ множества $\mathbb{K}P^3$ мы будем называть *точками*. Множества точек, удовлетворяющих уравнениям вида

$$AX+BY+CZ+DT=0,$$

мы назовем *плоскостями* [1]), а множества, являющиеся пересечением двух (различных) плоскостей,— *прямыми*. За *отношение инцидентности* между точками, прямыми и плоскостями мы примем (как и в коммутативном случае) отношение теоретико-множественной принадлежности (например, точка инцидентна плоскости, если она содержится в ней).

Простая выкладка показывает, что

множество так определенных точек, прямых и плоскостей является относительно указанного отношения инцидентности конфигурационным пространством.

Задание. Докажите это утверждение (не забывайте следить за порядком множителей!).

Мы будем это пространство (допуская определенную вольность) обозначать тем же символом $\mathbb{K}P^3$ и будем называть его (а также любое конфигурационное пространство, ему изоморфное) *проективным пространством над телом* $\mathbb{K}$.

Аналогично определяется *проективная плоскость над телом* $\mathbb{K}$ [2]).

Оказывается, что справедлива следующая замечательная теорема, которую мы приведем без доказательства:

Теорема 2. *Любое конфигурационное пространство является проективным пространством над некоторым телом* $\mathbb{K}$.

Таким образом, папповость нам нужна только для того, чтобы тело $\mathbb{K}$ было коммутативным.

Из теоремы 2 вытекает, что конфигурационная теорема тогда и только тогда может быть выведена из аксиом Инц. 1—10, когда она выполняется в проективном пространстве над любым телом $\mathbb{K}$.

Примером такой теоремы является, скажем, теорема Дезарга (см. п. 7 § 1).

Упражнение. Докажите теорему Дезарга двумя способами: из аксиом Инц. 1—10 (указание: рассмотрите сначала случай, когда плоскости **123** и **456** различны) и алгебраической выкладкой (не забывайте о порядке множителей!).

---

[1]) Обратим внимание на то, что уравнение вида

$$XA+YB+ZC+TD=0,$$

вообще говоря, не является уравнением плоскости.

[2]) Конечно, мы могли бы ввести проективное пространство (и проективную плоскость) над телом $\mathbb{K}$ не как конфигурационное пространство (конфигурационную плоскость), а как множество, снабженное координатными системами (ср. п. 5 § 1). Мы от этого уклонились, во-первых, потому что это нам сейчас не нужно, а, во-вторых, потому, что при этом возникают некоторые осложнения в описании элементов групп $\mathrm{Proj}(\mathbb{K}P^n)$ (ввиду трудностей в построении теории определителей над некоммутативным телом).

Глубокое различие между случаями $n=3$ и $n=2$ (о котором мы упоминали выше) состоит в том, что для конфигурационных плоскостей аналог теоремы 2 не верен: не любая конфигурационная плоскость является проективной плоскостью над некоторым телом. Действительно, поскольку проективная плоскость над произвольным телом $\mathbb{K}$ является плоскостью проективного пространства над телом $\mathbb{K}$, в ней, согласно сказанному выше, выполнена теорема Дезарга. Называя конфигурационные плоскости, в которых выполнена теорема Дезарга, *дезарговыми плоскостями*, мы, следовательно, можем сказать, что

проективная плоскость над произвольным телом $\mathbb{K}$ является дезарговой плоскостью.

Оказывается, что это необходимое условие является также и достаточным, т. е. справедлива следующая теорема (которую мы также приведем без доказательства):

Теорема 3. *Конфигурационная плоскость тогда и только тогда является проективной плоскостью над некоторым телом $\mathbb{K}$, когда она дезаргова.*

Замечание 1. В алгебре доказывается, что любое конечное тело является полем. Поэтому

любая дезаргова плоскость, содержащая конечное число точек, является папповой плоскостью.

Удивительно, что чисто геометрического («синтетического») доказательства этого утверждения до сих пор неизвестно.

Определение 3. Конфигурационная теорема $\mathscr{A}'$, называется (*пространственно*) *двойственной* теореме $\mathscr{A}$, если она получается из теоремы $\mathscr{A}$ заменами слова «точка» словом «плоскость» и наоборот.

Обратившись к аксиомам Инц. 1—10, мы немедленно обнаружим, что аксиомы Инц. 1, Инц. 2, Инц. 3, Инц. 4, Инц. 9, двойственны, соответственно, аксиомам Инц. 5, Инц. 6, Инц. 7, Инц. 8, Инц. 10, т. е. что аксиомы Инц. 1—10 разбиваются на пары двойственных друг другу аксиом.

Отсюда очевидным образом (ср. п. 7 § 1) вытекает следующий общий принцип:

Принцип пространственной двойственности. *Теорема, пространственно двойственная верной конфигурационной теореме, также является верной теоремой.*

Здесь под «верной теоремой» понимается, естественно, теорема, вытекающая из аксиом Инц. 1—10. Все такие теоремы верны в проективном пространстве над любым телом $\mathbb{K}$.

Однако если тело $\mathbb{K}$ фиксировано, то под «верной теоремой» можно понимать конфигурационную теорему, справедливую в проективном пространстве именно над этим телом $\mathbb{K}$, и встает вопрос, справедлив ли принцип пространственной двойственности при таком понимании термина «верная теорема», т. е. справедлив ли этот принцип над данным телом $\mathbb{K}$?

Оказывается, что ответ на этот вопрос, вообще говоря, **отрицательный**.

Выясним, в чем тут дело.

Определение 4. *Антиавтоморфизмом* конфигурационного пространства $\mathfrak{P}$ называется его преобразование, переводящее точки в плоскости, прямые в прямые, плоскости в точки и сохраняющее отношение инцидентности (ср. определение 3 п. 7 § 1).

Ясно, что

если конфигурационное пространство обладает хотя бы одним антиавтоморфизмом, то в нем выполнен принцип двойственности.

Имея это в виду, постараемся построить для конфигурационного пространства $\mathbb{K}P^3$ антиизоморфизм тем же способом, как это мы делали в п. 7 § 1 в случае плоскости, т. е. сопоставив точке $(A:B:C:D)$ плоскость с теми же координатами, т. е. с уравнением

$$AX+BY+CZ+DT=0.$$

Однако легко видеть, что полученное (очевидно, биективное) соответствие не будет, вообще говоря, сохранять отношение инцидентности, поскольку факт инцидентности точки $(X:Y:Z:T)$ и плоскости $(A:B:C:D)$ выражается уравнением

$$AX+BY+CZ+DT=0, \tag{1}$$

а факт инцидентности точки $(A:B:C:D)$ и плоскости $(X:Y:Z:T)$ — уравнением

$$XA+YB+ZC+TD=0,$$

вообще говоря, отличным от уравнения (1).

Тем не менее, если тело $\mathbb{K}$ является полем, то уравнения (1) и (2) равносильны. Следовательно,

принцип двойственности выполнен в проективном пространстве над любым полем $\mathbb{K}$.

Замечание 2. Это утверждение можно обобщить. Напомним с этой целью, что биективное отображение $a\mapsto\bar{a}$ тела $\mathbb{K}$ на себя называется *антиавтоморфизмом*, если для любых элементов $a, b\in\mathbb{K}$ имеют место равенства

$$\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b},$$
$$\overline{ab}=\bar{b}\bar{a},$$
$$\bar{\bar{a}}=a.$$

Предполагая, что тело $\mathbb{K}$ обладает таким антиавтоморфизмом [1]), сопоставим произвольной точке $(X:Y:Z:T)$ плоскость с координатами $(\bar{X}:\bar{Y}:\bar{Z}:\bar{T})$ (а плоскости $(A:B:C:D)$ — точку

[1]) Например, является телом кватернионов (см. п. 5 § 2 гл. 7).

$(\bar{A} : \bar{B} : \bar{C} : \bar{D})$). Поскольку факт инцидентности точки $(\bar{A} : \bar{B} : \bar{C} : \bar{D})$ и плоскости $(\bar{X} : \bar{Y} : \bar{Z} : \bar{T})$ выражается уравнением

$$\bar{X}\bar{A} + \bar{Y}\bar{B} + \bar{Z}\bar{C} + \bar{T}\bar{D} = 0,$$

переходящим при рассматриваемом антиавтоморфизме в уравнение (1), мы видим, что построенное (очевидно, биективное) соответствие сохраняет отношение инцидентности. Следовательно,

если тело $\mathbb{K}$ обладает антиавтоморфизмом, то антиизоморфизмом обладает проективное пространство над $\mathbb{K}$, и потому в этом пространстве выполнен принцип двойственности.

Ясно, что аналогичное утверждение справедливо и для плоскостей.

Можно доказать, что если $\mathbb{K}P^3$ (или $\mathbb{K}P^2$) обладает антиавтоморфизмом, то антиавтоморфизмом обладает и тело $\mathbb{K}$.

Дополнение. **О геометрии прямых в пространстве**

Геометрия прямых в пространстве значительно интереснее и сложнее геометрии плоскостей в пространстве и геометрии прямых на плоскости. Мы не имеем здесь возможности заняться этой геометрией сколько-нибудь подробно и потому ограничимся лишь тем, что объясним, почему эта геометрия более сложна.

Пусть

$$\begin{aligned} A_0x + B_0y + C_0z + D_0 &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

— произвольная прямая в пространстве. Что можно принять за ее координаты? Считать ими коэффициенты уравнений (1) явно не очень удобно, поскольку ту же самую прямую можно задать любой парой плоскостей

$$\begin{aligned} A_0'x + B_0'y + C_0'z + D_0' &= 0, \\ A_1'x + B_1'y + C_1'z + D_1' &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

из соответствующего пучка и потому совсем другими коэффициентами. Хотелось бы связать с прямой (1) инвариантные выражения, т. е. функции коэффициентов, не зависящие от выбора уравнений (1).

Рассмотрим с этой целью матрицу коэффициентов

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

уравнений (1). Она обладает шестью минорами второго порядка

$$\begin{aligned} p_{12} &= \begin{vmatrix} A_0 & B_0 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}, & p_{23} &= \begin{vmatrix} B_0 & C_0 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}, \\ p_{13} &= \begin{vmatrix} A_0 & C_0 \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix}, & p_{24} &= \begin{vmatrix} B_0 & D_0 \\ B_1 & D_1 \end{vmatrix}, \\ p_{14} &= \begin{vmatrix} A_0 & D_0 \\ A_1 & D_1 \end{vmatrix}, & p_{34} &= \begin{vmatrix} C_0 & D_0 \\ C_1 & D_1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{4}$$

Поскольку ранг матрицы (3) равен двум (в противном случае плоскости (1) совпадают и не определяют никакой прямой), хотя бы один из этих миноров отличен от нуля. Посмотрим, как эти миноры меняются при замене плоскостей (1) плоскостями (2).

По условию, плоскости (2) принадлежат пучку плоскостей, определенному плоскостями (1). Следовательно, существуют такие числа μ_0, ν_0, μ_1, ν_1, что

$$\begin{aligned} A_0' &= \mu_0 A_0 + \nu_0 A_1, & A_1' &= \mu_1 A_0 + \nu_1 A_1, \\ B_0' &= \mu_0 B_0 + \nu_0 B_1, & B_1' &= \mu_1 B_0 + \nu_1 B_1, \\ C_0' &= \mu_0 C_0 + \nu_0 C_1, & C_1' &= \mu_1 C_0 + \nu_1 C_1, \\ D_0' &= \mu_0 D_0 + \nu_0 D_1, & D_1' &= \mu_1 D_0 + \nu_1 D_1. \end{aligned} \qquad (5)$$

Пусть

$$\begin{aligned} p_{11}' &= \begin{vmatrix} A_0' & B_0' \\ A_1' & B_1' \end{vmatrix}, & p_{23}' &= \begin{vmatrix} B_0' & C_0' \\ B_1' & C_1' \end{vmatrix}, \\ p_{13}' &= \begin{vmatrix} A_0' & C_0' \\ A_1' & C_1' \end{vmatrix}, & p_{24}' &= \begin{vmatrix} B_0' & D_0' \\ B_1' & D_1' \end{vmatrix}, \\ p_{14}' &= \begin{vmatrix} A_0' & D_0' \\ A_1' & D_1' \end{vmatrix}, & p_{34}' &= \begin{vmatrix} C_0' & D_0' \\ C_1' & D_1' \end{vmatrix}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Подставив выражения (5) в формулы (6), мы немедленно получим (воспользовавшись, например, теоремой об умножении определителей), что

$$\begin{aligned} p_{12}' &= \Delta p_{12}, & p_{23}' &= \Delta p_{23}, \\ p_{13}' &= \Delta p_{13}, & p_{24}' &= \Delta p_{24}, \\ p_{14}' &= \Delta p_{14}, & p_{34}' &= \Delta p_{34}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_0 & \nu_0 \\ \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что $\Delta \neq 0$, поскольку в противном случае плоскости (2) совпадают.

Тем самым мы доказали, что

числа p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34} однозначно с точностью до пропорциональности определены прямой (1).

Эти числа называются *плюккеровыми координатами* прямой (1). Подчеркнем, что это — однородные координаты.

Теперь уже ясна одна из причин сложности геометрии прямых: прямые описываются ш е с т ь ю однородными координатами, т. е. могут рассматриваться как точки п я т и м е р н о г о п р о с т р а н с т в а.

Правда, пока не ясно, нет ли среди плюккеровых координат лишних и, вообще, не связаны ли эти координаты каким-нибудь соотношением. Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{vmatrix}.$$

Этот определитель равен нулю, поскольку он имеет одинаковые строки. С другой стороны, разложив его по первым двум строкам (мы здесь пользуемся известной из алгебры теоремой Лапласа о разложении определителей), мы немедленно получим, что он равен $2(p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23})$. Следовательно,

плюккеровы координаты любой прямой удовлетворяют соотношению

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0. \tag{7}$$

Это соотношение известно как **соотношение Плюккера**[1]).

Соотношение Плюккера является соотношением второй степени. Это означает, что прямые представляют собой точки пятимерного пространства, принадлежащие некоторой «четырехмерной гиперповерхности второго порядка». Это вторая — и главная — причина сложности геометрии прямых.

Но является ли соотношение Плюккера единственным соотношением, связывающим плюккеровы координаты, т. е., иными словами, можно ли для любых чисел p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}, удовлетворяющих соотношению Плюккера, найти прямую, плюккеровыми координатами которой они являются, т. е. можно ли решить уравнения (4) относительно неизвестных A_0, B_0, C_0, D_0, A_1, B_1, C_1, D_1? Простая выкладка (которую мы предоставили читателю) показывает, что это действительно возможно. Однако при этом могут получиться уравнения параллельных плоскостей. Чтобы этого не было, следует, очевидно, дополнительно потребовать, чтобы хотя бы одно из чисел

$$p_{12}, \quad p_{13}, \quad p_{23} \tag{8}$$

было отлично от нуля.

Таким образом, резюмируя, мы получаем, что

прямые в аффинном пространстве описываются шестью однородными плюккеровыми координатами p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}, подчиненными соотношению Плюккера (7) *и обладающими тем свойством, что хотя бы одна из трех координат* (8) *отлична от нуля.*

Замечание 1. Полученные в п. 1 § 3 гл. 3 формулы показывают, что плюккеровы координаты p_{23}, $-p_{13}$, p_{12} являются координатами l, m, n направляющего вектора прямой. Следовательно,

две прямые тогда и только тогда параллельны, когда их координаты (8) *пропорциональны.*

В случае, когда координаты (8) равны нулю, получаются пары параллельных плоскостей, т. е. несобственные прямые. Поэтому в проективном (или аффинно-проективном) пространстве прямые, как и следовало ожидать, описываются несколько проще: требование, чтобы координаты (8) были отличны от нуля, уже не нужно.

---

[1]) Читатель, не знакомый с теоремой Лапласа, может проверить соотношение Плюккера прямым вычислением.

Заметим в заключение, что плюккеровы координаты p_{ij} можно считать определенными для всех значений $i, j = 1, 2, 3, 4$, предполагая при этом, что $p_{ji} = -p_{ij}$ (и, в частности, что $p_{ii} = 0$). Приняв это соглашение, мы получим возможность записывать плюккеровы координаты любой прямой в виде кососимметрической матрицы четвертого порядка:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ -p_{12} & 0 & p_{23} & p_{24} \\ -p_{13} & -p_{23} & 0 & p_{34} \\ -p_{14} & -p_{24} & -p_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 3. ГЕОМЕТРИЯ ОКРУЖНОСТЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

1. Степень точки относительно окружности

Мы знаем, что в прямоугольных координатах Oxy уравнение окружности радиуса R с центром в точке (a, b) имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Раскрыв скобки в этом уравнении и положив

$$c = \frac{R^2 - a^2 - b^2}{2}, \tag{1}$$

мы приведем уравнение окружности к виду

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by - 2c = 0. \tag{2}$$

Определение 1. Для любой точки $M_0(x_0, y_0)$ число, получающееся в результате подстановки координат этой точки в левую часть уравнения (2), называется *степенью* точки M_0 относительно данной окружности и обозначается символом $\text{ст}\, M_0$. Таким образом, по определению,

$$\text{ст}\, M_0 = x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 - 2c = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2. \tag{3}$$

Ясно, что

$\text{ст}\, M_0 < 0 \Leftrightarrow$ *точка* M_0 *лежит внутри окружности;*
$\text{ст}\, M_0 = 0 \Leftrightarrow$ *точка* M_0 *принадлежит окружности;*
$\text{ст}\, M_0 > 0 \Leftrightarrow$ *точка* M_0 *лежит вне окружности.*

В частности,

степень центра окружности отрицательна и равна $-R^2$, *где* R — *радиус окружности.*

Степень начала координат (0, 0) равна, очевидно, $-2c$.

Степень допускает красивое геометрическое истолкование. Чтобы получить его, мы рассмотрим произвольную прямую

$$\begin{aligned} x &= x_0 + lt, \\ y &= y_0 + mt, \end{aligned} \tag{4}$$