Заметим в заключение, что плюккеровы координаты p_{ij} можно считать определенными для всех значений $i, j = 1, 2, 3, 4$, предполагая при этом, что $p_{ji} = -p_{ij}$ (и, в частности, что $p_{ii} = 0$). Приняв это соглашение, мы получим возможность записывать плюккеровы координаты любой прямой в виде кососимметрической матрицы четвертого порядка:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ -p_{12} & 0 & p_{23} & p_{24} \\ -p_{13} & -p_{23} & 0 & p_{34} \\ -p_{14} & -p_{24} & -p_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 3. ГЕОМЕТРИЯ ОКРУЖНОСТЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

1. Степень точки относительно окружности

Мы знаем, что в прямоугольных координатах Oxy уравнение окружности радиуса R с центром в точке (a, b) имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Раскрыв скобки в этом уравнении и положив

$$c = \frac{R^2 - a^2 - b^2}{2}, \tag{1}$$

мы приведем уравнение окружности к виду

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by - 2c = 0. \tag{2}$$

Определение 1. Для любой точки $M_0(x_0, y_0)$ число, получающееся в результате подстановки координат этой точки в левую часть уравнения (2), называется *степенью* точки M_0 относительно данной окружности и обозначается символом $\text{ст}\, M_0$. Таким образом, по определению,

$$\text{ст}\, M_0 = x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 - 2c = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2. \tag{3}$$

Ясно, что

$\text{ст}\, M_0 < 0 \iff$ *точка M_0 лежит внутри окружности;*

$\text{ст}\, M_0 = 0 \iff$ *точка M_0 принадлежит окружности;*

$\text{ст}\, M_0 > 0 \iff$ *точка M_0 лежит вне окружности.*

В частности,

степень центра окружности отрицательна и равна $-R^2$, где R — радиус окружности.

Степень начала координат (0, 0) равна, очевидно, $-2c$.

Степень допускает красивое геометрическое истолкование. Чтобы получить его, мы рассмотрим произвольную прямую

$$\begin{aligned} x &= x_0 + lt, \\ y &= y_0 + mt, \end{aligned} \tag{4}$$

проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$. Будем, для упрощения вычислений, считать, что направляющий вектор $\boldsymbol{a}(l, m)$ этой прямой является ортом (т. е. что $l^2+m^2=1$). Точки пересечения прямой (4) с окружностью (2) определяются из уравнения

$$(x_0+lt)^2+(y_0+mt)^2-2a(x_0+lt)-2b(y_0+mt)-2c=0,$$

т. е. из уравнения

$$t^2+2[l(x_0-a)+m(y_0-b)]t+\text{ст}\,M_0=0. \tag{5}$$

Пусть прямая (4) на самом деле пересекает окружность, т. е. пусть уравнение (5) имеет вещественные (быть может, совпадающие) корни t_1 и t_2. Через эти корни координаты точек пересечения $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ выражаются формулами

$$x_1=x_0+lt_1, \quad x_2=x_0+lt_2,$$
$$y_1=y_0+mt_1, \quad y_2=y_0+mt_2.$$

Рассмотрим теперь векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$. Ясно, что

$$\overrightarrow{M_0M_1}=t_1\boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{M_0M_2}=t_2\boldsymbol{a}.$$

Следовательно, в ориентации прямой (4), определенной вектором $\boldsymbol{a}$, величина (см. п. 2 § 2 гл. 1) вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ равна t_1, а величина вектора $\overrightarrow{M_0M_2}$ равна t_2 (напомним, что вектор $\boldsymbol{a}$ мы предполагаем единичным). Поэтому согласно формуле Вьета для произведения корней квадратного уравнения произведение t_1t_2 величин этих векторов равно свободному члену уравнения (5), т. е. равно степени стM_0 точки M_0. Тем самым мы доказали следующее

Предложение 1. *Степень точки M_0 относительно окружности равна произведению величин векторов $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$, где M_1 и M_2 — точки пересечения окружности с произвольной прямой, проходящей через точку M_0.*

Заметим, что хотя величины векторов на прямой зависят от ориентации этой прямой (от выбора направляющего вектора), их произведение от этой ориентации уже не зависит.

В частности, мы видим, что

для любой прямой, проходящей через точку M_0 и пересекающей данную окружность, произведение длин отрезков $\overline{M_0M_1}$ и $\overline{M_0M_2}$ не зависит от прямой.

Этот факт должен быть известен читателю из школьного курса геометрии («теорема о произведении длин секущих»).

При $t_1=t_2$, т. е. когда прямая (4) пересекает окружность только в одной точке $M_1=M_2$ (и потому *касается* ее в этой точке), мы получаем

Следствие. *Степень точки M_0 относительно окружности равна квадрату длины касательной, проведенной из точки M_0 к окружности.*

Здесь предполагается, что точка M_0 лежит вне окружности (поскольку только из такой точки можно провести к окружности касательную).

Тот факт, что квадрат длины касательной равен произведению длин секущих, также должен быть известен читателю из школьного курса геометрии.

Пусть нам даны две неконцентрические окружности

$$\Sigma_1:\ x^2+y^2-2a_1x-2b_1y-2c_1=0$$

и

$$\Sigma_2:\ x^2+y^2-2a_2x-2b_2y-2c_2=0.$$

Степень точки $M(x,\ y)$ относительно первой окружности мы будем обозначать через $\text{ст}_1 M$, а относительно второй — через $\text{ст}_2 M$. Рассмотрим все точки $M(x,\ y)$, имеющие относительно этих окружностей равные степени

$$\text{ст}_1 M=\text{ст}_2 M.$$

Поскольку

$$\text{ст}_1 M=x^2+y^2-2a_1x-2b_1y-2c_1,$$
$$\text{ст}_2 M=x^2+y^2-2a_2x-2b_2y-2c_2,$$

координаты этих точек удовлетворяют соотношению

$$(a_2-a_1)\,x+(b_2-b_1)\,y+(c_2-c_1)=0. \tag{6}$$

Так как по условию $(a_1,\ b_1)\neq(a_2,\ b_2)$, равенство (6) является уравнением некоторой прямой.

Определение 2. Прямая (6) называется *радикальной осью* окружностей Σ_1 и Σ_2.

Прямая, соединяющая центры окружностей Σ_1 и Σ_2, имеет уравнение

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_1}=\frac{y-b_1}{b_2-b_1}$$

и, очевидно, перпендикулярна прямой (6). Таким образом,

радикальная ось двух (неконцентрических) окружностей перпендикулярна прямой, соединяющей их центры.

Замечание 1. Если от евклидовой плоскости (в которой мы до сих пор работали) перейти к евклидово-проективной плоскости (см. п. 2 § 1), то уравнение (6) (переписанное, конечно, в евклидово-проективных координатах) будет иметь смысл и для концентрических (не совпадающих) окружностей и будет в этом случае уравнением несобственной прямой. Таким образом, мы можем считать, что

радикальной осью концентрических (несовпадающих) окружностей является несобственная прямая.

Для совпадающих окружностей уравнение (6) вырождается в тождество, которому удовлетворяет каждая точка плоскости.

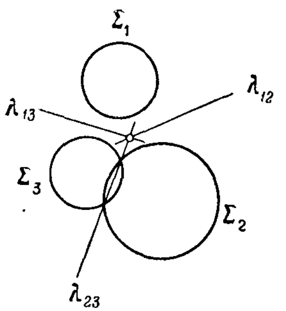
Предложение 2. Радикальной осью двух пересекающихся окружностей является прямая, проходящая через их точки пересечения, а радикальной осью двух касающихся окружностей является их общая касательная.

Доказательство. Если окружности пересекаются, то степени их общих точек относительно обеих окружностей равны нулю и потому одинаковы. Поэтому радикальная ось проходит через эти точки. Если же окружности касаются, то их общая касательная проходит через точку касания и перпендикулярна прямой, соединяющей центры окружностей. Поэтому она является радикальной осью.

Обратно, если радикальная ось двух окружностей пересекает одну из этих окружностей, то каждая точка пересечения принадлежит второй окружности (ибо степень этой точки относительно второй окружности равна ее степени относительно первой окружности и потому равна нулю). Следовательно,

радикальная ось двух непересекающихся окружностей лежит вне этих окружностей (их не пересекает).

Рассмотрим три попарно неконцентрические окружности Σ_1, Σ_2 и Σ_3, центры O_1, O_2 и O_3 которых не коллинеарны. Пусть



λ_{12} — радикальная ось окружностей Σ_1 и Σ_2, а λ_{23} — радикальная ось окружностей Σ_2 и Σ_3. Поскольку прямые O_1O_2 и O_2O_3, по условию, различны (и не параллельны), а прямые λ_{12} и λ_{23} им перпендикулярны, то прямые λ_{12} и λ_{23} пересекаются в единственной точке M_0. Для этой точки выполнены равенства

$$\text{ст}_1 M_0 = \text{ст}_2 M_0, \quad \text{ст}_2 M_0 = \text{ст}_3 M_0.$$

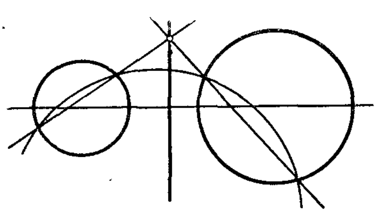
Поэтому

$$\text{ст}_1 M_0 = \text{ст}_3 M_0,$$

т. е. точка M_0 принадлежит и радикальной оси λ_{13} окружностей Σ_1 и Σ_3.

Таким образом, мы доказали, что

для любых трех окружностей Σ_1, Σ_2 и Σ_3 с неколлинеарными центрами три радикальные оси каждой пары окружностей проходят через одну точку.



Определение 3. Точка пересечения радикальных осей λ_{12}, λ_{23}, λ_{13} окружностей Σ_1, Σ_2, Σ_3 называется *радикальным центром* этих окружностей.

Из доказанного утверждения вытекает простой способ построения радикальной оси λ_{12} двух непересекающихся (и неконцентричных) окружностей Σ_1 и Σ_2: достаточно провести произвольную окружность Σ_3, пересекающую окружности Σ_1 и Σ_2, построить радикальные оси λ_{13} и λ_{23} (см. предложение 2) и провести через точку их пересечения прямую, перпендикулярную прямой, соединяющей центры окружностей Σ_1 и Σ_2. Эта прямая и будет радикальной осью λ_{12}.

Если центры окружностей Σ_1, Σ_2 и Σ_3 коллинеарны, то радикальные оси λ_{12}, λ_{23} и λ_{13} параллельны, так что для таких окружностей радикального центра не существует.

На евклидово-проективной плоскости мы можем считать (в случае, когда все оси λ_{12}, λ_{23} и λ_{13} различны), что радикальным центром окружностей с коллинеарными центрами является несобственная точка прямой, перпендикулярной прямой, соединяющей их центры.

Если две из трех радикальных осей совпадают, то третья ось также с ними совпадает. В этом случае говорят, что окружности Σ_1, Σ_2, Σ_3 *имеют общую радикальную ось*. Никакого определенного радикального центра (собственного или несобственного) в этом случае не имеется.

На евклидово-проективной плоскости три концентрические окружности также имеют общую радикальную ось (несобственную прямую).

2. Связки окружностей

Три числа a, b, c полностью определяют окружность

$$\Sigma:\ x^2+y^2-2ax-2by-2c=0.$$

Определение 1. Числа a, b, c называются *координатами* окружности Σ (в данной системе прямоугольных координат Oxy). Окружность с координатами a, b, c мы будем обозначать символом $\Sigma(a, b, c)$.

Выбрав в пространстве некоторую систему прямоугольных координат $Oxyz$, мы каждой окружности $\Sigma(a, b, c)$ можем сопоставить точку пространства, имеющую координаты (a, b, c). Будем называть эту точку точкой, *изображающей* данную окружность.

Поскольку радиус

$$R=\sqrt{a^2+b^2+2c}$$

окружности $\Sigma(a, b, c)$ должен быть вещественным числом,

числа a, b, c тогда и только тогда являются координатами некоторой окружности, когда

$$a^2+b^2+2c>0. \tag{1}$$

Другими словами,

отображение

$$\text{«окружность»} \mapsto \text{«изображающая точка»}$$

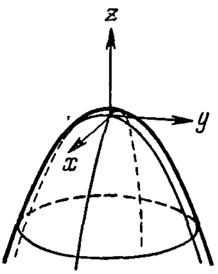
определяет биективное соответствие между множеством всех окружностей на плоскости и множеством всех точек пространства, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2+y^2+2z>0 \tag{2}$$

Замечание 1. Рассмотрим в пространстве поверхность Q с уравнением

$$x^2+y^2+2z=0.$$

Эта поверхность называется *параболоидом вращения.* В следующей главе мы покажем, что он получается вращением параболы $y^2=-2z$ (расположенной в плоскости Oyz) вокруг оси Oz. Этот параболоид разбивает все пространство на две области, одна из которых называется *внешней областью* и характеризуется неравенством $x^2+y^2+2z>0$, а вторая называется *внутренней областью* параболоида и характеризуется неравенством $x^2+y^2+2z<0$. Таким образом, мы можем сказать, что



Параболоид Q

точки, изображающие окружности, заполняют внешнюю область параболоида Q.

Определение 1. *Связкой окружностей* называется множество всех окружностей, изображающие точки которых принадлежат некоторой плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{3}$$

О плоскости (3) мы будем говорить, что она *изображает* связку. Связка называется *собственной*, если $C\neq 0$, т. е. если плоскость (3) не параллельна оси Oz. В противном случае связка называется *несобственной.*

Замечание 1. Не нужно думать, что любая точка плоскости (3) изображает некоторую окружность связки. Этим свойством обладают только точки, удовлетворяющие условию (2).

Другими словами, окружности связки изображаются точками плоскости (3), принадлежащими внешней области параболоида Q.

Для несобственных связок уравнение (3) означает, что центры (a, b) окружностей связки принадлежат прямой

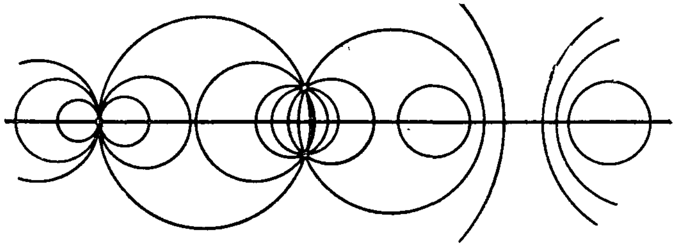
$$Ax+By+D=0.$$

При этом на третью координату $z=c$ окружностей связки это уравнение никаких ограничений не накладывает. Этим доказано следующее

Предложение 1. *Каждая несобственная связка является множеством всех окружностей, центры которых принадлежат некоторой фиксированной прямой.*

Ясно, что обратное утверждение также справедливо, т. е. *множество всех окружностей, центры которых принадлежат данной прямой, является несобственной связкой.*

Определение 2. Прямая, содержащая центры окружностей несобственной связки, называется *фундаментальной прямой* этой связки.



Несобственная связка

Чтобы получить пример собственной связки, мы вспомним, что степень p произвольной точки $M_0(a_0, b_0)$ плоскости относительно некоторой окружности $\Sigma(a, b, c)$ выражается, по определению, формулой

$$p = a_0^2 + b_0^2 - 2a_0a - 2b_0b - 2c.$$

Это показывает, что

множество всех окружностей, относительно которых данная точка $M_0(a_0, b_0)$ имеет данную степень p, является собственной связкой с уравнением

$$a_0x + b_0y + z + \frac{p - a_0^2 - b_0^2}{2} = 0. \tag{4}$$

Оказывается, что таким образом можно задать любую собственную связку, т. е. имеет место следующее

Предложение 2. Любая собственная связка (3) *является множеством всех окружностей, относительно которых фиксированная точка $M_0(a_0, b_0)$ имеет фиксированную степень p.*

Доказательство. Чтобы привести уравнение (3) к виду (4), достаточно положить

$$a_0 = \frac{A}{C}, \quad b_0 = \frac{B}{C}, \quad p = \frac{A^2 + B^2 + 2CD}{C^2}. \tag{5}$$

Заметим, что числа a_0, b_0 и p однозначно определены связкой (не меняются при умножении ее уравнения на любое число).

Определение 3. Точка $M_0(a_0, b_0)$ называется *центром* связки (5), а число p — ее *степенью.*

Заметим, что

центр и степень однозначно определяют связку.

На евклидово-проективной плоскости центр можно приписать и несобственным связкам, а именно, центром несобственной связки, изображающейся плоскостью

$$Ax + By + D = 0,$$

следует считать точку с однородными координатами $(A:B:0)$, т. е. несобственную точку прямых, перпендикулярных прямой фундаментальной связки.

Степень несобственной связки считается, по определению, бесконечной.

Из определений немедленно вытекает, что

если для трех окружностей связки радикальный центр существует, то он совпадает с центром связки, а если радикальный центр не существует (окружности имеют общую радикальную ось), то их радикальная ось проходит через центр связки.

На евклидово-проективной плоскости это утверждение верно и для несобственных связок.

Задание. Докажите, что

если из трех окружностей две принадлежат связке с центром в точке M_0 и если точка M_0 является радикальным центром этих окружностей (или лежит на их общей радикальной оси), то третья окружность также принадлежит связке.

В случае, когда точка $M_0(a_0, b_0)$ совпадает с началом координат $O(0,0)$, уравнение (4) сводится к равенству $z=-p/2$. Следовательно,

каждая окружность собственной связки степени p, имеющей центр в точке $O(0, 0)$, задается уравнением вида

$$x^2+y^2-2ax-2by+p=0,$$

где a и b — параметры, определяющие окружность.

Эти параметры представляют собой не что иное, как координаты центра окружности. Они должны выбираться так, чтобы было выполнено условие (1), т. е. чтобы

$$a^2+b^2>p. \tag{6}$$

Таким образом,

каждая точка плоскости, координаты (a, b) которой удовлетворяют неравенству (6), является центром единственной окружности, принадлежащей собственной связке степени p с центром в точке $O(0, 0)$.

Этим собственные связки отличаются от несобственных (центры окружностей которых принадлежат фундаментальной прямой и не заполняют никакой части плоскости).

Определение 4. Собственная связка называется

$$\left.\begin{array}{l}\textit{эллиптической,}\\ \textit{параболической,}\\ \textit{гиперболической,}\end{array}\right\}\text{ если ее степень } p\left\{\begin{array}{ll}\text{отрицательна:} & p<0,\\ \text{равна нулю:} & p=0,\\ \text{положительна:} & p>0.\end{array}\right.$$

Из неравенства (6) немедленно вытекает следующее

Предложение 3. *Если собственная связка*

а) *эллиптична,*

б) *параболична,*

в) *гиперболична,*

то центры ее окружностей заполняют

а) *всю плоскость,*

б) *всю плоскость, за исключением центра связки,*

в) *всю плоскость, за исключением точек, не лежащих вне окружности радиуса* $\sqrt{p}$ *с центром в центре связки.*

Определение 5. При $p > 0$ окружность радиуса $\sqrt{p}$ с центром в центре связки называется *фундаментальной окружностью* гиперболической связки. Аналогично, при $p < 0$ окружность радиуса $\sqrt{-p}$ с центром в центре связки называется *главной окружностью* эллиптической связки.

Ясно, что

фундаментальная (главная) окружность гиперболической (эллиптической) связки однозначно определяет эту связку.

При этом

любая окружность является фундаментальной (главной) окружностью некоторой гиперболической (эллиптической) связки.

Заметим, что

главная окружность эллиптической связки принадлежит этой связке, а фундаментальная окружность гиперболической связки этой связке не принадлежит.

Так как каждая точка является центром некоторой окружности эллиптической связки, то

каждая точка плоскости, изображающей эллиптическую связку, изображает некоторую окружность связки.

Таким образом, плоскость, изображающая эллиптическую связку, целиком лежит вне параболоида Q, т. е. его *не пересекает*.

Аналогично,

каждая точка плоскости, изображающей параболическую связку, изображает, за исключением одной точки, некоторую окружность связки.

Эта исключительная точка характеризуется тем, что при проектировании параллельно оси Oz на плоскость Oxy она переходит в центр $M_0(a_0, b_0)$ связки, т. е. тем, что ее координаты имеют вид (a_0, b_0, c_0), где c_0 — некоторое число. Подставив координаты (a_0, b_0, c_0) в уравнение связки (4) (при $p = 0$), мы немедленно получим, что

$$a_0^2 + b_0^2 + 2c_0 = 0.$$

Таким образом, исключительная точка (a_0, b_0, c_0) принадлежит параболоиду Q (и является единственной точкой рассматриваемой плоскости, лежащей на параболоиде Q). Это, по определению, означает, что плоскость, изображающая параболическую связку, *касается* параболоида Q (в точке (a_0, b_0, c_0)).

Рассмотрим теперь гиперболические связки (задаваемые уравнением (4) при $p < 0$).

Так же, как и выше, мы немедленно получаем, что *среди точек плоскости, изображающей гиперболическую связку, только точки, проектирующиеся в точки, лежащие вне фундаментальной окружности связки, изображают окружности связки.*

Координаты (x, y, z) точек, проектирующихся в точки фундаментальной окружности, должны удовлетворять уравнению связки (4), а первые две координаты (x, y) — уравнению фундаментальной окружности

$$(x-a_0)^2+(y-b_0)^2=p,$$

т. е. уравнению

$$x^2+y^2-2a_0x-2b_0y+a_0^2+b_0^2-p=0.$$

Прибавив к этому уравнению уравнение (4), умноженное на 2, мы получим уравнение

$$x^2+y^2+2z=0. \tag{7}$$

Аналогично показывается, что точки, проектирующиеся внутрь фундаментальной окружности, удовлетворяют соотношению

$$x^2+y^2+2z<0. \tag{8}$$

Таким образом, первые точки принадлежат параболоиду Q, а вторые лежат в его внутренней области. Другими словами, плоскость, изображающая гиперболическую связку, *пересекает* гиперболоид Q.

Условие (7) выделяет на плоскости (4) некоторую замкнутую линию[1]), а условие (8) выделяет точки, лежащие внутри этой линии.

Собирая вместе все доказанное (и используя принцип обращения), мы получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Собственная связка окружностей тогда и только тогда является*

а) *эллиптической связкой,*

б) *параболической связкой,*

в) *гиперболической связкой,*

когда изображающая ее плоскость

а) *не пересекает параболоид Q,*

б) *касается этого параболоида (и в этом случае точка касания проектируется в центр связки на плоскости Oxy),*

в) *пересекает параболоид Q по замкнутой линии, проектирующейся в фундаментальную окружность связки.*

---

[1]) С помощью результатов п. 2 § 1 гл. 5 легко показать, что эта линия является эллипсом. Впрочем, это непосредственно вытекает (см. п. 8 § 2 гл. 5) также из того, что она является образом некоторой окружности (фундаментальной окружности связки) при параллельном проектировании одной плоскости (плоскости Oxy) на другую плоскость (плоскость, изображающую связку).

Замечание 2. В частности, мы видим, что

для плоскости в пространстве, не параллельной оси Oz, возможны следующие три взаимно исключающие друг друга случая:

1) *плоскость не пересекает параболоид Q (и тогда целиком лежит в его внешней области);*

2) *плоскость касается этого параболоида (и тогда вся, за исключением точки касания, лежит во внешней области);*

3) *плоскость пересекает параболоид по некоторой линии (и тогда имеет точки как во внешней, так и во внутренней областях параболоида Q).*

Упражнение. Дайте прямое доказательство этого утверждения. (Указание: перейдите к координатам, для которых данная плоскость является координатной плоскостью.)

Задание. Докажите, что плоскости, параллельные оси Oz, т. е. изображающие несобственные связки, также пересекают параболоид Q по некоторой линии, но уже незамкнутой (параболе).

Чтобы получить наглядное описание собственных связок, нам понадобится следующее

Определение 6. Две окружности $\Sigma_0 = \Sigma(a_0, b_0, c_0)$ и $\Sigma = \Sigma(a, b, c)$ называются *ортогональными*, если они пересекаются под прямым углом, т. е. если они имеют две общие точки и их радиусы в этих точках перпендикулярны. Говорят, что окружность Σ *диаметрально пересекает* окружность Σ_0, если либо $\Sigma = \Sigma_0$, либо окружности Σ и Σ_0 пересекаются и их точки пересечения являются диаметрально противоположными точками окружности Σ_0.

Пусть R_0 и R — радиусы окружностей Σ_0 и Σ, а d — расстояние между их центрами. Очевидные элементарно-геометрические соображения показывают, что окружности тогда и только тогда ортогональны, когда

$$d^2 = R_0^2 + R^2.$$

Но

$$d^2 = (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2 = a^2 + b^2 + a_0^2 + b_0^2 - 2(a_0 a + b_0 b)$$

и

$$R_0^2 = a_0^2 + b_0^2 + 2c, \quad R^2 = a^2 + b^2 + 2c.$$

Следовательно,

окружности $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$ и $\Sigma(a, b, c)$ тогда и только тогда ортогональны, когда

$$a_0 a + b_0 b + c + c_0 = 0. \tag{9}$$

Отсюда непосредственно вытекает следующее

Предложение 4. *Множество всех окружностей, ортогональных данной окружности $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$, является собственной связкой с уравнением*

$$a_0 x + b_0 y + z + c_0 = 0. \tag{10}$$

Далее, ясно, что окружность $\Sigma(a, b, c)$ тогда и только тогда диаметрально пересекает окружность $\Sigma(a_0, b_0, c_0) \neq \Sigma(a, b, c)$, когда радикальная ось

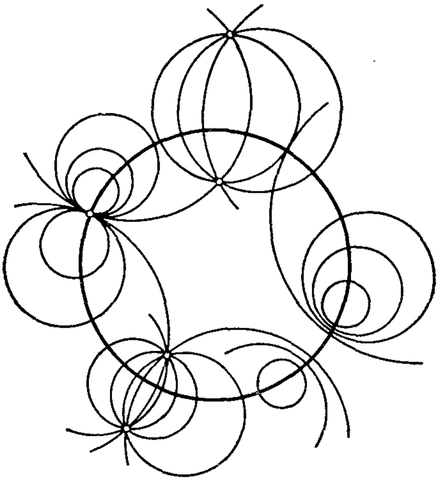
$$(a - a_0)x + (b - b_0)y + (c - c_0) = 0$$

этих окружностей проходит через центр (a_0, b_0) окружности $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$ (ибо радикальной осью двух пересекающихся окружностей является прямая, проходящая через их точки пересечения), т. е. когда имеет место соотношение

$$(a - a_0)a_0 + (b - b_0)b_0 + (c - c_0) = 0,$$

равносильное соотношению

$$a_0a + b_0b + c - (a_0^2 + b_0^2 + c_0) = 0. \quad (11)$$



Гиперболическая связка

Поскольку при $\Sigma(a_0, b_0, c_0) = \Sigma(a, b, c)$ это соотношение также справедливо, тем самым доказано следующее

Предложение 5. *Множество всех окружностей, диаметрально пересекающих данную окружность $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$, является собственной связкой с уравнением*

$$a_0x + b_0y + z - (a_0^2 + b_0^2 + c_0) = 0. \quad (12)$$

Еще один пример собственной связки мы получим, рассмотрев для произвольной точки $M_0(a_0, b_0)$ множество всех окружностей, проходящих через эту точку. Условие, что окружность

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by - 2c = 0$$

проходит через точку $M_0(a_0, b_0)$, выражается равенством

$$a_0^2 + b_0^2 - 2aa_0 - 2bb_0 - 2c = 0.$$

Эллиптическая связка

Следовательно, имеет место

Предложение 6. *Множество всех окружностей, проходящих через фиксированную точку $M_0(a_0, b_0)$, является собственной связкой с уравнением*

$$a_0x + b_0y + z - \frac{a_0^2 + b_0^2}{2} = 0. \quad (13)$$

Вычисляя по формулам (5) центр и степень связок (10), (12) и (13), мы немедленно получим следующее

Предложение 7. *Центром связки* (10) *является центр* $M_0(a_0, b_0)$ *окружности* $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$, *а ее степень выражается формулой*

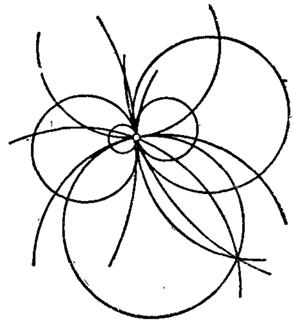
$$p = a_0^2 + b_0^2 + 2c_0 = R_0^2$$

и, следовательно, положительна (связка гиперболична).

Центром связки (12) *является центр* $M_0(a_0, b_0)$ *окружности* $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$, *а ее степень* p *выражается формулой*

$$p = a_0^2 + b_0^2 - 2(a_0^2 + b_0^2 + c_0) = 2c_0 - a_0^2 - b_0^2 = -R_0^2$$

и, следовательно, отрицательна (связка эллиптична).



Параболическая связка

Центром связки (13) *является точка* $M_0(a_0, b_0)$, *а ее степень равна нулю*:

$$p = (a_0^2 + b_0^2) - (a_0^2 + b_0^2) = 0$$

(связка параболична).

Кроме того, мы видим, что

окружность $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$ *является фундаментальной окружностью связки* (10) *и главной окружностью связки* (12).

При этом ясно, что в виде (10) можно представить любую гиперболическую связку (достаточно принять за окружность $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$ фундаментальную окружность связки), в виде (12) — любую эллиптическую связку (достаточно за окружность $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$ принять главную окружность связки), в виде (13) — любую параболическую связку (достаточно за точку $M_0(a_0, b_0)$ принять центр связки).

Резюмируя, мы получаем следующую теорему:

Теорема 2. *Связка окружностей тогда и только тогда является*

а) *эллиптической связкой,*

б) *параболической связкой,*

в) *гиперболической связкой,*

г) *несобственной связкой,*

когда она состоит из окружностей,

а) *диаметрально пересекающих некоторую окружность (являющуюся главной окружностью связки),*

б) *проходящих через некоторую точку (являющуюся центром связки),*

в) *ортогонально пересекающих некоторую окружность (являющуюся фундаментальной окружностью связки);*

г) *имеющих центры на данной прямой.*

3. Пучки окружностей

Определение 1. *Пучком окружностей* называется множество всех окружностей, изображающие точки которых принадлежат некоторой прямой

$$\frac{x-a_0}{A}=\frac{y-b_0}{B}=\frac{z-c_0}{C} \tag{1}$$

в пространстве. Об этой прямой мы будем говорить, что она *изображает* пучок. Если $A=B=0$, т. е. если прямая (1) параллельна оси Oz, пучок окружностей называется *несобственным*, а в противном случае — *собственным.*

Поскольку прямая однозначно определяется любыми ее двумя (различными) точками, *пучок окружностей однозначно определен, когда известны две его окружности.*

Координаты центров окружностей пучка удовлетворяют первому из уравнений (1), т. е. уравнению

$$\frac{x-a_0}{A}=\frac{y-b_0}{B}. \tag{2}$$

Для собственного пучка это уравнение выражает собой прямую.

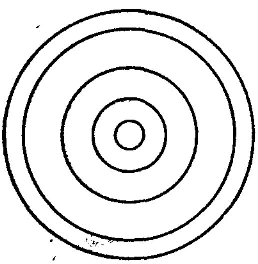
Определение 2. Прямая (2) называется *линией центров* собственного пучка.

Соглашение. Мы раз и навсегда условимся, что координаты x, y, z в пространстве *согласованы* с координатами x, y на рассматриваемой нами плоскости в том смысле, что эта плоскость является координатной плоскостью Oxy (и ее точка (x, y) имеет в пространстве координаты $(x, y, 0)$).

В силу этого соглашения,

линия центров собственного пучка является проекцией на плоскость Oxy прямой (1), *изображающей в пространстве этот пучок.*

Для несобственного пучка линия центров вырождается в одну точку $M_0(a_0, b_0)$. Следовательно, все окружности несобственного пучка концентричны. Более того, ясно, что для несобственного пучка уравнение (1) не накладывает никаких ограничений на третью координату $z=c$. Это означает, что справедливо следующее



Несобственный пучок

Предложение 1. *Каждый несобственный пучок состоит из всех окружностей, имеющих данный центр $M_0(a_0, b_0)$ (или, по-другому: из всех окружностей, концентрических данной).*

Определение 3. Общий центр M_0 всех окружностей несобственного пучка называется его *центром.*

Ясно, что

пучок окружностей тогда и только тогда несобствен, когда он является пересечением двух несобственных связок с непа-

раллельными фундаментальными прямыми (точка пересечения этих прямых и будет центром пучка).

Чтобы получить пример собственного пучка, мы рассмотрим на плоскости произвольную прямую

$$Ax + By + C = 0 \tag{3}$$

и произвольную окружность $\Sigma_0 = \Sigma(a_0, b_0, c_0)$. Как мы знаем (см. п. 1), для любой окружности $\Sigma = \Sigma(a, b, c)$ (не концентричной с окружностью Σ_0) радикальной осью окружностей Σ и Σ_0 является прямая

$$(a - a_0)\,x + (b - b_0)\,y + (c - c_0) = 0. \tag{4}$$

Поэтому радикальная ось окружностей Σ и Σ_0 тогда и только тогда совпадает с данной прямой (4), когда

$$\frac{a - a_0}{A} = \frac{b - b_0}{B} = \frac{c - c_0}{C}.$$

Это показывает, что

множество, состоящее из окружности $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$ и всех окружностей, имеющих с этой окружностью данную радикальную ось (3), *является пучком с уравнением*

$$\frac{x - a_0}{A} = \frac{y - b_0}{B} = \frac{z - c_0}{C}.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1), мы немедленно получаем следующее

Предложение 2. *Каждый собственный пучок является множеством всех окружностей, состоящим из некоторой окружности $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$ и всех окружностей, имеющих с этой окружностью данную радикальную ось* (3).

Отсюда вытекает

Следствие. *Три (неконцентрические) окружности Σ_1, Σ_2 и Σ_3 тогда и только тогда принадлежат одному пучку (изображающие их точки коллинеарны), когда они имеют общую радикальную ось.*

Доказательство. Если окружности Σ_1, Σ_2 и Σ_3 принадлежат пучку (1), то радикальной осью каждой из них и окружности Σ_0 является прямая (3). Поэтому радикальная ось любых двух из этих окружностей совпадает с прямой (3). Обратно, если окружности Σ_1, Σ_2 и Σ_3 имеют общую радикальную ось, то, приняв за прямую (3) эту ось, а за окружность Σ_0 — одну из данных окружностей (например, окружность Σ_1), мы, очевидно, получим пучок, содержащий все три окружности.

Определение 4. Прямая (3) называется *осью* собственного пучка (1). Она перпендикулярна его линии центров (2). Точка пересечения оси и линии центров называется *центром* собственного пучка. Поскольку центр принадлежит оси пучка, его степень относительно любой окружности пучка — одна и та же для всех окружностей. Эта степень p называется *степенью* пучка.

На евклидово-проективной плоскости осью каждого несобственного пучка можно считать несобственную прямую. Степень несобственного пучка не определяется (при желании ее можно считать бесконечной).

Ясно, что

собственный пучок однозначно определен, если известны его ось, линия центров и степень.

Все другие способы задания пучка легко сводятся к этому. Например, при задании пучка двумя (неконцентрическими) окружностями линия центров определяется как прямая, проходящая через центры данных окружностей, ось — как радикальная ось этих окружностей, а степень — как степень точки пересечения линии центров и оси относительно любой из данных окружностей.

Решив совместно уравнения (2) и (3) линии центров и оси пучка, мы получим, что

центр пучка (1) *имеет координаты*

$$x_0 = -\frac{AC + B(Ab_0 - Ba_0)}{A^2 + B^2}, \quad y_0 = -\frac{BC - A(Ab_0 - Ba_0)}{A^2 + B^2}. \tag{5}$$

Подставив эти выражения в уравнение произвольной окружности пучка, мы, после тривиальных алгебраических преобразований, получим, что

степень пучка (1) *равна*

$$p = \left(\frac{Aa_0 + Bb_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2 - (a_0^2 + b_0^2 + 2c_0). \tag{6}$$

Задание. Проведите подробно все вычисления (помните, что не любая точка прямой (1) изображает окружность; в частности, точка (a_0, b_0, c_0) может окружности не изображать).

Замечание 1. В предположении, что точка (a_0, b_0, c_0) изображает некоторую окружность, формулу (6) можно доказать и более геометрическим способом. Действительно, как мы знаем (п. 5 § 1 гл. 3), число

$$d_0^2 = \left(\frac{Aa_0 + Bb_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2$$

является квадратом расстояния точки (a_0, b_0) от прямой $Ax + By + C = 0$ (оси пучка). Но поскольку точка (a_0, b_0) принадлежит линии центров, перпендикулярной оси пучка и пересекающей эту ось в центре пучка, число d_0^2 равно квадрату расстояния центра пучка от точки (a_0, b_0), т. е. до центра окружности $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$. Остается заметить, что степень p центра пучка относительно окружности $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$, по определению, равна $d_0^2 - R_0^2$.

Определение 5. Систему прямоугольных координат x, y мы будем называть *канонической* относительно рассматриваемого (собственного) пучка окружностей, если ее осью абсцисс является линия центров пучка, а осью ординат — ось пучка (и значит, началом координат — центр пучка).

Каноническая система координат характеризуется, таким образом, тем, что уравнение (1), прямой, изображающей этот пучок, имеет (в согласованной системе координат $Oxyz$) вид

$$\frac{x-a_0}{1}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-c_0}{0}.$$

Формула (6) в канонической системе координат приобретает вид

$$p=-2c_0.$$

Обозначая a_0 через t, мы получаем, таким образом, следующее предложение, более или менее удовлетворительно описывающее все окружности собственного пучка:

Предложение 3. *В системе координат, канонической относительно собственного пучка степени p, уравнение произвольной окружности этого пучка имеет вид*

$$x^2+y^2-2xt+p=0, \tag{7}$$

где t — параметр, определяющий данную окружность. Центром этой окружности является точка $(t, 0)$.

Мы видим, в частности, что с точностью до выбора системы координат существует только один пучок степени p.

Наглядно это означает, что

любые два пучка одной и той же степени можно перевести друг в друга некоторым движением.

Определение 6. Собственный пучок окружностей называется

$$\left.\begin{array}{l}\textit{эллиптическим,}\\ \textit{параболическим,}\\ \textit{гиперболическим,}\end{array}\right\}\text{ если его степень } p \left\{\begin{array}{ll}\text{отрицательна:} & p=-e^2,\\ \text{равна нулю:} & p=0,\\ \text{положительна:} & p=e^2.\end{array}\right.$$

Поскольку радиус окружности (7) равен, очевидно,

$$\sqrt{t^2-p}=\begin{cases}\sqrt{t^2+e^2}, & \text{если пучок эллиптичен,}\\ |t|, & \text{если пучок параболичен,}\\ \sqrt{t^2-e^2}, & \text{если пучок гиперболичен,}\end{cases}$$

справедливо следующее

Предложение 4. *Если собственный пучок*

а) *эллиптичен,*

б) *параболичен,*

в) *гиперболичен,*

то центры его окружностей заполняют

а) *всю линию центров,*

б) *всю линию центров, за исключением центра пучка,* в) *всю линию центров, за исключением точек отрезка, концами которого являются точки, удаленные от центра пучка на расстояние* $e=\sqrt{p}$.

Определение 7. При $p>0$ точки, имеющие канонические координаты $(-e, 0)$ и $(e, 0)$, называются *фундаментальными точками* гиперболического пучка. Аналогично, при $p<0$ точки, имеющие канонические координаты $(0, e)$ и $(0, -e)$, называются *главными точками* эллиптического пучка.

Ясно, что

фундаментальные (главные) точки гиперболического (эллиптического) пучка однозначно определяют этот пучок.

При этом

любые две точки являются фундаментальными (главными) точками некоторого (однозначно определенного) гиперболического (эллиптического) пучка.

Заметим еще, что

любая окружность эллиптического пучка проходит через его главные точки и никакая окружность гиперболического пучка не проходит через его фундаментальные точки.

Действительно, точки $(0, e)$ и $(0, -e)$ удовлетворяют при любом t уравнению

$$x^2+y^2-2xt-e^2=0,$$

а точки $(-e, 0)$ и $(e, 0)$ удовлетворяют уравнению

$$x^2+y^2-2xt+e^2=0$$

только при $t=\pm e$.

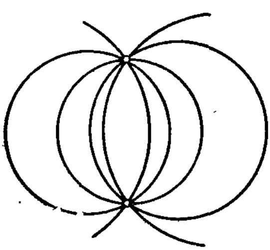
В частности, мы видим, что справедливо следующее

Предложение 5. *Любые две окружности эллиптического пучка пересекаются (в его главных точках).*

Более того, ясно, что

любая окружность Σ, проходящая через главные точки эллиптического пучка, принадлежит этому пучку.

Действительно, пусть (a, b) — центр окружности Σ. Так как главные точки симметричны относительно линии центров, то точка (a, b) принадлежит этой линии и, следовательно, является центром некоторой окружности Σ' пучка. Окружности Σ и Σ' концентричны и имеют общие точки (обе главные точки пучка). Следовательно, $\Sigma'=\Sigma$, так что окружность Σ принадлежит пучку.



Эллиптический пучок

Мы сформулируем доказанное утверждение в виде следующей теоремы:

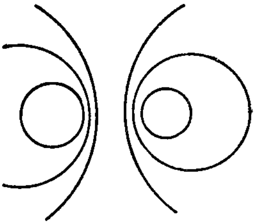
Теорема 1. *Каждый эллиптический пучок состоит из всех окружностей, проходящих через две фиксированные (различные) точки (главные точки пучка).*

Что касается гиперболических пучков, то для них справедливо следующее

Предложение 6. *Никакие две (различные) окружности гиперболического пучка не имеют общих точек (не пересекаются).*

Доказательство. Чтобы найти общие точки двух окружностей

$$x^2 + y^2 - 2xt_1 + e^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2xt_2 + e^2 = 0 \tag{8}$$



Гиперболический пучок

гиперболического пучка, надо совместно решить эти два уравнения. Но, вычитая одно уравнение из другого, мы при $t_1 \neq t_2$ немедленно получим, что $x = 0$, и следовательно, что

$$y^2 + e^2 = 0.$$

Следовательно, уравнения (8) решений (вещественных) не имеют, и потому соответствующие окружности не пересекаются.

Наконец, для параболических пучков имеет место

Предложение 7. *Каждая окружность параболического пучка проходит через его центр и касается в этой точке оси пучка, так что любые две окружности параболического пучка касаются (в его центре).*

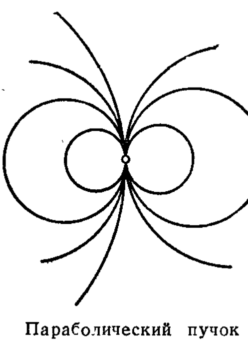
Доказательство. В канонических координатах произвольная окружность параболического пучка имеет уравнение вида

$$x^2 + y^2 - 2xt = 0,$$

т. е. уравнение

$$(x - t)^2 + y^2 = t^2.$$

Следовательно, она проходит через точку (0, 0) (центр пучка), а так как ее центр $(t, 0)$ лежит на оси абсцисс, то ось ординат (ось пучка) является касательной в точке (0, 0) к этой окружности.



Параболический пучок

Задание. Докажите, что *любая окружность, касающаяся в центре параболического пучка его оси, принадлежит пучку.*

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Каждый параболический пучок состоит из всех окружностей, проходящих через фиксированную точку (центр пучка) и касающихся в этой точке фиксированной прямой (оси пучка).*

Сопоставим теперь предложения 5, 6, 7 и воспользуемся принципом обращения. В результате мы получим следующую теорему:

Теорема 3. *Собственный пучок окружностей тогда и только тогда является*

а) эллиптическим пучком,

б) параболическим пучком,

в) гиперболическим пучком,

когда его любые две окружности

а) пересекаются,

б) касаются,

в) не имеют ни одной общей точки.

Так как каждая точка линии центров эллиптического пучка является, согласно предложению 4, центром некоторой окружности пучка, то

каждая точка прямой, изображающей эллиптический пучок, является изображением некоторой окружности пучка.

Таким образом, прямая, изображающая эллиптический пучок, лежит во внешней области параболоида Q и, следовательно, не пересекает этот параболоид.

Аналогично,

каждая точка прямой, изображающей параболический пучок, за исключением одной точки (проектирующейся в центр пучка), является изображением некоторой окружности пучка.

Эта исключительная точка имеет координаты (a_0, b_0, c_0), где (a_0, b_0) — координаты центра пучка. Так как $p = 0$ и $Aa_0 + Bb_0 + C = 0$, то из формулы (6) следует, что

$$a_0^2 + b_0^2 + 2c_0 = 0.$$

Таким образом, точка (a_0, b_0, c_0) принадлежит параболоиду Q. Поскольку все остальные точки прямой, изображающей параболический пучок, лежат во внешней области параболоида Q, это, по определению, означает, что прямая, изображающая параболический пучок, *касается* параболоида Q (в точке (a_0, b_0, c_0)).

Наконец,

точка прямой, изображающей гиперболический пучок, тогда и только тогда является изображением некоторой окружности пучка, когда она проектируется в точку линии центров, не лежащую на отрезке с концами в фундаментальных точках пучка.

Другими словами,

если $M_1(a_1, b_1, c_1)$ и $M_2(a_2, b_2, c_2)$ — точки прямой

$$\frac{x - a_0}{A} = \frac{y - b_0}{B} = \frac{z - c_0}{C},$$

изображающей гиперболический пучок, проектирующиеся в его фундаментальные точки, то точка этой прямой тогда и только тогда изображает окружность пучка, когда она не принадлежит отрезку $\overline{M_1M_2}$.

Чтобы найти точки M_1 и M_2, мы воспользуемся тем, что расстояние их проекций (фундаментальных точек пучка) до оси

$$Ax + By + C = 0$$

пучка равно $\sqrt{p}$, так что

$$\left| \frac{Aa_1 + Bb_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \frac{Aa_2 + Bb_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = p.$$

Сравнивая эти формулы с формулой (6) (и учитывая, что за точку (a_0, b_0, c_0) в формуле (6) можно принять любую точку изображающей прямой,— в частности, точку M_1 или точку M_2), мы немедленно получаем, что

$$a_1^2 + b_1^2 + 2c_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_2^2 + b_2^2 + 2c_2 = 0.$$

Аналогично показывается, что для точек (a, b, c), являющихся внутренними точками отрезка $\overline{M_1M_2}$, имеет место неравенство

$$a^2 + b^2 + 2c < 0.$$

Таким образом, точки M_1 и M_2 принадлежат параболоиду Q, а внутренние точки отрезка $\overline{M_1M_2}$ принадлежат внутренней области этого параболоида. Это означает, что прямая, изображающая гиперболический пучок, пересекает параболоид Q в двух точках.

Собирая вместе все доказанное (и используя принцип обращения), мы получаем следующую теорему:

Теорема 4. *Собственный пучок окружностей тогда и только тогда является*

а) *эллиптическим пучком,*

б) *параболическим пучком,*

в) *гиперболическим пучком,*

когда изображающая его прямая

а) *не пересекает параболоид Q,*

б) *касается этого параболоида,*

в) *пересекает его в двух точках.*

Что касается несобственных пучков, то, по определению, они изображаются прямыми, параллельными оси Oz.

Задание. Докажите, что

любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает параболоид Q в одной точке, причем одна из соответствующих полупрямых лежит во внешней области параболоида Q, а другая — во внутренней.

Замечание 2. Это вскрывает неожиданное сходство между гиперболическими и несобственными пучками: для обоих пучков изображающие их прямые имеют бесконечно много точек во внутренней области параболоида. На этом основании иногда бывает удобно причислять несобственные пучки к гиперболическим.

Замечание 3. При доказательстве теоремы 4 мы по ходу дела доказали также, что

для любой прямой в пространстве, не параллельной оси Oz, возможны следующие три взаимоисключающих друг друга случая:

1) *прямая не пересекает параболоид Q (и в этом случае целиком лежит в его внешней области);*

2) *прямая касается параболоида Q (и в этом случае вся, за исключением точки касания, лежит в его внешней области);*

3) *прямая пересекает параболоид Q в двух точках M_1 и M_2 (и в этом случае отрезок M_1M_2 прямой лежит во внутренней области параболоида, а все остальные ее точки — во внешней области).*

Задание. Дайте прямое доказательство этого утверждения. (Указание: рассмотрите параметрические уравнения прямой и составьте уравнение для значений параметра, отвечающих точкам пересечения; ср. п. 2 § 1 гл. 3.)

4. Пучки как пересечения связок

Любая прямая в пространстве является пересечением двух плоскостей и любые две (непараллельные) плоскости пересекаются по прямой. Следовательно,

любой пучок окружностей является пересечением (общей частью) двух связок окружностей и любые две связки (имеющие хотя бы одну общую окружность) пересекаются по пучку.

Отсюда и из теоремы 2 п. 2 немедленно вытекает

Теорема 1. *Если существуют окружности,*

1) *диаметрально пересекающие две данные (различные) окружности;*

2) *диаметрально пересекающие данную окружность и проходящие через данную точку;*

3) *диаметрально пересекающие данную окружность и ортогональные другой данной окружности (отличной от первой);*

4) *диаметрально пересекающие данную окружность и имеющие центры на данной прямой;*

5) *проходящие через две данные (различные) точки;*

6) *проходящие через данную точку и ортогональные данной окружности;*

7) *проходящие через данную точку и имеющие центры на данной прямой;*

8) *ортогональные двум данным (различным) окружностям;*

9) *ортогональные данной окружности и имеющие центры на данной прямой;*

10) *центры которых принадлежат одновременно двум данным (различным) прямым,*

то эти окружности составляют пучок.

При этом любой пучок может быть получен таким образом (вообще говоря, разными способами).

Задание. Покажите, что

окружности, удовлетворяющие условию 4), 5), 7) *или* 9), *существуют всегда; удовлетворяющие условию* 1), 3) *или* 8), — *тогда и только тогда, когда данные окружности не концентричны; удовлетворяющие условию* 2) *или* 6), — *тогда и только тогда, когда данная точка не является центром данной окружности; удовлетворяющие условию* 10), — *тогда и только тогда, когда данные прямые не параллельны.*

Из теоремы 5 п. 3 и теоремы 1 п. 2 немедленно вытекает следующее

Предложение 1. *Эллиптическая связка содержит только эллиптические пучки. Параболическая связка содержит только эллиптические и параболические пучки. Гиперболическая связка содержит пучки всех трех типов (но только собственные). Несобственная связка содержит как несобственные пучки, так и собственные пучки всех трех типов.*

Задание. Дайте прямое доказательство предложения 1, использующее только теорему 4 п. 3 и теорему 1 п. 2.

Следствие. *Пересечение двух связок, из которых одна — эллиптическая, может быть только эллиптическим пучком.*

Пересечение двух связок, из которых одна — параболическая, может быть только эллиптическим или параболическим пучком.

Пересечение двух связок, из которых одна — собственная, может быть только собственным пучком.

Отсюда вытекает, что

описанные в теореме 1 *способы* 1), 2), 3), 4) *и* 5) *построения пучков приводят только к эллиптическим пучкам;*

способы 6) *и* 7) *могут приводить как к эллиптическим, так и к параболическим пучкам;*

способы 8) *и* 9) *могут приводить к любым собственным пучкам;*

способ 10) *приводит только к несобственным пучкам.*

Упражнение. Докажите, что

способы 6) *и* 7) *тогда и только тогда приводят к эллиптическим пучкам, когда данная точка не лежит на данной окружности* (*данной прямой*);

способы 8) *и* 9) *тогда и только тогда приводят к*

а) *эллиптическим пучкам,*

б) *параболическим пучкам,*

в) *гиперболическим пучкам,*

когда данные окружности (*данные окружность и прямая*)

а) *не пересекаются,*

б) *касаются,*

в) *пересекаются в двух точках.*

В частности, мы видим, что

несобственный пучок может быть представлен лишь как пересечение несобственных связок (*фундаментальные прямые которых пересекаются в центре пучка*) *и, обратно, пересечение любых двух несобственных связок* (*с непараллельными фундаментальными прямыми*) *является несобственным пучком.*

Обратим внимание на то, что

пересечение двух (различных) параболических связок обязательно является эллиптическим пучком.

При этом

любой эллиптический пучок единственным образом представляется в виде пересечения двух параболических связок.

Действительно, это является лишь другой формулировкой теоремы 1 п. 3.

Аналогично, теорема 2 п. 3 означает, что

любой параболический пучок однозначно представляется в виде пересечения некоторой параболической связки и множества всех окружностей, касающихся некоторой прямой.

Подчеркнем, что последнее множество связкой не является.

Чтобы представить параболический пучок в виде пересечения связок, достаточно заметить, что окружность Σ тогда и только тогда касается в точке M_0 некоторой прямой λ, когда она ортогонально пересекает произвольную окружность, проходящую через точку M_0 и имеющую центр на прямой λ. Поэтому теорему 2 п. 3 мы можем переформулировать в следующем виде:

Теорема 2′. *Любой параболический пучок состоит из всех окружностей, проходящих через фиксированную точку и ортогонально пересекающих в этой точке фиксированную окружность. Осью этого пучка является прямая, проходящая через данную точку и центр данной окружности.*

Эта теорема означает, что

любой параболический пучок является пересечением (однозначно определенной) параболической связки и некоторой гиперболической связки.

Заметим, однако, что эта гиперболическая связка однозначно не определена. С другой стороны, произвольной она тоже быть не может: необходимо (и достаточно), чтобы ее фундаментальная окружность проходила через центр пучка, а центр этой окружности лежал на оси пучка.

Чтобы достичь однозначного представления, мы переформулируем теорему 2 п. 3 еще раз:

Теорема 2″. *Любой параболический пучок состоит из всех окружностей, проходящих через фиксированную точку, центры которых лежат на фиксированной прямой (проходящей через эту точку). Осью пучка является прямая, проходящая через данную точку перпендикулярно данной прямой.*

Это означает, что

любой параболический пучок однозначно представляется в виде пересечения параболической и несобственной связок.

Теоремы 2′ и 2″ отвечают способам 6) и 7) построения пучков из теоремы 1. Формулировки теорем, отвечающих способам 8) и 9), мы оставляем читателю (эти теоремы мало интересны, поскольку они, подобно теореме 2′, не дают однозначного представления).

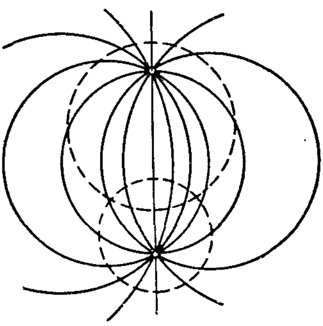
Обратим внимание на то, что однозначность несобственной связки в представлении параболического пучка по способу 7) (теорема 2″) является общим фактом, имеющим место для любых собственных пучков, т. е.

каждый собственный пучок содержится в единственной несобственной связке.

Действительно, ось пучка должна быть фундаментальной прямой этой связки. (Другое доказательство: каждая прямая, не параллельная оси Oz, содержится в единственной плоскости, параллельной этой оси.)

Для эллиптических пучков помимо теоремы 1 п. 3, отвечающей способу 5) построения пучков, возможны еще восемь (!) аналогичных теорем, отвечающих другим способам из теоремы 1. Доказательство их не совсем тривиально, поскольку необходимо показать, что каждым из этих способов можно получить все эллиптические пучки. Мы здесь ограничимся способом 1), т. е. докажем следующую теорему:

Теорема 3. *Каждый эллиптический пучок состоит из всех окружностей, диаметрально пересекающих две фиксированные неконцентрические окружности Σ_1 и Σ_2. Осью пучка является прямая, соединяющая центры этих окружностей.*



Доказательство. Легко видеть, что эта теорема непосредственно вытекает из следующего предложения:

Предложение 2. *Каждая точка оси эллиптического пучка, лежащая между его главными точками, является центром единственной окружности, которую диаметрально пересекает каждая окружность пучка. Никаких других окружностей, диаметрально пересекаемых всеми окружностями пучка, не существует.*

Действительно, если Σ_1 и Σ_2 — любые две из этих окружностей, то пучок, состоящий из всех окружностей, диаметрально пересекающих окружности Σ_1 и Σ_2, содержит данный эллиптический пучок и потому с ним совпадает (ибо две прямые в пространстве, одна из которых содержится в другой, совпадают).

Таким образом, нам осталось лишь доказать предложение 2.

Запишем с этой целью наш пучок в канонических координатах x, y. Тогда любая окружность этого пучка будет иметь уравнение вида

$$x^2 + y^2 - 2xt - e^2 = 0, \tag{1}$$

а его главные точки будут иметь координаты $(0, -e)$ и $(0, e)$.

Условие того, что окружность (1) диаметрально пересекает некоторую окружность $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$, имеет (см. формулу (11) п. 2) вид

$$a_0 t + \frac{e^2}{2} - (a_0^2 + b_0^2 + c_0) = 0.$$

Чтобы это равенство было выполнено для любых t, необходимо и достаточно, чтобы $a_0 = 0$ и $a_0^2 + b_0^2 + c_0 = \frac{e^2}{2}$. Таким образом, мы доказали, что

все окружности (1) *тогда и только тогда диаметрально пересекают окружность* $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$, *когда*

$$a_0 = 0, \quad b_0^2 + c_0 = \frac{e^2}{2}.$$

Для завершения доказательства предложения 2 остается заметить, что этим условиям и условию

$$a_0^2 + b_0^2 + 2c_0 > 0$$

(необходимому для существования окружности $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$) можно, очевидно, удовлетворить тогда и только тогда, когда

$$-e < b_0 < e,$$

причем каждому такому значению b_0 будет соответствовать одно вполне определенное значение c_0, т. е. одна вполне определенная окружность $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$.

Гиперболические пучки могут получаться только способами 8) и 9). При этом легко видеть, что

если пучок можно получить по способу 8), *то его можно получить и по способу* 9).

Действительно, если прямая в пространстве является пересечением двух плоскостей, не параллельных оси Oz, то она же является пересечением одной из этих плоскостей (безразлично, какой) и (однозначно определенной) плоскости, параллельной оси Oz.

Мы не будем ограничиваться гиперболическими пучками и исследуем представимость по способу 8) любых (собственных) пучков.

Для этого нам понадобится следующее

Предложение 3. *Окружность, ортогональная двум окружностям* $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$ *и* $\Sigma(a_1, b_1, c_1)$ *некоторого пучка, ортогональна и любой окружности этого пучка.*

Доказательство. Вспомнив параметрические уравнения прямой в пространстве, проходящей через две точки (п. 1 § 3 гл. 3), мы немедленно получим, что координаты произвольной окружности $\Sigma(a, b, c)$ рассматриваемого пучка выражаются формулами

$$a=(1-t)a_0+ta_1,$$
$$b=(1-t)b_0+tb_1,$$
$$c=(1-t)c_0+tc_1,$$

где t — некоторое число.

С другой стороны, окружности, ортогональные окружностям $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$ и $\Sigma(a_1, b_1, c_1)$, образуют (если они существуют) пучок с изображающей прямой

$$\begin{aligned} a_0x+b_0y+z+c_0&=0,\\ a_1x+b_1y+z+c_1&=0. \end{aligned} \tag{2}$$

Для завершения доказательства остается заметить, что если точка (x, y, z) удовлетворяет уравнениям (2), то для любого t она удовлетворяет и уравнению

$$((1-t)a_0+ta_1)x+((1-t)b_0+tb_1)y+z+((1-t)c_0+tc_1)=0.$$

Уравнения (2) определяют пучок (а не пустое множество) тогда и только тогда, когда окружности $\Sigma(a_0, b_0, c_0)$ и $\Sigma(a_1, b_1, c_1)$ не концентричны, т. е. когда данный пучок — собственный. Тем самым доказано, что

окружности, ортогональные всем окружностям произвольного собственного пучка, составляют пучок (также, очевидно, собственный).

Определение 1. Пучок окружностей, ортогональных всем окружностям данного собственного пучка, называется пучком, *сопряженным* этому пучку.

Поскольку сопряженный пучок — собственный, определен пучок, сопряженный сопряженному пучку. Ввиду симметричности отношения ортогональности окружностей (если окружность Σ_1 ортогональна окружности Σ_2, то окружность Σ_2 ортогональна окружности Σ_1), ясно, что этот пучок совпадает с исходным пучком. Другими словами,

отношение сопряженности пучков симметрично.

Замечание 1. Поскольку пучки окружностей изображаются прямыми в пространстве, отношение сопряженности пучков индуцирует некоторое отношение сопряженности между прямыми в пространстве. Это очень интересное отношение мы в дополнении к п. 3 § 2 гл. 6 рассмотрим с совершенно иных позиций.

Предложение 4.

а) *Осью сопряженного пучка является линия центров данного пучка.*

б) *Линией центров сопряженного пучка является ось данного пучка.*

в) *Центр сопряженного пучка совпадает с центром данного пучка.*

г) *Степень p' сопряженного пучка равна степени p данного пучка, взятой с обратным знаком:*

$$p' = -p.$$

Доказательство. Введем на плоскости координаты x, y, канонические относительно данного пучка, и согласованные с ними координаты x, y, z в пространстве. Тогда для любых двух окружностей пучка их вторые координаты y будут равны нулю, а их третьи координаты будут одинаковы (и равны $-\frac{p}{2}$, где p — степень пучка), т. е. эти окружности будут иметь координаты $\left(a_0, 0, -\frac{p}{2}\right)$ и $\left(a_1, 0, -\frac{p}{2}\right)$, где $a_0 \neq a_1$. Поэтому уравнения (2) сопряженного пучка будут иметь вид

$$\begin{aligned} a_0x + z - \frac{p}{2} = 0, \\ a_1x + z - \frac{p}{2} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Этим уравнениям удовлетворяет, в частности, точка

$$\left(0, 0, \frac{p}{2}\right).$$

Поскольку векторное произведение векторов $n_0(a_0, 0, 1)$ и $n_1(a_1, 0, 1)$ равно $(0, a_1 - a_2, 0)$, за направляющий вектор прямой (3) мы можем принять вектор $(0, 1, 0)$. Следовательно, каноническими уравнениями прямой (3) будут уравнения

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-\frac{p}{2}}{0}. \tag{4}$$

Поэтому осью сопряженного пучка будет прямая

$$0x + 1y + 0 = 0,$$

т. е. ось абсцисс $y = 0$. Поскольку эта ось является, по определению, линией центров данного пучка, утверждение а) тем самым полностью доказано.

Аналогично, линией центров сопряженного пучка будет прямая

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{1},$$

т. е. ось ординат $x = 0$ (ось данного пучка). Тем самым доказано и утверждение б).

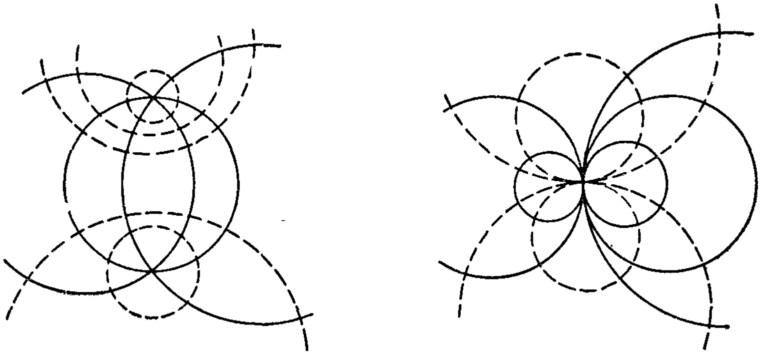
Утверждение в) непосредственно вытекает из утверждений а) и б), а для доказательства утверждения г) достаточно применить к пучку (4) формулу (6) п. 3, согласно которой

$$p' = \left(\frac{0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0}{\sqrt{0^2 + 1^2}}\right)^2 - \left(0^2 + 0^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}\right) = -p.$$

Тем самым предложение 4 полностью доказано.

Следствие. *Пучок, сопряженный*

$$\left.\begin{array}{l}\textit{эллиптическому}\\ \textit{параболическому}\\ \textit{гиперболическому}\end{array}\right\}\ \textit{пучку, является}\ \left\{\begin{array}{l}\textit{гиперболическим}\\ \textit{параболическим}\\ \textit{эллиптическим}\end{array}\right\}\ \textit{пучком.}$$



Теперь мы уже немедленно получаем теорему, утверждающую универсальность способа 8) построения пучков:

Теорема 4. *Любой собственный пучок состоит из всех окружностей, ортогональных двум фиксированным неконцентрическим окружностям* Σ_1 *и* Σ_2. *Этот пучок*

а) *эллиптический,*

б) *параболический,*

в) *гиперболический,*

тогда и только тогда, когда окружности Σ_1 *и* Σ_2

а) *не пересекаются,*

б) *касаются,*

в) *пересекаются.*

Доказательство. В свете сказанного выше, первое утверждение очевидно: достаточно за окружности Σ_1 и Σ_2 принять любые две окружности сопряженного пучка. Второе утверждение теперь непосредственно вытекает из теоремы 3 п. 3.

Наиболее интересно, конечно, утверждение теоремы 4, относящееся к гиперболическим пучкам (поскольку для других пучков мы обладаем более простыми способами их построения).

5. Прямые как окружности

Многочисленные мало приятные оговорки в предыдущем пункте были вызваны существованием связок с пустым пересечением (т. е. существованием в пространстве параллельных плоскостей). Естественно, что эти оговорки будут ненужными и вся теория пучков и связок окружностей приобретет большую стройность и законченность, если мы перейдем от евклидова пространства к евклидово-проективному (см. п. 3 § 2), в котором любые две плоскости пересекаются по прямой (возможно, несобственной). Для этого мы в первую очередь должны, конечно, ответить на вопрос о том, что следует изображать посредством несобственных точек.

Для ответа на этот вопрос мы заметим, что самым общим образом уравнение произвольной окружности может быть записано в следующем виде:

$$M(x^2+y^2)+Ax+By+C=0, \tag{1}$$

где $M \neq 0$. Радиус R этой окружности выражается формулой

$$R^2=\frac{A^2+B^2-2CM}{4M^2}, \tag{2}$$

так что, кроме условия $M \neq 0$, должно быть выполнено также условие

$$A^2+B^2-2CM>0. \tag{3}$$

Поскольку координаты (a, b, c) окружности (1) выражаются формулами

$$a=-\frac{A}{2M}, \quad b=-\frac{B}{2M}, \quad c=-\frac{C}{2M},$$

мы видим, что точка пространства с однородными координатами $X:Y:Z:T$ (связанными с координатами x, y, z формулами $x=\frac{X}{T}$, $y=\frac{Y}{T}$, $z=\frac{Z}{T}$) изображает окружность (1) с $A=X$, $B=Y$, $C=Z$ и $M=-\frac{1}{2}T$.

Это показывает, что несобственным точкам пространства (для которых $T=0$) естественно сопоставить линии, выражающиеся уравнением (1) с $M=0$, т. е. прямые.

Таким образом,

окружность

$$x^2+y^2-2ax-2by-2c=0$$

мы изображаем собственной точкой $(a:b:c:1)$ *евклидово-проективного пространства, а прямую*

$$Ax+By+C=0$$

— его несобственной точкой $(A:B:C:0)$.

Соглашение 1. Для упрощения формулировок (и только для этого!) целесообразно теперь несколько изменить нашу терминологию и называть *окружностями* произвольные линии, выражающиеся (в прямоугольных координатах x, y) уравнением вида (1), коэффициенты которого подчинены только условию (3) (заметим, что это условие обеспечивает отличие от нуля хотя бы одного из коэффициентов A, B и C, а при $M=0$ — отличие от нуля хотя бы одного из коэффициентов A и B). При $M \neq 0$ мы получаем, следовательно, настоящие окружности, а при $M = 0$ — прямые.

Замечание 1. Линия, имеющая уравнение вида (1) в одной системе прямоугольных координат, имеет, очевидно, уравнение такого же вида (и даже с тем же M) в любой другой системе прямоугольных координат. Это показывает, что наше определение окружностей корректно (в рамках координатно-аксиоматического построения евклидовой геометрии; с содержательной точки зрения корректность этого определения очевидна).

При сделанном соглашении

любая окружность (1) *будет изображаться в евклидово-проективном пространстве точкой*

$$(A : B : C : -2M).$$

Тем самым устанавливается биективное соответствие между всеми окружностями на (евклидовой) плоскости и точками $(X : Y : Z : T)$ евклидово-проективного пространства, для которых

$$X^2 + Y^2 + 2ZT \neq 0. \tag{4}$$

Замечание 2. Уравнение

$$X^2 + Y^2 + 2ZT = 0 \tag{5}$$

получается из уравнения

$$x^2 + y^2 + 2z = 0$$

заменами $x = \frac{X}{T}$, $y = \frac{Y}{T}$, $z = \frac{Z}{T}$ (и умножением на T^2). При этом уравнению (5) удовлетворяет, кроме собственных точек, только одна несобственная точка $(0 : 0 : 1 : 0)$, т. е. несобственная точка Z_∞ оси Oz. На этом основании естественно считать (по определению!), что в евклидово-проективном пространстве параболоид Q содержит, кроме собственных точек, еще только одну несобственную точку Z_∞. В соответствии с этим соглашением несобственную плоскость как плоскость, имеющую с параболоидом Q только одну общую точку, естественно считать плоскостью, касающейся параболоида Q в точке Z_∞. Но мы знаем, что если собственная плоскость касается параболоида, то все ее точки, отличные от точки касания, лежат во внешней области параболоида. Поэтому все несобственные точки, отличные от точки Z_∞, также естественно считать лежащими в этой области.

Приняв все эти соглашения, мы можем, таким образом, сказать, что

окружности на евклидовой плоскости находятся в биективном соответствии с точками евклидово-проективного пространства, принадлежащими внешней области параболоида Q.

Замечание 3. Формула (2) показывает, что при $M \to 0$ (и A, B, C постоянных) радиус R стремится к ∞. На этом основании иногда говорят, что «прямые являются окружностями бесконечного радиуса».

При фиксированных A, B, C и любом $M \neq 0$ центр

$$\left(-\frac{A}{2M},\ -\frac{B}{2M}\right)$$

окружности (1) принадлежит прямой

$$Bx - Ay = 0, \tag{6}$$

перпендикулярной прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

В евклидово-проективной плоскости эти центры имеют однородные координаты $(A : B : -2M)$, а несобственная точка прямой (6) — координаты $(A : B : 0)$. Это показывает, что

в евклидово-проективной плоскости можно считать, что каждая (собственная) прямая обладает «центром», являющимся общей несобственной точкой всех прямых, ей перпендикулярных.

Замечание 4. Поскольку несобственная прямая изображается точкой Z_∞, принадлежащей параболоиду Q, считать ее «окружностью» нецелесообразно. Например, никакого «центра» ей приписать разумным образом нельзя.

Замечание 5. Введение в рассмотрение евклидово-проективной плоскости позволяет также пролить новый свет на соглашение 1.

Действительно, в однородных евклидовых координатах $X : Y : Z$ (связанных с координатами x, y соотношениями $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$) уравнение (1) имеет вид

$$M(X^2 + Y^2) + AXZ + BYZ + CZ^2 = 0,$$

и при $M = 0$ распадается на уравнение собственной прямой

$$AX + BY + CZ = 0$$

и уравнение несобственной прямой

$$Z = 0.$$

Следовательно, на самом деле окружностью, получающейся при $M = 0$, мы должны считать не прямую, а пару, состоящую из этой прямой и несобственной прямой.

Обобщив понятие окружности, мы должны теперь соответствующим образом пополнить связки и пучки окружностей, присоединив к ним окружности (т. е. прямые), изображающиеся несобственными точками.

Так, например, к собственному пучку

$$\frac{x - a_0}{A} = \frac{y - b_0}{B} = \frac{z - c_0}{C}$$

мы должны теперь присоединить прямую, изображающуюся соответствующей несобственной точкой. Эта несобственная точка имеет по определению (см. п. 3 § 2) однородные координаты $(A:B:C:0)$ и потому изображает прямую

$$Ax+By+C=0,$$

т. е. ось пучка. Таким образом,

ось собственного пучка окружностей является единственной принадлежащей ему прямой.

Несобственные пучки (состоящие из окружностей, имеющих данный центр) никаких прямых не содержат.

Даже на евклидово-проективной плоскости к несобственному пучку ничего не добавляется: единственного кандидата — несобственную прямую — мы окружностью условились не считать.

Аналогично, к связке, изображающейся плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

мы должны присоединить прямые, изображающиеся несобственными точками этой плоскости, т. е. точками $(X:Y:Z:0)$, для которых

$$AX+BY+CZ=0. \tag{7}$$

Пусть сначала $C=0$, т. е. расматриваемая связка — несобственная (состоит из всех окружностей, центры которых принадлежат прямой $Ax+By+D=0$). В этом случае условию (7) удовлетворяют точки вида $(-B:A:Z:0)$, где Z произвольно (и только такие точки). Эти точки изображают прямые

$$-Bx+Ay+Z=0,$$

перпендикулярные прямой

$$Ax+By+D=0$$

(и только такие прямые). Следовательно,

прямыми, принадлежащими несобственной связке, являются прямые, перпендикулярные ее фундаментальной прямой (и только такие прямые).

Пусть теперь $C\neq 0$ (связка собственная). Так как центр связки имеет координаты

$$a_0=\frac{A}{C},\quad b_0=\frac{B}{C},$$

то любая прямая, проходящая через этот центр, имеет уравнение вида

$$X\left(x-\frac{A}{C}\right)+Y\left(y-\frac{B}{C}\right)=0,$$

т. е. вида

$$Xx+Yy-\frac{AX+BY}{C}=0,$$

где X и Y — произвольные параметры (одновременно не равные нулю). Поэтому эта прямая изображается точкой

$$\left(X : Y : -\frac{AX + BY}{C} : 0\right), \tag{8}$$

удовлетворяющей уравнению (7).

Обратно, любая точка $(X : Y : Z : 0)$, удовлетворяющая уравнению (7), имеет вид (8) и потому изображает прямую, проходящую через центр связки.

Следовательно,

прямыми, принадлежащими собственной связке, являются прямые, проходящие через ее центр, и только эти прямые.

В евклидово-проективной плоскости это утверждение верно и для несобственных связок, поскольку, как мы знаем, центром несобственной связки является несобственная точка прямых, перпендикулярных прямой, на которой расположены центры окружностей связки.

Поскольку в евклидово-проективном пространстве совершенно неестественно ограничиваться лишь его собственными прямыми и плоскостями, мы теперь не можем ограничиваться пучками и связками, ими изображаемыми. Чтобы быть последовательными, мы должны ввести в рассмотрение пучки окружностей (являющихся на самом деле прямыми), изображающиеся несобственными прямыми, и связку, изображающуюся несобственной плоскостью.

Что касается последней, то ясно, что

связка окружностей, изображающаяся несобственной плоскостью, является не чем иным, как множеством всех (собственных) прямых плоскости.

На евклидово-проективной плоскости эту связку можно описать как связку окружностей, центры которых принадлежат несобственной прямой. На этом основании связку всех прямых следует считать несобственной связкой, фундаментальной прямой которой является несобственная прямая.

С другой стороны, поскольку эта связка изображается несобственной плоскостью, касающейся параболоида Q, ее следует считать также и параболической связкой (ср. теорему 1 п. 2).

Рассмотрим теперь пучки, изображающиеся несобственными прямыми.

Каждая несобственная прямая в пространстве является несобственной прямой некоторой плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Поэтому пучок, изображающийся этой прямой, состоит из всех прямых, содержащихся в связке, изображающейся этой плоскостью. Следовательно, если эта связка — собственная, то рассматриваемый пучок состоит из всех прямых, проходящих через центр связки, а если эта связка — несобственная, то пучок состоит из всех прямых, перпендикулярных прямой, на которой расположены центры окружностей связки.

Таким образом, мы видим, что

пучки окружностей, изображающиеся несобственными прямыми, являются не чем иным, как пучками прямых в смысле п. 1 § 1.

При этом собственные пучки прямых принадлежат собственным связкам окружностей, а несобственные пучки — несобственным связкам.

Задание. Докажите, что

собственные пучки прямых изображаются несобственными прямыми, не проходящими через несобственную точку Z_∞ оси Oz, а несобственные пучки прямых — несобственными прямыми, проходящими через эту точку.

Посмотрим теперь, что происходит с полученными в предыдущих пунктах результатами при нашем новом понимании пучков и связок окружностей.

В первую очередь нам надо распространить термины «ортогональные окружности» и «диаметрально пересекающиеся окружности» на случай, когда эти окружности являются прямыми.

Определение 1. Говорят, что прямая и окружность (настоящая) *ортогональны*, если прямая проходит через центр окружности. В этом случае мы будем также говорить, что прямая *диаметрально пересекает* окружность. Две прямые мы будем называть *ортогональными*, если они перпендикулярны.

На евклидово-проективной плоскости возможна единая формулировка: прямая (собственная) и произвольная окружность (конечного или «бесконечного» радиуса) ортогональны, если прямая проходит через центр окружности.

Заметим, что отношение «окружность (или прямая) диаметрально пересекает прямую» мы не определяем. В связи с этим мы принимаем следующее

Соглашение 2. В высказывании «окружность Σ_1 диаметрально пересекает окружность Σ_2» всегда будет неявно предполагаться, что окружность Σ_2 является настоящей окружностью (тогда как окружность Σ_1 может быть и прямой).

Предложение 1. *Множество всех окружностей Σ, ортогональных данной окружности Σ_0, является связкой окружностей.*

Это предложение аналогично предложению 4 п. 2. Однако даже в случае, когда Σ_0 является настоящей окружностью, оно утверждает нечто иное, поскольку теперь окружность Σ может быть и прямой. Поэтому оно и в этом случае нуждается в доказательстве.

Доказательство. Пусть Σ_0 — настоящая окружность. В этом случае следует только проверить, что к собственной связке настоящих окружностей, получающейся в силу предложения

4 п. 2, присоединяется точно то, что нужно, т. е. пучок прямых с центром в центре связки. Но это ясно, поскольку согласно предложению 6 п. 2 центром этой связки является центр окружности Σ_0, а согласно определению 1 прямая тогда и только тогда ортогональна окружности Σ_0, когда она проходит через ее центр. Следовательно, предложение 1 в этом случае справедливо.

Пусть окружность Σ_0 является прямой λ. Тогда множество всех окружностей, ортогональных окружности Σ_0, является (предложение 1 п. 2) несобственной связкой (с фундаментальной прямой λ), пополненной (определение 1) всеми прямыми, перпендикулярными прямой λ. Следовательно, предложение 1 справедливо и в этом случае.

Таким образом, мы видим, что предложение 1 объединяет в единой формулировке два ранее никак не связанных предложения: предложение 1 п. 2 и предложение 4 п. 2.

Кроме того, поскольку в зависимости от вида окружности Σ_0 получается либо гиперболическая, либо несобственная связка, мы видим, что *несобственные связки целесообразно причислять к гиперболическим связкам*. В силу этого соглашения каждая гиперболическая связка будет обладать фундаментальной окружностью (которая может оказаться и прямой).

Предложение 2. *Множество всех окружностей, диаметрально пересекающих данную окружность Σ_0, является связкой окружностей.*

Доказательство. В соответствии с соглашением 2 окружность Σ_0 может быть только настоящей окружностью. Но тогда множество всех окружностей, ее диаметрально пересекающих, является (предложение 5 п. 2) собственной связкой настоящих окружностей, пополненной (определение 1) пучком прямых с центром в центре окружности Σ_0, являющемся (предложение 6 п. 2) центром связки.

Предложение 3. *Совокупность всех окружностей, проходящих через данную точку, является связкой окружностей.*

Доказательство. Достаточно заметить, что эта совокупность, кроме пучка прямых с центром в данной точке, содержит еще только настоящие окружности, составляющие (предложения 5 и 6 п. 2) связку с центром в этой точке.

Обратим внимание на то, что предложения 1, 2 и 3 описывают все возможные связки, за исключением несобственной связки всех прямых (которую мы условились считать параболической связкой).

Рассмотрим теперь пучки окружностей.

Следующая теорема (являющаяся аналогом теоремы 1 п. 4) теперь очевидна.

Теорема 1. *Множество всех окружностей,*

а) *диаметрально пересекающих две данные (различные) окружности;*

б) *диаметрально пересекающих данную окружность и проходящих через данную точку;*

в) *диаметрально пересекающих данную окружность и ортогональных другой данной окружности (возможно, совпадающей с первой);*

г) *проходящих через две данные (различные) точки;*

д) *проходящих через данную точку и ортогональных данной окружности;*

е) *ортогональных двум данным (различным) окружностям, является пучком окружностей.*

Любой пучок окружностей может быть получен хотя бы одним из этих способов.

Способ а) дает эллиптический пучок окружностей (вместе с его осью).

Способ б) дает эллиптический пучок окружностей, когда данная точка не является центром данной окружности (в силу соглашения 2 являющейся настоящей окружностью), и собственный пучок прямых в противном случае. На этом основании собственные пучки прямых естественно причислять к эллиптическим пучкам (что согласуется также с теоремой 4 п. 3).

Способ в) (объединяющий способы 3) и 4) теоремы 1 п. 4) дает эллиптический пучок окружностей, если данные окружности различны (причем вторая окружность может при этом быть прямой), и собственный пучок прямых, если эти окружности совпадают.

Способ г) дает эллиптический пучок окружностей.

Способ д) (объединяющий способы 6) и 7) теоремы 1 п. 4) дает параболический пучок окружностей (конечно, вместе с осью), когда данная окружность (могущая быть и прямой) содержит данную точку, эллиптический пучок, когда данная точка не лежит на данной окружности и не является ее центром, и собственный пучок прямых, когда данная окружность является настоящей окружностью, а данная точка совпадает с ее центром.

Способ е) (объединяющий способы 8), 9) и 10) теоремы 1 п. 4) в случае, когда не более одной из данных окружностей является прямой, дает эллиптический пучок окружностей (или собственный пучок прямых), если данные окружности не пересекаются, параболический пучок, если они касаются, и гиперболический пучок, если данные окружности пересекаются. Если же обе данные окружности являются прямыми, то в случае, когда они пересекаются, получается несобственный пучок окружностей (который мы условились причислять к гиперболическим пучкам; см. замечание 2 п. 4), а в случае, когда они параллельны (но не совпадают), — несобственный пучок прямых.

При этом (см. п. 4)

каждым из способов а) — е) *можно получить любой эллиптический пучок окружностей (в частности, любой собственный пучок прямых),* *каждым из способов* д) *или* е) *можно получить любой параболический пучок окружностей.*

способом е) *можно получить любой гиперболический пучок окружностей (в частности, любой несобственный пучок окружностей; см. замечание* 2 п. 4), *а также любой несобственный пучок прямых.*

Интересено отметить, что предложение 3 п. 4 сохраняется и при теперешнем обобщенном понимании окружностей, т. е. имеет место следующее

Предложение 4. *Любая окружность Σ, ортогональная двум окружностям Σ_1 и Σ_2 некоторого пучка, ортогональна и любой окружности этого пучка.*

Задание. Докажите предложение 4 (не забудьте рассмотреть все четыре случая: когда данный пучок является собственным пучком окружностей, когда он является несобственным пучком окружностей, когда он является собственным пучком прямых и, наконец, когда он является несобственным пучком прямых; кроме того, в первом случае следует отдельно рассмотреть возможности, не покрываемые предложением 1 п. 4, т. е. ситуации, когда либо окружность Σ является прямой, либо прямой (и, следовательно, осью данного пучка) является одна из окружностей Σ_1 и Σ_2.

Согласно предложению 4 определение сопряженного пучка (определение 1 п. 4) имеет теперь смысл для любых пучков. При этом

пучком, сопряженным несобственному пучку окружностей, является собственный пучок прямых с тем же центром,

пучком, сопряженным собственному пучку прямых, является несобственный пучок окружностей (имеющий тот же центр).

пучком, сопряженным несобственному пучку прямых, является несобственный пучок прямых, состоящий из прямых, перпендикулярных прямым пучка.

Мы видим, в частности, что всегда

центры сопряженных пучков совпадают.

Чтобы эта формулировка охватывала и несобственные пучки прямых, мы, естественно, должны перейти в евклидово-проективную плоскость.

Выше мы условились собственный пучок прямых считать эллиптическим пучком, а несобственный пучок окружностей — гиперболическим пучком. Мы видим, следовательно, что для этих пучков остается справедливым следствие из предложения 4 п. 4.

Чтобы это следствие осталось справедливым и для несобственных пучков прямых, нужно, очевидно, считать эти пучки параболическими (что, кстати, согласуется и с теоремой 4 п. 3).

6. Окружности на вещественно-комплексной плоскости

Полную законченность и изящество геометрия окружностей приобретает только на *евклидовой вещественно-комплексной плоскости* (точнее, чтобы специально не оговаривать несобственные пучки и связки — на евклидово-проективной вещественно-комплексной плоскости).

В свете сказанного в п. 5 мы принимаем

Определение 1. *Окружностью* (*вещественной*) на евклидовой вещественно-комплексной плоскости называется множество точек, координаты x, y которых в некоторой евклидовой координатной системе удовлетворяют уравнению вида

$$M(x^2+y^2)+Ax+By+C=0, \tag{1}$$

где M, A, B, C — произвольные вещественные числа, причем хотя бы одно из чисел M, A, B не равно нулю (ясно, что это определение корректно, т. е. при переходе к другим евклидовым координатам x', y' мы снова получаем уравнение вида (1), хотя, конечно, с другими коэффициентами).

Окружность (1) мы будем изображать точкой $(A:B:C:-2M)$ расширенного (евклидово-проективного) пространства (таким образом, пространство у нас по-прежнему остается вещественным). Тем самым мы, очевидно, получим биективное соответствие между окружностями на вещественно-комплексной плоскости и всеми точками расширенного пространства, отличными от точки $Z_\infty(0:0:1:0)$.

При $M=0$ окружность (1) является прямой

$$Ax+By+C=0$$

и изображается несобственной точкой $(A:B:C:0)$. При $M\neq 0$ окружность (1) называется *настоящей окружностью* и имеет уравнение

$$x^2+y^2-2ax-2by-2c=0, \tag{2}$$

где

$$a=-\frac{A}{2M},\quad b=-\frac{B}{2M},\quad c=-\frac{C}{2M}.$$

Такая окружность изображается собственной точкой с неоднородными (обычными) координатами (a, b, c). Проекция этой точки на плоскость Oxy, т. е. точка (a, b), называется *центром* окружности (2).

Уравнение (2) может быть переписано в виде

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \tag{3}$$

где

$$R^2=a^2+b^2+2c.$$

При $R^2>0$ мы будем называть окружность (3) *действительной*[1]) *окружностью* или *окружностью вещественного радиуса* R. В пересечении с вещественной плоскостью она дает обычную окружность с центром (a, b) и радиусом R.

Действительные окружности изображаются теми же точками, что и соответствующие обычные окружности, т. е. точками внешней области параболоида Q.

---

[1]) Обратим внимание на различие между понятиями «действительная окружность» и «вещественная окружность».

При $R=0$ мы будем окружность (3) называть *окружностью нулевого радиуса*. Она проходит через ее центр (a, b) (который является ее единственной вещественной точкой) и состоит из двух комплексно-сопряженных прямых

$$x+iy=a+ib, \qquad x-iy=a-ib.$$

Окружности нулевого радиуса изображаются, очевидно, точками, принадлежащими параболоиду Q.

Определение 2. Прямые (собственные), имеющие уравнения вида

$$x \pm iy + C = 0,$$

называются *изотропными*.

Таким образом,

окружность нулевого радиуса является парой комплексно-сопряженных изотропных прямых, проходящих через ее центр.

При $R^2 < 0$ окружность (3) называется *окружностью мнимого радиуса* iR (или просто *мнимой окружностью*).

Каждая такая окружность изображается точками внутренней области параболоида Q.

Никаких вещественных точек окружность мнимого радиуса вообще не имеет (является нулевой линией).

На евклидово-проективной вещественно-комплексной плоскости мы несобственную прямую теперь будем считать окружностью (поскольку причины, по которым мы ее раньше не считали окружностью, теперь отпали). Изображается эта окружность точкой Z_∞.

Замечание 1. Однако, несмотря на то, что точка Z_∞ принадлежит параболоиду Q, мы не будем причислять несобственную прямую к окружностям нулевого радиуса. Считать ее, подобно собственным прямым, «окружностью бесконечного радиуса» также нет оснований. Поэтому никакого «радиуса» (так же как и никакого «центра») мы этой окружности не приписываем.

Степень $\operatorname{ст} M_0$ произвольной точки M_0 относительно (настоящей) окружности (3) определяется так же, как в вещественном случае, т. е. формулой (3) п. 1. По-прежнему,

точка M_0 тогда и только тогда принадлежит окружности (3), *когда ее степень* $\operatorname{ст} M_0$ *равна нулю.*

Степень любой вещественной точки относительно окружности мнимого радиуса всегда положительна, так что каждая точка вещественной плоскости «лежит вне» произвольной такой окружности.

Для окружности нулевого радиуса степень $\operatorname{ст} M_0$ равна квадрату расстояния от точки M_0 до центра этой окружности.

Предложение 1 п. 1, дающее геометрическую интерпретацию степени, конечно, теперь смысла не имеет, хотя его аналог для модуля $|\operatorname{ст} M_0|$ степени остается справедливым.

Упражнение. Сформулируйте и докажите аналог предложения 1 п. 1 для модуля степени (не забудьте, что длина вектора в комплексной плоскости может быть равна нулю, даже если сам вектор не равен нулю).

Замечание 2. Обратим внимание на то, что степень точки относительно окружности «бесконечного радиуса» (т. е. относительно прямой) мы не определяем.

Радикальная ось двух (неконцентрических) настоящих окружностей определяется точно так же, как в вещественном случае, и она по-прежнему является прямой с уравнением (6) п. 1.

Задание. Покажите, что

радикальной осью двух окружностей нулевого радиуса является медиатриса[1]) *их центров.*

Чтобы идти дальше, мы должны предварительно обсудить вопрос о точках пересечения двух различных (настоящих) окружностей

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2a_1x-2b_1y-2c_1=0,\\ x^2+y^2-2a_2x-2b_2y-2c_2=0. \end{aligned} \tag{4}$$

По определению, чтобы найти эти точки, надо решить систему (4) двух уравнений с двумя неизвестными. Вычтя первое уравнение из второго (и разделив получающееся уравнение на —2), мы получим, что эта система равносильна следующей системе:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2a_1x-2b_1y-2c_1=0,\\ (a_2-a_1)x+(b_2-b_1)y+(c_2-c_1)=0. \end{aligned} \tag{5}$$

Мы видим, что при $(a_1, b_1)=(a_2, b_2)$ система (5) решений не имеет (ибо, по условию, $(a_1, b_1, c_1)\neq(a_2, b_2, c_2)$). Следовательно,

концентрические окружности не пересекаются и в евклидовой вещественно-комплексной плоскости.

В однородных координатах $X:Y:Z$ уравнения (5) имеют вид

$$X^2+Y^2-2a_1XZ-2b_1YZ-2c_1Z^2=0,$$
$$(a_2-a_1)X+(b_2-b_1)Y+(c_2-c_1)Z=0$$

и при $(a_1, b_1)=(a_2, b_2)$ сводятся к уравнениям

$$X^2+Y^2=0,$$
$$Z=0,$$

имеющим два решения $(i:1:0)$ и $(-i:1:0)$. Следовательно,

в евклидово-проективной вещественно-комплексной плоскости любые две концентрические окружности пересекаются в двух несобственных комплексно-сопряженных точках $(i:1:0)$ *и* $(-i:1:0)$.

Определение 3. Точки $(i:1:0)$ и $(-i:1:0)$ называются *циклическими точками.*

---

[1]) *Медиатрисой* двух точек M_1 и M_2 называется прямая, проходящая через середину отрезка $\overline{M_1M_2}$ перпендикулярно прямой M_1M_2. Она является множеством всех точек, расстояния которых от точек M_1 и M_2 одинаковы.

Заметим, что если точки имеют координаты $(\pm i : 1 : 0)$ в одной однородной евклидовой координатной системе, то они имеют те же координаты и в любой другой однородной евклидовой координатной системе. Поэтому циклические точки определены корректно.

Задание. Покажите, что

прямая тогда и только тогда изотропна, когда она проходит через циклическую точку.

Для неконцентрических окружностей мы можем из второго уравнения (5) выразить одно неизвестное через другое и, подставив это выражение в первое уравнение, получить для второго неизвестного квадратное уравнение с вещественными коэффициентами.

Случай 1. Это квадратное уравнение имеет два различных вещественных корня.

В этом случае данные окружности имеют две различные вещественные точки пересечения. Ясно, что это возможно только тогда, когда сами окружности действительны, и эти точки будут точками пересечения обыкновенных окружностей, высекаемых данными окружностями на вещественной плоскости.

Случай 2. Квадратное уравнение имеет два различных комплексно-сопряженных корня.

В этом случае данные окружности имеют две различные комплексно-сопряженные точки пересечения. Сами же окружности могут быть при этом любыми (с вещественным, нулевым или мнимым радиусом). Если они действительны, то высекаемые ими на вещественной плоскости обыкновенные окружности не пересекаются.

Случай 3. Квадратное уравнение имеет один двойной (вещественный) корень.

В этом случае данные окружности имеют одну точку пересечения, являющуюся вещественной. Принято говорить, что окружности *касаются* друг друга в этой точке, а их точку пересечения принято называть *точкой касания.* Ни одна из касающихся окружностей не может быть мнимой. Касающиеся действительные окружности высекают на вещественной плоскости обыкновенные окружности, касающиеся друг друга в элементарно-геометрическом («школьном») смысле. Действительная окружность касается окружности нулевого радиуса с центром в точке M_0 тогда и только тогда, когда она проходит через точку M_0 (являющуюся в этом случае точкой касания).

Таким образом,

две настоящие неконцентрические окружности на евклидовой вещественно-комплексной плоскости имеют либо две различные точки пересечения (вещественные или комплексно-сопряженные), либо одну общую точку (точку касания).

Ясно, что на евклидово-проективной плоскости

любая (настоящая) окружность проходит через циклические точки $(i : 1 : 0)$ *и* $(-i : 1 : 0)$.

Поэтому на этой плоскости к указанным выше точкам пересечения двух окружностей добавляются еще две циклические точки.

Замечание 3. Таким образом, на евклидово-проективной вещественно-комплексной плоскости две (неконцентрические) окружности имеют, вообще говоря, четыре точки пересечения: две собственные и две несобственные (циклические). Исключением является случай касающихся окружностей, когда имеется только одна общая собственная точка (точка касания). Чтобы этот случай (по крайней мере, «лингвистически») не представлял исключения, удобно считать точку касания кратной (а именно, *двойной*) точкой пересечения и считать ее дважды. Тогда и в случае касающихся окружностей будет четыре точки пересечения.

Другое исключение представляет собой случай концентрических окружностей, когда имеются только две (циклические) точки пересечения. Чтобы сохранить и в этом случае общий закон, приходится, по определению, считать эти точки *двойными точками пересечения* (т. е. считать, что *концентрические окружности касаются друг друга в циклических точках*[1])).

Приняв эти соглашения, мы, следовательно, можем сказать, что

на евклидово-проективной вещественно-комплексной плоскости любые две различные (настоящие) окружности имеют ровно четыре точки пересечения.

Это утверждение является частным случаем теоремы Безу, которую мы докажем в п. 4 § 2 гл. 6.

Возвращаясь к радикальным осям, заметим, что второе из уравнений (5) является как раз уравнением радикальной оси данных окружностей. Следовательно,

радикальная ось двух окружностей проходит через их точки пересечения.

В случае, когда точки пересечения различны, это полностью характеризует радикальную ось (ср. предложение 2 п. 1).

Пусть точки пересечения совпадают (окружности касаются). Тогда радикальная ось будет иметь с каждой из окружностей только одну общую точку. Условившись называть (ср. конец п. 2 § 1 гл. 1) прямую, имеющую с (настоящей) окружностью только одну общую точку, *касательной* к этой окружности в этой точке (*точке касания*), мы можем, следовательно, сказать, что

радикальной осью двух касающихся окружностей является их общая касательная.

Таким образом, предложение 2 п. 1 сохраняется и в вещественно-комплексной плоскости (только без оговорки, что окружности пересекаются).

Радикальный центр трех (настоящих) окружностей на вещественно-комплексной плоскости определяется дословно так же, как в вещественном случае (определение 3 п. 1). Все его свойства также полностью сохраняются.

---

[1]) Таким образом, концентрические (и только концентрические) окружности касаются друг друга в двух точках!

Определение (*вещественных*, т. е. определяемых уравнениями с вещественными коэффициентами) *пучков* и *связок* окружностей также остается прежним. Все их свойства сохраняются. Однако теперь

каждая параболическая связка содержит, кроме действительных окружностей (и прямых), одну окружность нулевого радиуса (с центром в центре связки).

На евклидово-проективной плоскости несобственная связка всех прямых (которую мы условились считать параболической) пополняется теперь несобственной прямой.

Аналогично,

каждая гиперболическая (собственная) связка содержит, кроме действительных окружностей (и прямых), бесконечно много окружностей нулевого радиуса (с центрами в точках фундаментальной окружности) и бесконечно много окружностей мнимого радиуса (с центрами, лежащими внутри фундаментальной окружности).

Это верно и для несобственной связки окружностей (которую мы условились считать гиперболической) с тем лишь отличием, что центры всех ее окружностей принадлежат фундаментальной прямой.

Что же касается эллиптических связок, то

на евклидовой (или евклидово-проективной) вещественно-комплексной плоскости каждая эллиптическая связка содержит только действительные окружности.

Задание. Докажите эти утверждения.

Таким образом,

для любой собственной связки окружностей на евклидовой вещественно-комплексной плоскости каждая вещественная точка плоскости является центром (единственной) окружности связки.

Определение 4. Две (настоящие) окружности $\Sigma(a_1, b_1, c_1)$ и $\Sigma(a_2, b_2, c_2)$ на вещественно-комплексной плоскости называются *сопряженными*, если

а) они концентричны:

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2),$$

б) выполнено равенство

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1 + c_2 = 0.$$

Окружность, сопряженная главной окружности эллиптической связки, называется *фундаментальной окружностью* этой связки, а окружность, сопряженная фундаментальной окружности гиперболической связки, называется *главной окружностью* связки. Для параболической связки, по определению, главная окружность совпадает с фундаментальной и является окружностью нулевого радиуса с центром в центре связки.

Задание. Покажите, что

окружность, сопряженная с окружностью

а) *вещественного радиуса,*

б) *нулевого радиуса,*

в) *мнимого радиуса,*

является, соответственно, окружностью

а) *мнимого радиуса,*

б) *нулевого радиуса,*

в) *вещественного радиуса.*

Согласно определению 3

каждая собственная связка окружностей на евклидовой вещественно-комплексной плоскости обладает и фундаментальной и главной окружностью.

Для непараболических связок одна из этих окружностей имеет вещественный радиус, а другая — мнимый.

Упражнение. Покажите, что

окружность Σ тогда и только тогда ортогональна окружности Σ_1, когда она диаметрально пересекает сопряженную окружность Σ_2.

Покажите также, что

окружность тогда и только тогда ортогональна некоторой окружности нулевого радиуса, когда она проходит через центр этой окружности.

Сопоставляя эти утверждения с теоремой 2 п. 2, мы немедленно получаем следующую теорему:

Теорема 1. *Произвольная собственная связка окружностей на евклидовой вещественно-комплексной плоскости состоит из всех окружностей, ортогональных фиксированной окружности (фундаментальной окружности связки), а также из всех окружностей, диаметрально пересекающих фиксированную окружность (главную окружность связки).*

Аналогично унифицируется теперь и теория пучков. Мы не будем этого делать во всех деталях и ограничимся следующей теоремой:

Теорема 2. *На евклидовой вещественно-комплексной плоскости любая точка линии центров каждого собственного пучка окружностей является центром единственной настоящей окружности пучка.*

Каждый собственный непараболический пучок окружностей состоит из всех окружностей, проходящих через две различные точки (вещественные, если пучок эллиптический, и комплексно-сопряженные, если пучок гиперболический).

Задание. Докажите теорему 2.

Таким образом, если мы назовем *главными точками* пучка точки, через которые проходят все окружности пучка (ср. определение 7 п. 3), то мы получим, что

собственный пучок окружностей на евклидовой вещественно-комплексной плоскости тогда и только тогда является

а) *эллиптическим пучком,*

б) *параболическим пучком,*

в) *гиперболическим пучком,*

когда он имеет

а) *две главные вещественные точки,*

б) *одну главную вещественную точку (центр пучка),*

в) *две главные комплексно-сопряженные точки.*

Далее, легко видеть, что

для любой окружности Σ *собственного пучка в этом пучке имеется единственная окружность* Σ', *ортогональная окружности* Σ.

Действительно, в канонических координатах окружность Σ (если эта окружность — настоящая) имеет уравнение вида

$$x^2 + y^2 - 2xt + p = 0,$$

где t — некоторый параметр (а p — степень пучка). Условие, что некоторая другая окружность Σ' с уравнением

$$x^2 + y^2 - 2xt' + p = 0$$

ортогональна окружности Σ, имеет вид (см. формулу (9) п. 2)

$$tt' = p. \qquad (6)$$

Следовательно, по любому $t \neq 0$ мы однозначно определяем соответствующее t'.

Если $t = 0$, т. е. окружность Σ является главной окружностью пучка, то ей ортогональна, очевидно, ось пучка. Обратно, если окружность Σ является прямой (и, следовательно, осью пучка), ей ортогональна главная окружность пучка.

Поскольку каждая точка линии центров пучка является центром единственной окружности пучка, мы можем, следовательно, определить некоторое отображение T этой линии в себя, сопоставив произвольной точке M точку $M' = T(M)$, являющуюся центром окружности Σ', принадлежащей пучку и ортогональной окружности Σ, имеющей центр в точке M (и также принадлежащей пучку).

Собственно говоря, это верно только в евклидово-проективной плоскости, поскольку отображение T сопоставляет центру пучка несобственную точку линии центров.

Согласно формуле (6) отображение T переводит точку линии центров, имеющую абсциссу t, в точку с абсциссой

$$t' = \frac{p}{t}. \qquad (7)$$

Мы будем считать, что эта формула определяет отображение T и для комплексных t (не являющихся абсциссами центров пучка).

Формула (7) показывает, что при $p \neq 0$ (т. е. для непараболического пучка) отображение T биективно (на расширенной вещественно-комплексной прямой) и совпадает с обратным отображением T^{-1}. При $p=0$ (для параболического пучка) отображение T переводит всю линию центров в центр пучка.

Определение 5. Биективное отображение, совпадающее со своим обратным, называется *инволюцией.* Отображение, переводящее всю прямую в некоторую ее точку M_0, называется *параболической инволюцией с центром* M_0.

Таким образом, мы можем сказать, что любой пучок окружностей определяет на его линии центров некоторую инволюцию T, параболическую, если пучок параболический.

Точка M называется *неподвижной точкой* инволюции T, если

$$T(M)=M.$$

Точки линии центров собственного пучка, являющиеся неподвижными точками соответствующей инволюции T, называются *фундаментальными точками* этого пучка. Их абсциссы t определяются из уравнения

$$t^2=p. \tag{8}$$

Для гиперболического пучка ($p=e^2$) это уравнение имеет решения $\pm e$. Следовательно, наше теперешнее определение фундаментальных точек совпадает для гиперболических пучков с определением 7 п. 3.

Для параболических пучков ($p=0$) уравнение (8) имеет единственное решение $t=0$, а для эллиптических пучков ($p=-e^2$) — два комплексно-сопряженных чисто мнимых решения $\pm ie$.

Таким образом,

на евклидовой вещественно-комплексной плоскости собственный пучок окружностей тогда и только тогда является

а) *эллиптическим пучком,*

б) *параболическим пучком,*

в) *гиперболическим пучком,*

когда он имеет

а) *две фундаментальные комплексно-сопряженные точки,*

б) *одну фундаментальную вещественную точку (центр пучка),*

в) *две фундаментальные вещественные точки.*

Замечание 3. На этом основании любая (непараболическая) инволюция, имеющая две вещественные неподвижные точки, называется *гиперболической инволюцией*, а инволюция, имеющая две комплексно-сопряженные неподвижные точки (и следовательно, не имеющая вещественных неподвижных точек), называется *эллиптической инволюцией* [1]).

---

[1]) Правду сказать, исторически дело обстояло как раз наоборот. По причинам, которые мы объясним ниже (см. замечание 2 п. 6 § 1 гл. 6), термины «эллиптическая», «параболическая» и «гиперболическая» были первоначально применены к инволюциям и лишь затем перенесены на соответствующие пучки.

Дополнение. Геометрии параболической и гиперболической связок

Зафиксировав на вещественной евклидово-проективной плоскости некоторую параболическую связку с центром O, будем называть «точками» всевозможные точки плоскости, отличные от точки O, и «прямыми» — всевозможные окружности связки, из которых удалена точка O. Очевидная проверка показывает, что справедливо следующее

Предложение 1. *Эти «точки» и «прямые» удовлетворяют (по отношению к теоретико-множественному отношению принадлежности) всем планиметрическим аксиомам* I_1—I_4 *первой группы аксиом Гильберта, а также аксиоме параллельности* V.

Заметим, что это верно только тогда, когда мы принимаем соглашение 1 из п. 5, т. е. считаем прямые, проходящие через точку O, окружностями связки.

Пусть A, B и C — три «коллинеарные» (попарно различные) «точки» (т. е. «точки», принадлежащие одной окружности Σ нашей связки). Мы скажем, что «точка» B расположена *между* «точками» A и C, если на окружности Σ точки B и O *разделяют* точки A и C, т. е. из двух дуг окружности Σ с концами в точках A и C одна содержит точку B, а другая — точку O. В случае, когда окружность Σ является прямой, а точки A и C — собственными точками плоскости, это означает, что точка B принадлежит отрезку $\overline{AC}$, если этот отрезок не содержит точки O, и лежит вне этого отрезка — в противном случае[1]). Легко показывается, что справедливо следующее

Предложение 2. *Для отношения «между» выполнены все аксиомы* II_1 — II_4 *второй группы аксиом Гильберта и аксиома* IV *Дедекинда.*

Задание. Докажите предложение 2.

Из предложения 2, в частности, следует, что в геометрии наших «точек» и «прямых» могут быть определены понятия «отрезка» и «угла».

Естественно ожидать, что предложения 1 и 2 можно дополнить следующим предложением:

Предложение 3. *Для «отрезков» и «углов» можно ввести отношение «конгруэнтность» так, чтобы были выполнены все аксиомы* III_1 — III_6 *третьей группы аксиом Гильберта.*

Это предложение действительно верно, но описание соответствующего отношения конгруэнтности требует понятий, которые мы введем только в гл 7. Поэтому мы его доказывать здесь не будем.

Упражнение. Прочтите определение инверсии относительно окружности (определение 1 п. 1 § 3 гл. 7) и докажите, что предложение 3 будет выполнено, если мы будем считать «отрезки» (или «углы») «конгруэнтными», когда их можно перевести друг в друга некоторой последовательностью инверсий относительно окружностей связки.

Предложения 1, 2, 3 означают, что справедлива следующая

Теорема 1. *Построенная «геометрия параболической связки» является интерпретацией евклидовой геометрии.*

---

[1]) Таким образом, на прямых наше отношение «между» не совпадает с обычным отношением «между».

Замечание 1. Эту теорему можно было бы предугадать (но, конечно, не доказать), заметив, что аналогичное построение для связки всех прямых (на нерасширенной плоскости) приводит к обычной интерпретации евклидовой геометрии (в которой «точки» — это точки, «прямые» — это прямые и т. д.), и приняв во внимание, что связка всех прямых аналогична параболическим связкам окружностей.

Конечно, возможность интерпретировать евклидову геометрию как геометрию параболической связки, возможность сама по себе интересная и полезная (поскольку она позволяет из любой евклидовой теоремы о точках и прямых «бесплатно» получить некоторую теорему о точках и окружностях), большого принципиального значения все же не имеет. Однако она наводит на мысль о возможности построения аналогичных «геометрий гиперболических и эллиптических связок».

В геометрии гиперболической связки «точками» считаются внутренние точки фундаментальной окружности связки, а «прямыми» — дуги окружностей связки, лежащие внутри фундаментальной окружности. Отношение «между» определяется очевидным образом, а отношение «конгруэнтность» — так же, как для геометрии параболической связки (посредством инверсий относительно окружностей связки). Ясно, что в этой геометрии вместо евклидовой аксиомы о параллельных выполнена аксиома Лобачевского. Поэтому естественно ожидать, что справедлива следующая

Теорема 2. *Геометрия гиперболической связки является интерпретацией неевклидовой геометрии Лобачевского.*

Упражнение. Докажите теорему 2.

Замечание 2. В § 3 гл. 7 мы вернемся к теореме 2 с несколько иных позиций и, в частности, полностью ее докажем.

Теорема 2 означает, что геометрия Лобачевского допускает интерпретацию в рамках евклидовой геометрии и, следовательно, непротиворечива (поскольку непротиворечива евклидова геометрия).

Обратим внимание на то, что поскольку неконгруэнтных гиперболических связок существует бесконечно много (они различаются их степенями), существует на самом деле бесконечно много геометрий Лобачевского, различающихся значением некоторого параметра e (называемого *кривизной* геометрии Лобачевского). При $e \to 0$ геометрия Лобачевского переходит в евклидову геометрию.

Поскольку геометрия Лобачевского интерпретируется в гиперболической связке окружностей, она часто называется *гиперболической геометрией.* По аналогичным соображениям, евклидова геометрия называется *параболической геометрией.*

Возможна, конечно, и *эллиптическая геометрия*, интерпретируемая в эллиптической связке окружностей. Эта геометрия была впервые построена Риманом и потому называется *неевклидовой геометрией Римана.* В этой геометрии параллельных прямых нет (любые две прямые пересекаются). Она может быть проинтерпретирована на расширенной (проективной) плоскости.