Глава 5

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ЛИНИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

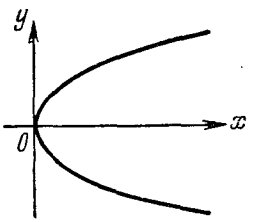
В этом параграфе все координаты x, y предполагаются прямоугольными.

1. Параболы

Определение 1. *Параболой* называется линия, имеющая в некоторой системе прямоугольных координат x, y уравнение

$$y^2 = 2px, \tag{1}$$

где $p > 0$. Уравнение (1) называется *каноническим уравнением* параболы, а координаты, в которых парабола имеет такое уравнение, — *каноническими координатами.*



Замечание 1. Из школьного курса читателю должно быть известно определение параболы как *графика квадратного трехчлена*:

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{2}$$

Легко видеть, что переносом начала координат, переименованием координат и, если нужно, изменением знака одной из координат любое уравнение (2) можно привести к виду (1). Следовательно, наше определение совпадает со школьным.

Задание. Докажите последнее утверждение.

Поскольку уравнение (1) не меняется при замене y на $-y$, то вместе с некоторой точкой (x, y) парабола (1) содержит и точку $(x, -y)$, симметричную точке (x, y) относительно оси абсцисс. Это означает, что

ось абсцисс канонической системы координат является осью симметрии параболы.

Поскольку парабола (1) симметрична относительно оси абсцисс, нам достаточно исследовать только ее «верхнюю половину»

$$y = \sqrt{2px} \tag{2}$$

(имеется в виду «арифметический квадратный корень»). Из теории элементарных функций известно, что функция (2) является монотонно возрастающей функцией переменной x и стремится к ∞ при $x \to \infty$. Геометрически это означает, что чем дальше мы будем удаляться вправо в положительном направлении оси Ox, тем выше будет подниматься парабола и при достаточном удалении поднимется сколь угодно высоко.

Однако парабола поднимается вверх довольно «медленно», во всяком случае «медленнее» любой прямой (т. е. функция (2) возрастает медленнее любой линейной функции $y = ax + b$). Действительно, прямая, проходящая через точку $(0, 0)$ и произвольную точку (x, y) параболы (1) (точнее, ее верхней половины (2)), имеет угловой коэффициент

$$k = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2p}}{\sqrt{x}},$$

монотонно стремящийся к нулю при $x \to \infty$. Это показывает (ввиду симметричности параболы), что

какой бы угол, охватывающий положительную полуось оси абсцисс мы ни взяли, все достаточно далекие (т. е. имеющие достаточно большую абсциссу) точки параболы будут лежать в этом угле.

Таким образом, если смотреть вдоль положительной полуоси оси абсцисс, то парабола будет казаться сходящейся!

Теперь легко видеть, что

ось Ox является единственной осью симметрии параболы (1).

Действительно, оси симметрии, параллельной оси Ox (но не совпадающей с этой осью), существовать не может, потому что иначе на оси Oy, кроме точки $(0, 0)$, была бы и другая (симметричная ей) точка, что невозможно (ибо согласно уравнению (1) при $x = 0$ обязательно $y = 0$). Пусть существует ось симметрии λ, не параллельная оси Ox. Рассмотрим достаточно малый угол, охватывающий положительную полуось оси Ox. При симметрии относительно прямой λ этот угол перейдет в некоторый другой угол, охватывающий полуось, симметричную полуоси оси Ox. Поскольку все достаточно далекие точки параболы содержатся в первом угле, они должны содержаться и во втором угле. Но при достаточной малости угла это, очевидно, невозможно.

Определение 2. Ось симметрии параболы (по доказанному — единственная) называется ее *осью*.

Предложение 1. *С точностью до изменения ориентации оси ординат каноническая система координат однозначно определена параболой.*

Доказательство. Осью абсцисс канонической системы является ось параболы, началом координат канонической системы — *вершина* параболы (точка пересечения ее с осью

симметрии[1])), а ориентацией оси абсцисс — ориентация, по отношению к которой парабола расположена в положительной полуплоскости $x \geqslant 0$. Таким образом, единственным элементом произвола, остающимся в канонической системе, является ориентация ее оси ординат.

Из предложения 1 вытекает, что все понятия и конструкции, использующие каноническую систему координат и не зависящие от ориентации ее оси ординат, инвариантно связаны с параболой (однозначно ею определены). В частности, это верно для числа p, точки $(p/2, 0)$ и прямой $x = -p/2$.

Определение 3. Число p называется *фокальным параметром* параболы, а число $p/2$ — ее *фокусным расстоянием*. Точка $(p/2, 0)$ называется *фокусом* параболы, а прямая $x = -p/2$ — ее *директрисой*.

Ясно, что

параметр p параболы равен расстоянию ее фокуса до ее директрисы, а фокусное расстояние $p/2$ равно расстоянию от ее фокуса до вершины параболы.

На прямой, проходящей через фокус параболы перпендикулярно оси (т. е. параллельно директрисе), парабола высекает некоторый отрезок, называемый *фокальной хордой* параболы. Ординаты концов фокальной хорды определяются, очевидно, из уравнения

$$y^2 = 2p \cdot \frac{p}{2},$$

т. е. равны $\pm p$. Следовательно,

длина фокальной хорды параболы равна $2p$.

Простое геометрическое описание параболы дается следующим предложением:

Предложение 2. *Парабола является геометрическим местом точек, равноудаленных от директрисы и фокуса.*

Задание. Докажите предложение 2.

Указание: расстояние δ_M произвольной точки плоскости $M(x, y)$ до директрисы $x = -p/2$ выражается формулой

$$\delta_M = \left| x + \frac{p}{2} \right|,$$

а ее расстояние r_M до фокуса — формулой

$$r_M = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

В связи с предложением 2 необходимо заметить, что

любая прямая и любая не принадлежащая ей точка являются директрисой и фокусом некоторой (однозначно определенной) параболы.

[1]) Вообще, *вершиной* произвольной линии, имеющей ось симметрии, называется точка ее пересечения с этой осью.

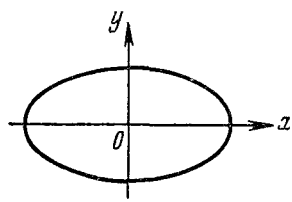
Действительно, пусть p — расстояние между данной точкой и данной прямой. Рассмотрим координатную систему, осью абсцисс которой является прямая, перпендикулярная данной прямой и проходящая через данную точку, а началом координат — середина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую. Пусть ориентация оси абсцисс выбрана так, что данная точка имеет положительную абсциссу. Ориентацию оси ординат мы выберем произвольно. В этой координатной системе данная прямая имеет уравнение $x = -p/2$, а данная точка — координаты $(p/2, 0)$. Поэтому эти прямая и точка являются, соответственно, директрисой и фокусом параболы, задаваемой в построенной координатной системе уравнением

$$y^2 = 2px.$$

2. Эллипсы

Определение 1. *Эллипсом* называется линия, выражающаяся в некоторой системе прямоугольных координат уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (1)$$



где $a \geqslant b > 0$.

Система координат, в которой эллипс имеет уравнение (1), называется *канонической* (для этого эллипса), а уравнение (1) называется *каноническим уравнением* эллипса.

При $a = b$ уравнение (1) является уравнением окружности радиуса a с центром в точке $(0, 0)$. Таким образом,

окружность является частным случаем эллипса.

Ясно, что любая точка с координатами вида

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta, \\ y &= b\sin\theta, \end{aligned} \qquad -\pi < \theta \leqslant \pi, \qquad (2)$$

удовлетворяет уравнению (1), и обратно, координаты любой точки, удовлетворяющей уравнению (1), могут быть (единственным образом) представлены в виде (2). Это означает, что

уравнения (2) *являются параметрическими уравнениями эллипса* (1).

Пользуясь уравнениями (2), можно без труда с любой степенью точности начертить эллипс (для данных a и b) или хотя бы составить представление о его виде. Для этого нужно выбрать достаточно много значений θ, вычислить для этих значений по формулам (2) соответствующие координаты x, y и затем соединить найденные точки плавной кривой.

Иным способом представление о форме эллипса (а также все его свойства) можно получить, если ввести в рассмотрение преобразование плоскости,

переводящее произвольную точку $M(x, y)$ в точку $M'(x', y')$ с координатами

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= ky, \end{aligned} \tag{3}$$

где k — некоторое положительное число. Это преобразование называется *сжатием* плоскости к оси Ox с коэффициентом k. (Конечно, настоящим «сжатием» оно является только при $k < 1$.)

Если точка $M(x, y)$ принадлежит окружности

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

то, поскольку

$$x = x',$$
$$y = \frac{y'}{k},$$

точка $M'(x', y')$ будет удовлетворять соотношению

$$(x')^2 + \left(\frac{y'}{k}\right)^2 = R^2,$$

т. е. будет принадлежать эллипсу

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{(kR)^2} = 1.$$

Это показывает, что

эллипс (1) *является результатом сжатия к оси Ox окружности*

$$x^2 + y^2 = a^2$$

с коэффициентом $k = \frac{b}{a} \leqslant 1$.

Замечание 1. Уравнения (2) не являются, конечно, единственно возможными параметрическими уравнениями эллипса. Например, переходя от параметра θ к параметру

$$t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

мы немедленно получим, что

эллипс (1) *может быть задан параметрическими уравнениями вида*

$$\begin{aligned} x &= a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y &= b\frac{2t}{1+t^2}, \end{aligned} \qquad -\infty < t < +\infty.$$

Обратим внимание на то, что, таким образом, *любой эллипс может быть параметризован рационально*, т. е. для него существуют параметрические уравнения, правые части которых являются рациональными функциями параметра.

Заметим, что парабола $y^2 = 2px$ также допускает очевидную рациональную параметризацию:

$$x = 2pt^2,$$
$$y = 2pt.$$

Уравнения (2) показывают, что координаты любой точки (x, y) эллипса (1) удовлетворяют неравенствам

$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b. \tag{4}$$

Эти неравенства определяют на плоскости прямоугольник со сторонами длины $2a$ и $2b$, параллельными осям координат, и с центром в начале координат $(0, 0)$.

Определение 2. Прямоугольник (4) называется *основным прямоугольником* эллипса (1).

Как уже было сказано, эллипс (1) целиком содержится в прямоугольнике (4). При этом каждая сторона этого прямоугольника содержит одну (и только одну) точку эллипса. Именно,

сторона $x = a$, $-b \leqslant y \leqslant b$ содержит точку $(a, 0)$,
сторона $x = -a$, $-b \leqslant y \leqslant b$ содержит точку $(-a, 0)$.
сторона $-a \leqslant x \leqslant a$, $y = b$ содержит точку $(0, b)$,
сторона $-a \leqslant x \leqslant a$, $y = -b$ содержит точку $(0, -b)$.

Это означает, что

эллипс (1) *вписан в свой основной прямоугольник* (4).

Так как уравнение эллипса не меняется при замене x на $-x$ или y на $-y$, то

координатные оси канонической системы координат являются осями симметрии эллипса, а следовательно, начало координат — (единственным) центром симметрии эллипса.

Задание. Докажите, что ограниченная фигура (т. е. фигура, помещающаяся в некотором прямоугольнике) не может иметь более одного центра симметрии.

При $a = b$, т. е. для эллипса, являющегося окружностью, любая прямая, проходящая через его центр симметрии $(0, 0)$, является осью симметрии. Напротив, легко видеть, что

при $a > b$, т. е. для эллипса, не являющегося окружностью, координатные оси канонической системы координат являются его единственными осями симметрии.

Действительно, ясно, что любая ось симметрии фигуры, обладающей единственным центром симметрии, проходит через этот центр.

Следовательно, если эллипс (1) обладает осью симметрии, отличной от координатных осей, то уравнение этой оси имеет вид

$$y = kx, \qquad k \neq 0. \tag{5}$$

Но легко видеть, что симметрия относительно прямой (5) любую точку $M(x, y)$ переводит в точку $M'(x', y')$ с координатами

$$x' = \frac{(1 - k^2)\,x + 2ky}{1 + k^2}, \quad y' = \frac{2kx - (1 - k^2)\,y}{1 + k^2}.$$

Задание. Выведите эти формулы.

В частности, точка $A(a, 0)$ при симметрии относительно прямой (5) переходит в точку $A'(a', b')$ с координатами

$$a' = \frac{1-k^2}{1+k^2}a, \quad b' = \frac{2k}{1+k^2}a.$$

Если прямая (5) является осью симметрии эллипса (1), то, поскольку точка A принадлежит этому эллипсу, точка A' также ему принадлежит, т. е.

$$\frac{(a')^2}{a^2} + \frac{(b')^2}{b^2} = 1,$$

и следовательно,

$$\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2 + \left(\frac{2k}{1+k^2}\right)^2 \frac{a^2}{b^2} = 1.$$

Поскольку

$$1 - \left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2 = \left(\frac{2k}{1+k^2}\right)^2 \neq 0$$

и поскольку, по условию, $a \geqslant b > 0$, тем самым доказано, что, вопреки предположению, $a = b$.

Задание. Докажите аналогичным образом отсутствие у параболы $y^2 = 2px$ осей симметрии, отличных от оси Ox (см. п. 1).

Доказанное утверждение означает, что координатные оси канонических координат однозначно характеризуются (при $a > b$) как оси симметрии эллипса. При этом ось Ox характеризуется как ось симметрии, на которой эллипс высекает отрезок, больший, чем отрезок, высекаемый эллипсом на другой оси (первый отрезок имеет длину $2a$, а другой — длину $2b$).

Следовательно, справедливо

Предложение 1. *С точностью до изменения ориентации координатных осей каноническая система координат однозначно определена эллипсом (не являющимся окружностью).*

Для эллипса, являющегося окружностью, канонической системой может служить произвольная система прямоугольных координат, начало которой совпадает с центром этой окружности.

Ввиду единственности канонической системы координат, все понятия и конструкции, использующие каноническую систему и не зависящие от ориентации ее осей, инвариантно связаны с эллипсом. В частности, это верно для основного прямоугольника (4) и чисел a, b, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $e = \frac{c}{a}$ и $p = \frac{b^2}{a}$.

Определение 3. Числа a и b называются соответственно *большой полуосью* и *малой полуосью* эллипса[1]), число $c =$

[1]) Таким образом, эти «полуоси» являются числами!

$=\sqrt{a^2-b^2}$ называется *линейным эксцентриситетом* эллипса, число $2c$ называется *фокусным расстоянием* эллипса, число

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

называется (*числовым*) *эксцентриситетом* эллипса, число

$$p=\frac{b^2}{a}$$

называется *фокальным параметром* эллипса.

Для окружности

$$a=b, \quad c=0, \quad e=0, \quad p=a.$$

С эллипсом инвариантно связаны также его центр симметрии $(0, 0)$ (называемый обычно просто *центром* эллипса), а при $a>b$ — его оси симметрии Ox и Oy (называемые обычно просто *осями* эллипса: ось Ox — *большой*, а ось Oy — *малой*) и четыре точки пересечения $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ эллипса с его осями (*вершины* эллипса). Точки

$$(c, 0) \quad \text{и} \quad (-c, 0)$$

большой оси тоже инвариантно определены эллипсом и называются его *фокусами* (фокус $(c, 0)$ — *правым*, а фокус $(-c, 0)$ — *левым*; заметим, что различение левого и правого фокусов уже не инвариантно: оно зависит от выбора ориентации оси Ox).

Термин «фокусное расстояние» для числа $2c$ объясняется тем, что это число, очевидно, равно расстоянию между фокусами.

Большая ось эллипса содержит его фокусы и потому иногда называется его *фокальной осью*.

Так как $0<b\leqslant a$, то

$$0\leqslant c<a \quad \text{и} \quad 0\leqslant e<1,$$

причем $c=0$ (т. е. $e=0$) тогда и только тогда, когда $a=b$, т. е. когда эллипс является окружностью. Таким образом, во-первых,

для эллипса, не являющегося окружностью, фокусы не совпадают друг с другом и отличны от его центра, тогда как для окружности фокусы совпадают с ее центром.

Во-вторых,

эксцентриситет e эллипса является неотрицательным числом, меньшим единицы:

$$0\leqslant e<1,$$

равным нулю тогда и только тогда, когда эллипс является окружностью.

Отрезки, высекаемые эллипсом на прямых, проходящих через фокусы эллипса перпендикулярно оси абсцисс канонической системы координат, называются *фокальными хордами* эллипса. Поскольку при симметрии относительно оси ординат фокальные хорды переходят друг в друга, они имеют одну и ту же длину.

Задание. Докажите, что длина фокальной хорды эллипса равна $2p$.

Для любой точки $M(x, y)$ эллипса длины отрезков, соединяющих ее с фокусами эллипса, называются *фокальными радиусами* этой точки (соответственно — *правым* и *левым*). Иногда «фокальными радиусами» называются сами эти отрезки.

Для точки окружности имеется только один фокальный радиус, совпадающий с ее радиусом.

По определению, левый фокальный радиус r_1 точки $M(x, y)$ эллипса выражается формулой

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Следовательно,

$$r_1 = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2cx + c^2 + b^2} =$$

$$= \sqrt{e^2x^2 + 2aex + a^2} = |a + ex|,$$

и потому

$$r_1 = a + ex, \tag{6}$$

ибо $|ex| = e|x| \leqslant ea < a$.

Аналогично, для правого фокального радиуса r_2 получается, что

$$r_2 = a - ex. \tag{7}$$

Из этих формул непосредственно вытекает, что для любой точки эллипса

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Обратно, пусть $M(x, y)$ — такая точка плоскости, что сумма ее расстояний от фокусов эллипса равна $2a$, т. е. такая, что

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

«Уединяя радикалы» и дважды возводя в квадрат, мы, как легко видеть, получим уравнение

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

равносильное, очевидно, уравнению эллипса (1) (ибо, по определению, $a^2 - c^2 = b^2$). Тем самым доказано, что

точка $M(x, y)$ тогда и только тогда принадлежит эллипсу (1), *когда сумма ее расстояний от фокусов эллипса равна* $2a$.

Это означает, что справедливо следующее

Предложение 2. *Любой эллипс является геометрическим местом точек, сумма расстояний которых от двух данных точек (фокусов эллипса) постоянна (равна длине большой оси эллипса).*

В частности, мы видим, что

эллипс однозначно определен, когда известны его фокусы и его большая полуось a.

При этом ясно, что

для любых двух точек и любого числа a, большего половины расстояния между этими точками, существует (единственный) эллипс, фокусами которого являются данные точки, а большая полуось равна a.

Действительно, если данные точки совпадают, то искомым эллипсом является окружность радиуса a с центром в этих совпадающих точках. Пусть данные точки различны. Рассмотрим систему прямоугольных координат x, y, осью абсцисс которой является прямая, проходящая через данные точки, а осью ординат — их медиатриса. В этой координатной системе данные точки имеют координаты $(-c, 0)$ и $(c, 0)$, где c — половина расстояния между ними, и потому являются фокусами эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=a^2-c^2$. Для завершения доказательства остается заметить, что большой полуосью этого эллипса является, очевидно, число a.

Замечание 2. Обратим внимание на то, что предложение, обратное предложению 2, требует очевидных оговорок: геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек (находящихся друг от друга на расстоянии $2c$) равна данному числу $2a$, является эллипсом только при $a>c$ (если $a=c$, то геометрическое место представляет собой отрезок, а если $a<c$, то — пустое множество).

Определение 4. Для любого эллипса, не являющегося окружностью, прямые

$$x=-\frac{a}{e} \quad \text{и} \quad x=\frac{a}{e},$$

называются его *директрисами* (соответственно *левой* и *правой*).

Директрисы инвариантно связаны с эллипсом, но различение правой и левой директрис зависит от ориентации оси абсцисс канонической системы координат.

Замечание 3. На евклидово-проективной плоскости директрисы имеют (в однородных координатах $X:Y:Z=x:y:1$) уравнения

$$eX-aZ=0 \quad \text{и} \quad eX+aZ=0.$$

При $e = 0$ эти уравнения превращаются в уравнение $Z = 0$ несобственной прямой. На этом основании *целесообразно считать, что окружность имеет одну «двойную директрису» — несобственную прямую.*

Наглядно (на евклидовой плоскости) это отражается в том, что если эллипс изменяется так, что его большая полуось a остается неизменной, а эксцентриситет e стремится к нулю (т. е., другими словами, если эллипс приближается к окружности $x^2 + y^2 = a^2$), то его директрисы неограниченно удаляются от оси ординат.

Фокус и директриса называются *одноименными*, если они оба — правые или оба — левые. Ясно, что это отношение между фокусом и директрисой геометрически инвариантно.

Расстояние d фокуса до одноименной директрисы выражается, очевидно, формулой

$$d = \frac{a}{e} - c.$$

Поскольку

$$\frac{a}{e} - c = a\left(\frac{1}{e} - e\right) = a\,\frac{1 - e^2}{e} = \frac{1}{e}\,\frac{b^2}{a} = \frac{p}{e},$$

тем самым доказано, что

$$d = \frac{p}{e}. \tag{8}$$

Поскольку для любой точки $M(x, y)$ эллипса $|x| \leqslant a$, а $e < 1$, то весь эллипс расположен в полосе между директрисами $x = \pm\frac{a}{e}$. Поэтому расстояние δ_1 точки $M(x, y)$ эллипса до левой директрисы $x = -\frac{a}{e}$ выражается формулой

$$\delta_1 = \frac{a}{e} + x,$$

а расстояние δ_2 до правой директрисы $x = \frac{a}{e}$ — формулой

$$\delta_2 = \frac{a}{e} - x.$$

Сравнив эти формулы с формулами (6) и (7) для фокальных радиусов r_1 и r_2 точки $M(x, y)$, мы немедленно получим, что для любой точки эллипса

$$\frac{r_1}{\delta_1} = \frac{r_2}{\delta_2} = e.$$

Обратно, пусть $M(x, y)$ — такая точка плоскости, что, скажем, отношение ее расстояния от левого фокуса эллипса к ее расстоянию от левой директрисы эллипса равно e, т. е. такая, что

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = e\left|\frac{a}{e} + x\right|.$$

Тогда $(x+c)^2+y^2=(a+ex)^2$, т. е.

$$x^2+2cx+c^2+y^2=a^2+2aex+e^2x^2$$

или

$$(1-e^2)x^2+y^2=a^2-e^2.$$

Поскольку последнее уравнение равносильно, очевидно, уравнению эллипса (1), тем самым доказано, что

точка $M(x, y)$ тогда и только тогда принадлежит эллипсу (1) (*не являющемуся окружностью*), *когда отношение ее расстояния от левого фокуса эллипса к ее расстоянию от левой директрисы эллипса равно эксцентриситету e эллипса.*

Так как эллипс симметричен относительно оси Oy, то аналогичное утверждение верно и по отношению к правым фокусу и директрисе.

Таким образом, нами доказано следующее

Предложение 3. *Любой эллипс* (*не являющийся окружностью*) *представляет собой геометрическое место точек, отношения расстояний которых от данной точки* (*фокуса эллипса*) *и от данной прямой* (*одноименной с фокусом директрисы*) *равны данному положительному числу, меньшему единицы* (*эксцентриситету эллипса*).

В частности, мы видим, что

эллипс однозначно определен, если известны его фокус, одноименная с этим фокусом директриса и его эксцентриситет.

При этом

для любой точки, любой не содержащей эту точку прямой и любого положительного числа e, меньшего единицы, существует (*единственный*) *эллипс с эксцентриситетом e, для которого данная точка является фокусом, а данная прямая — одноименной с этим фокусом директрисой.*

Задание. Докажите это утверждение.

Замечание 4. Предложение 3 аналогично предложению 2 п. 1 и переходит в него при $e=1$. Поэтому целесообразно считать, что

эксцентриситет e параболы равен единице.

Это согласуется также с формулой (8), поскольку для параболы расстояние d равно фокальному параметру p.

Замеченное сходство между эллипсом и параболой можно выявить и по-другому, рассмотрев уравнение эллипса в системе координат x', y', получающейся из канонической системы переносом начала в левую вершину $(-a, 0)$ эллипса. Канонические координаты x, y выражаются через эти координаты по формулам

$$x=x'-a,$$
$$y=y'.$$

Поэтому уравнение эллипса в координатах x', y' имеет вид

$$\frac{(x'-a)^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1.$$

Отбросив штрихи и раскрыв скобки, мы немедленно получим отсюда уравнение

$$y^2=2px+qx^2, \tag{9}$$

где

$$q=-\frac{b^2}{a^2}=e^2-1.$$

Тем самым мы доказали, что

в указанной системе прямоугольных координат эллипс выражается уравнением (9), *где* $-1\leqslant q<0$.

Уравнение (9) называется уравнением эллипса «при вершине».

При $q=0$, т. е. при $e=1$, уравнение (9) переходит в каноническое уравнение параболы. Это еще раз оправдывает представление о параболе как о линии, эксцентриситет которой равен единице.

Замечание 5. Пусть эллипс (9) меняется так, что его фокальный параметр p остается неизменным, а величина q стремится к нулю (т. е. эксцентриситет e стремится к единице). Тогда эллипс будет неограниченно вытягиваться в положительном направлении оси Ox и в пределе даст параболу $y^2=2px$. В этом смысле парабола является предельным положением эллипса при $e\to 1$ (и p постоянном).

Замечание 6. Легко видеть, что

при $q<-1$ *уравнение* (9) *также является уравнением некоторого эллипса с вершиной в начале координат.*

Действительно, в координатах x', y', связанных с координатами x, y соотношениями

$$x=y'-\frac{p}{q},$$
$$y=x',$$

линия (9) имеет уравнение

$$x'^2=2p\left(y'-\frac{p}{q}\right)+q\left(y'-\frac{p}{q}\right)^2,$$

т. е. уравнение

$$x'^2=qy'^2-\frac{p^2}{q}.$$

Отбрасывая штрихи и полагая

$$a^2=-\frac{p^2}{q},\quad b^2=\frac{p^2}{q^2}$$

(напомним, что, по условию, $q < -1$), мы получим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(это, действительно, каноническое уравнение, поскольку $a > b$). Фокальный параметр этого эллипса равен $\frac{p}{\sqrt{-q}}$, а его эксцентриситет равен $\sqrt{1 + \frac{1}{q}}$.

Отличие случая $q < -1$ от случая $-1 \leqslant q < 0$ состоит в том, что во втором случае эллипс «как и полагается» вытянут в горизонтальном направлении, тогда как в первом случае он вытянут в вертикальном направлении.

Заметим еще, что при $q = -1$ мы получаем окружность

$$y^2 = 2px - x^2$$

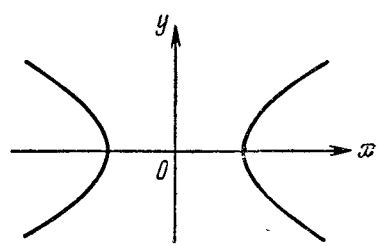
радиуса p с центром в точке $(p, 0)$.

3. Гиперболы

Определение 1. *Гиперболой* называется линия, выражающаяся в некоторой системе прямоугольных координат уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (1)$$

где $a > 0$, $b > 0$.



Система координат, в которой гипербола имеет уравнение (1), называется *канонической* (для этой гиперболы), а уравнение (1) называется *каноническим уравнением* гиперболы.

Частным случаем гиперболы является линия с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

т. е. с уравнением

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (2)$$

Эта линия называется *равнобочной гиперболой.*

В координатах x', y', связанных с каноническими координатами x, y соотношениями

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y),$$

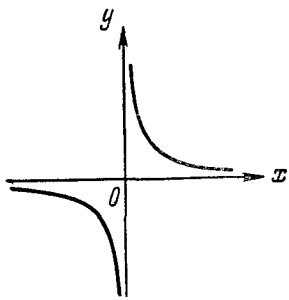
$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$$

(для этих координат оси Ox' и Oy' получаются поворотом по часовой стрелке осей Ox и Oy на $\pi/4$, т. е. являются биссектрисами координатных углов), равнобочная гипербола выражается уравнением

$$x'y' = \frac{a^2}{2},$$

т. е. представляет собой известный из школьного курса график обратной пропорциональности.

Напомним основные факты об этом графике. Для упрощения формул мы уберем у обозначений координат штрихи и положим $A = \frac{a^2}{2}$. Таким образом, речь у нас будет идти о графике функции



$$y = \frac{A}{x}, \qquad A > 0. \tag{3}$$

Так как $y > 0$ при $x > 0$ и $y < 0$ при $x < 0$, то

график функции (3) *расположен в первом и третьем квадрантах.*

При этом на оси ординат Oy нет ни одной точки графика, так что эта ось отделяет часть графика, расположенную в первом квадранте, от его части, расположенной в третьем квадранте. Эти две отдельные части графика называются его *ветвями.*

Поскольку уравнение $xy = A$ не меняется при одновременном изменении знаков у x и y, то

график функции (3) *симметричен относительно начала координат,*

а поскольку это уравнение не меняется и при перестановке координат, то

график функции (3) *симметричен относительно биссектрис координатных углов.*

При этом, при симметрии относительно биссектрисы второго и четвертого координатных углов ветви графика переходят друг в друга, а при симметрии относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов каждая ветвь графика переходит в себя. Таким образом,

каждая ветвь графика функции (3) *симметрична относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.*

Определение 2. Пусть Г — произвольная линия и α — некоторая прямая. Предположим, что линия Г имеет часть, «уходящую в бесконечность» (т. е. такую, что, двигаясь по этой части линии, точка $M(x, y)$ неограниченно удаляется от начала координат [1])), и что расстояние точки $M(x, y)$ от прямой α

[1]) Строгое описание такого поведения кривой требует рассмотрения ее параметрических уравнений. Мы это предоставим сделать читателю.

стремится при этом к нулю. В этой ситуации прямая α называется *асимптотой* линии Г. Пусть M_0 — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую α. Когда точка M удаляется по рассматриваемой части линии Г в бесконечность, точка M_0 также удаляется в бесконечность, двигаясь по прямой α в определенном направлении (хотя, вообще говоря, и не монотонно). Говорят, что прямая α является асимптотой линии Г *в этом направлении.*

Способы разыскания асимптот (когда они существуют) излагаются в курсе анализа. Мы ограничимся лишь случаем, когда асимптотой является ось абсцисс Ox и когда рассматриваемая линия является графиком некоторой функции $y = f(x)$. Так как расстояние от произвольной точки $(x, f(x))$ этого графика до оси Ox равно, очевидно, $|f(x)|$, то утверждение, что ось Ox является в положительном направлении асимптотой графика $y = f(x)$, равносильно утверждению, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Для интересующей нас функции $y = \frac{A}{x}$ дело обстоит именно так: $y \to 0$ при $x \to +\infty$. Следовательно,

ось абсцисс является асимптотой графика функции (3) *в положительном направлении.*

В силу указанных выше свойств симметрии графика отсюда следует, что

ось абсцисс является асимптотой графика функции (3) *и в отрицательном направлении,*

а также, что

ось ординат тоже является асимптотой графика функции (3) (*как в положительном, так и в отрицательном направлениях*).

Более точно,

оси абсцисс и ординат являются в положительных направлениях асимптотами ветви графика, расположенной в первом квадранте, а в отрицательных направлениях — асимптотами ветви, расположенной в третьем квадранте.

Поскольку график функции (3) «уходит в бесконечность» только при $x \to \pm\infty$ и $x \to 0$,

никаких других асимптот этот график не имеет.

Возвращаясь к равнобочной гиперболе

$$x^2 - y^2 = a^2 \tag{2}$$

и учитывая, что при повороте на $\pi/2$ координатные оси переходят в биссектрисы координатных углов и наоборот, мы получаем, во-первых, что

оси координат являются осями симметрии равнобочной гиперболы (2), *а начало координат — ее центром симметрии,*

и, во-вторых, что

равнобочная гипербола (2) *имеет две* (*и только две*) *асимптоты, являющиеся биссектрисами координатных углов.*

Кроме того,

гипербола (2) *целиком помещается в двух вертикальных углах, образованных этими биссектрисами и содержащими ось абсцисс.*

Часть гиперболы, содержащаяся в правом вертикальном угле, называется *правой ветвью*, а содержащаяся в левом — *левой ветвью.* (Конечно, различение правой и левой ветви зависит от ориентации оси абсцисс.)

Поскольку уравнение (2) может быть переписано в виде

$$x^2 = a^2 + y^2,$$

абсцисса любой точки гиперболы удовлетворяет неравенству

$$|x| \geqslant a,$$

причем равенство возможно только при $y = 0$.

Таким образом,

равнобочная гипербола пересекает ось абсцисс в точках $(\pm a, 0)$, *причем ее правая ветвь расположена справа от прямой* $x = a$, *а левая — слева от прямой* $x = -a$.

В частности,

в полосе $-a < x < a$ *нет ни одной точки гиперболы.*

Все сказанное доставляет нам уже довольно определенное представление о форме равнобочной гиперболы.

С другой стороны, легко видеть, что

произвольная гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

получается из равнобочной гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{2}$$

сжатием к оси Ox *с коэффициентом* $k = \frac{b}{a}$.

Действительно, при сжатии к оси Ox в отношении k каждая точка (x, y) плоскости получается из точки $(x, y/k)$. Поэтому в результате сжатия линия с уравнением (2) переходит в линию с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(ka)^2} = 1,$$

т. е. $\left(\text{при } k = \frac{b}{a}\right)$ — в гиперболу (1).

Тем самым мы получаем вполне удовлетворительное представление о форме и произвольной гиперболы.

В частности, мы видим, что

гипербола (1) *имеет две* (*и только две*) *асимптоты, выражающиеся уравнениями*

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Действительно, мы знаем, что асимптотами равнобочной гиперболы (2) являются биссектрисы координатных углов, т. е. диагонали произвольного квадрата с центром в начале координат и сторонами, параллельными осям координат. Рассмотрим, в частности, квадрат, длины сторон которого равны $2a$. При сжатии к оси Ox с коэффициентом $\frac{b}{a}$ этот квадрат переходит в прямоугольник с вертикальными сторонами длины $2b$ и горизонтальными сторонами прежней длины $2a$, а его диагонали переходят в диагонали этого прямоугольника, т. е. в прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Определение 3. Прямоугольник $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ называется *основным прямоугольником* гиперболы (1).

Замечание 1. Ясно, что

асимптоты гиперболы тогда и только тогда перпендикулярны, когда $b = a$, *т. е. когда гипербола равнобочна.*

Далее, мы видим, что

гипербола (1) *целиком расположена в содержащих ось абсцисс вертикальных углах, образованных асимптотами, но вне полосы* $-a < x < a$.

Кроме того,

гипербола (1) *касается сторон* $x = a$ *и* $x = -a$ *основного прямоугольника в точках* $(a, 0)$ *и* $(-a, 0)$ *и состоит из двух ветвей — правой и левой.*

Наконец,

для гиперболы (1) *начало координат является центром симметрии, а оси координат — осями симметрии, причем ось абсцисс пересекает гиперболу, а ось ординат — нет.*

При этом

никаких других осей симметрии гипербола не имеет.

Действительно, поскольку при любой симметрии асимптоты должны переходить в асимптоты, а точки касания гиперболы сторон основного прямоугольника — в точки касания, то основной прямоугольник гиперболы должен переходить сам в себя, причем его вертикальные стороны должны после симметрии остаться вертикальными. Но это, очевидно, возможно только при симметриях относительно средних линий этого прямоугольника, т. е. при симметриях относительно осей координат.

Таким образом, ось абсцисс канонической системы координат мы можем охарактеризовать как ось симметрии гиперболы, пересекающую эту гиперболу, а ось ординат — как ось симметрии гиперболы, не пересекающую гиперболу.

Поэтому справедливо следующее

Предложение 1. *С точностью до ориентации осей каноническая система координат однозначно определена гиперболой.*

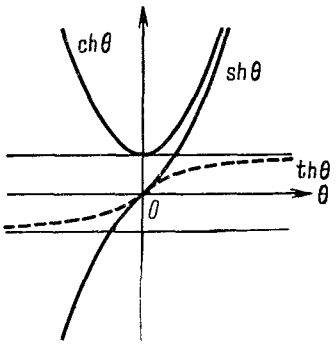
Рассмотрим функции

$$\operatorname{sh}\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}, \quad \operatorname{ch}\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2},$$

называемые соответственно *гиперболическим синусом* и *гиперболическим косинусом.*

Элементарное исследование (например, методами, известными из курса анализа) показывает, что

обе функции $\operatorname{sh}\theta$ *и* $\operatorname{ch}\theta$ *определены для всех* θ, *причем функция* $\operatorname{sh}\theta$ *нечетна и при изменении* θ *от* $-\infty$ *до* $+\infty$ *монотонно возрастает от* $-\infty$ *до* $+\infty$, *обращаясь в нуль при* $\theta = 0$. *а функция* $\operatorname{ch}\theta$ *четна и при изменении* θ *от* $-\infty$ *до* $+\infty$ *сначала монотонно убывает от* $+\infty$ *до* 1 (*получающейся при* $\theta = 0$), *а затем монотонно возрастает от* 1 *до* $+\infty$.



Далее, так как

$$\left(\frac{e^{\theta} \pm e^{-\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\theta} + e^{-2\theta} \pm 2}{4},$$

то

$$\operatorname{ch}^2\theta - \operatorname{sh}^2\theta = 1. \tag{4}$$

Это соотношение (аналогичное известному тождеству для тригонометрических функций $\cos\theta$ и $\sin\theta$) позволяет построить для гиперболических функций «тригонометрию», весьма похожую на тригонометрию функций $\cos\theta$ и $\sin\theta$. В частности, можно ввести *гиперболический тангенс*

$$\operatorname{th}\theta = \frac{\operatorname{sh}\theta}{\operatorname{ch}\theta} = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}},$$

доказать формулы сложения, формулы двойных и половинных аргументов и т. п. Например, по аналогии с известными формулами тригонометрии, выражающими синус и косинус через тангенс половинного угла, для гиперболических функций справедливы формулы

$$\operatorname{sh}\theta = \frac{2\operatorname{th}\frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{th}^2\frac{\theta}{2}}, \quad \operatorname{ch}\theta = \frac{1 + \operatorname{th}^2\frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{th}^2\frac{\theta}{2}} \tag{5}$$

(проще всего эти формулы проверяются прямым вычислением).

Ввиду соотношения (4) любая точка вида $(a\operatorname{ch}\theta,\ b\operatorname{sh}\theta)$ принадлежит гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

или, более точно, ее правой ветви (поскольку всегда $\operatorname{ch}\theta \geqslant 1$). Обратно, любая точка этой правой ветви однозначно представляется в виде $(a\operatorname{ch}\theta,\ b\operatorname{sh}\theta)$. Действительно, поскольку функ-

ция $\operatorname{sh}\theta$ монотонно изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ (и непрерывна), для любого y существует единственное θ, удовлетворяющее соотношению $y = b \operatorname{sh}\theta$. Тогда

$$x^2 = a^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right) = a^2(1 + \operatorname{sh}^2\theta) = a^2 \operatorname{ch}\theta$$

и, следовательно, $x = a \operatorname{ch}\theta$ (ибо, по условию, $x > 0$).

Тем самым мы доказали, что

уравнения

$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{ch}\theta, \\ y &= b \operatorname{sh}\theta, \end{aligned} \qquad -\infty < \theta < +\infty \tag{6}$$

являются параметрическими уравнениями правой ветви гиперболы (1).

Переходя к параметру $t = \operatorname{th}\frac{\theta}{2}$, мы получаем отсюда (см. формулы (4)), что

правая ветвь гиперболы (1) *может быть задана и параметрическими уравнениями вида*

$$\begin{aligned} x &= a\frac{1+t^2}{1-t^2}, \\ y &= b\frac{2t}{1-t^2}, \end{aligned} \qquad -1 < t < 1.$$

Таким образом, аналогично эллипсу и параболе,

гипербола (точнее, ее правая ветвь) допускает рациональную параметризацию.

Поскольку с точностью до ориентации осей каноническая координатная система однозначно определена гиперболой, все конструкции и понятия, использующие эту координатную систему и не зависящие от ориентации ее осей, инвариантно связаны с гиперболой. В частности, это верно для чисел a, b, $c = \sqrt{a^2+b^2}$, $e = \frac{c}{a}$ и $p = \frac{b^2}{a}$.

Определение 4. Числа a и b называются соответственно *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы [1]), число

$$c = \sqrt{a^2+b^2}$$

называется *линейным эксцентриситетом* гиперболы, число $2c$ — *фокусным расстоянием* гиперболы, число

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

---

[1]) Происхождение довольно неудачных, но сохраняющихся по традиции эпитетов «действительная» и «мнимая» в применении к полуосям гиперболы объясняется тем, что уравнение (определяющее точки пересечения гиперболы с осью Ox, имеет вещественные (действительные) решения, а аналогичное уравнение для оси Oy — мнимые решения.

— (*числовым*) *эксцентриситетом* гиперболы, а число

$$p = \frac{b^2}{a}$$

— *фокальным параметром* гиперболы.

Для равнобочной гиперболы

$$a = b, \quad c = \sqrt{2}a, \quad e = \sqrt{2}, \quad p = a.$$

С гиперболой инвариантно связаны также ее (единственный) центр симметрии (0, 0) (называемый обычно просто *центром* гиперболы), ее оси симметрии Ox и Oy (называемые обычно просто *осями*: ось Ox — *действительной осью*, а ось Oy — *мнимой осью*) и две точки пересечения $(\pm a, 0)$ гиперболы с действительной осью (*вершины* гиперболы). Точки

$$(-c, 0) \quad \text{и} \quad (c, 0)$$

тоже инвариантно определены гиперболой и называются ее *фокусами* (соответственно *левым* и *правым*; заметим, что различение левого и правого фокуса зависит от ориентации оси Ox).

Термин «фокусное расстояние» для числа $2c$ объясняется тем, что это число, очевидно, равно расстоянию между фокусами.

Действительная ось гиперболы содержит ее фокусы и потому называется также *фокальной осью*.

Так как $b \neq 0$, то

$$c > a \quad \text{и} \quad e > 1,$$

причем $c = \sqrt{2}a$ (т. е. $e = \sqrt{2}$) тогда и только тогда, когда $a = b$, т. е. когда гипербола равнобочна.

Поскольку $c > a$, прямые $x = \pm c$ пересекают гиперболу. Отрезки, высекаемые гиперболой на этих прямых, называются ее *фокальными хордами*. Поскольку при симметрии относительно оси ординат фокальные хорды переходят друг в друга, они имеют одну и ту же длину.

Задание. Докажите, что длина фокальной хорды гиперболы равна $2p$.

Для любой точки $M(x, y)$ гиперболы длины отрезков, соединяющих ее с фокусами гиперболы, называются *фокальными радиусами* этой точки (соответственно *правым* и *левым*). Иногда «фокальными радиусами» называются сами эти отрезки.

По определению, левый фокальный радиус r_1 точки $M(x, y)$ гиперболы выражается формулой

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Следовательно,

$$r_1 = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2cx + c^2 - b^2} =$$

$$= \sqrt{e^2x^2 + 2eax + a^2} = |ex + a|.$$

Поскольку для точек правой ветви $x > 0$, а для точек левой ветви $x < 0$, причем $|ex| > |x| \geqslant a$, тем самым доказано, что

$$r_1 = \begin{cases} a + ex & \text{при} \quad x > 0, \\ -a - ex & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Аналогично, для правого фокального радиуса r_2 получается, что

$$r_2 = |ex - a|,$$

т. е. что

$$r_2 = \begin{cases} -a + ex & \text{при} \quad x > 0, \\ a - ex & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Из этих формул непосредственно вытекает, что

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} 2a & \text{при} \quad x > 0, \\ -2a & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

т. е. что

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Задание. Докажите обратное утверждение, т. е. что точка плоскости, для которой разность ее расстояний от фокусов гиперболы равна по абсолютной величине числу $2a$, принадлежит гиперболе.

Таким образом,

точка $M(x, y)$ тогда и только тогда принадлежит гиперболе (1), *когда абсолютная величина разности ее расстояний от фокусов гиперболы равна $2a$.*

Это означает, что справедливо следующее

Предложение 2. *Любая гипербола является геометрическим местом точек, абсолютная величина разности расстояний которых от двух данных точек (фокусов гиперболы) постоянна (равна $2a$).*

Заметим, что

геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек равна данному положительному числу $2a$, является одной из ветвей гиперболы (а именно, ветвью, одноименной с фокусом, фокальный радиус которого является вычитаемым).

Задание. Докажите это утверждение.

Замечание 2. Так же как в аналогичной ситуации для эллипса, геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний которых от двух данных точек (находящихся друг от друга на расстоянии $2c$) равна данному неотрицательному числу $2a$, является гиперболой только при $0 < 2a < 2c$. При $2a = 2c$ это геометрическое место представляет собой внешность (два луча) отрезка с концами в данных точках, а при $2a > 2c$ — пусто. При $a = 0$ оно является медиатрисой данных точек.

Согласно предложению 2

гипербола однозначно определена, когда известны ее фокусы и действтельная полуось a.

При этом

для любых двух различных точек и любого положительного числа a, *меньшего половины расстояния между этими точками, существует (единственная) гипебола, фокусами которой являются данные точки, а действительная полуось равна* a.

Задание. Докажите это утверждение (ср. в п. 2 доказательство аналогичного утверждения для эллипса).

Определение 5. Прямые

$$x = -\frac{a}{e}, \quad x = \frac{a}{e}$$

называются *директрисами* (соответственно *левой* и *правой*) гиперболы (1). Директрисы инвариантно связаны с гиперболой, но различение правой и левой директрис зависит от ориентации оси абсцисс.

Заметим, что поскольку $e > 1$,

директрисы отделяют вершины гиперболы от ее центра.

Фокус и директриса называются *одноименными*, если они оба — правые или оба — левые. Ясно, что это отношение между фокусом и директрисой геометрически инвариантно.

Расстояние d фокуса до одноименной директрисы выражается, очевидно, формулой

$$d = c - \frac{a}{e}.$$

Поскольку

$$c - \frac{a}{e} = a\left(e - \frac{1}{e}\right) = a\,\frac{e^2 - 1}{e} = \frac{1}{e}\,\frac{b^2}{a} = \frac{p}{e},$$

тем самым доказано (ср. формулу (8) п. 2), что

$$d = \frac{p}{e}.$$

Так же, как для эллипса, показывается, что

точка $M(x, y)$ *тогда и только тогда принадлежит гиперболе* (1), *когда отношение ее расстояния до некоторого фокуса ги-*

перболы к ее расстоянию до одноименной директрисы гиперболы равно эксцентриситету e гиперболы.

Задание. Докажите это утверждение (не забудьте рассмотреть обе ветви гиперболы).

Таким образом, справедливо следующее

Предложение 3. *Любая гипербола представляет собой геометрическое место точек, отношения расстояний которых от данной точки (фокуса гиперболы) и от данной прямой (одноименной с фокусом директрисы) равно данному положительному числу e, большему единицы (эксцентриситету гиперболы).*

В частности,

гипербола однозначно определена, если известны ее фокус, одноименная с этим фокусом директриса и ее эксцентриситет e.

При этом

для любой точки, любой не содержащей эту точку прямой и любого положительного числа e, большего единицы, существует (единственная) гипербола с эксцентриситетом e, для которой данная точка является фокусом, а данная прямая — одноименной с этим фокусом директрисой.

Задание. Докажите это утверждение.

Замечание 3. Таким образом, гипербола может быть определена той же геометрической конструкцией, что и эллипс и парабола (см. предложение 2 п. 1 и предложение 3 п. 2), только при значении параметра e, большем единицы. Следовательно,

и эллипс (не являющийся окружностью), и парабола, и гипербола являются геометрическими местами точек, отношения расстояний которых от данной точки (фокуса) до данной прямой (одноименной директрисы) постоянны (равны эксцентриситету e).

При этом

значениям e от нуля до единицы соответствуют эллипсы, значению $e = 1$ соответствуют параболы, а значениям $e > 1$ — гиперболы (в частности, значению $e = \sqrt{2}$ — равнобочные гиперболы).

Единство эллипсов, парабол и гипербол можно прояснить и с иной точки зрения. Рассмотрим с этой целью для произвольной гиперболы (1) прямоугольные координаты x', y', получающиеся из канонических координат x, y при переносе начала координат в правую вершину $(a, 0)$ гиперболы. Канонические координаты x, y выражаются через эти координаты по формулам

$$x = x' + a,$$
$$y = y'.$$

Поэтому уравнение гиперболы в координатах x', y' имеет вид

$$\frac{(x'+a)^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

Отбросив штрихи и раскрыв скобки, мы немедленно получим отсюда уравнение

$$y^2=2\frac{b^2}{a}x+\frac{b^2}{a^2}x^2,$$

т. е. уравнение

$$y^2=2px+qx^2, \tag{9}$$

где

$$q=\frac{b^2}{a^2}=e^2-1.$$

Тем самым мы доказали, что

в указанной системе прямоугольных координат гипербола выражается уравнением (9) *с* $q>0$.

Замечание 4. Пусть гипербола меняется так, что ее фокальный параметр p остается неизменным, а величина q стремится к нулю (т. е. эксцентриситет e стремится к единице). Тогда левая ветвь гиперболы будет неограниченно удаляться влево и в пределе исчезнет, а правая ветвь будет «сходиться» и в пределе перейдет в параболу $y^2=2px$. В этом смысле (ср. замечание 4 п. 2) парабола является предельным положением гиперболы, получающимся при $e\to 1$ (и p постоянном).

Сопоставляя полученные результаты с результатами п. 2, мы, в частности, получаем следующее

Предложение 4. *Эллипс, парабола и гипербола могут быть заданы уравнением*

$$y^2=2px+qx^2, \tag{10}$$

где $q<0$ *для эллипса,* $q=0$ *для параболы и* $q>0$ *для гиперболы.*

При этом все эллипсы получаются уже при $-1\leqslant q<0$ (*окружности — при* $q=-1$).

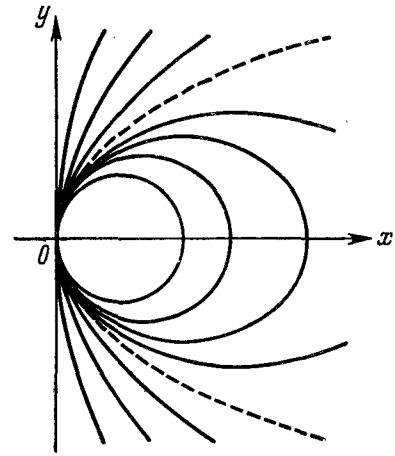
При $-1\leqslant q$ *эксцентриситет* e *связан с* q *формулой*

$$e=\sqrt{1+q}.$$

При $q<-1$ *получается эллипс, имеющий эксцентриситет* $\sqrt{1+\frac{1}{q}}$ *и фокальный параметр* $\frac{p}{\sqrt{-q}}$.

Замечание 5. Уравнение (10) показывает, что при непрерывном изменении q от $-\infty$ до $+\infty$ (и постоянном p) эллипс при q, близких к $-\infty$, сильно «прижатый» к оси ординат, постепенно «округляется», превращаясь при $q=-1$ в окружность, затем «вытягивается» в положительном направлении оси

Ox, переходя при $q=0$ в параболу, превращающуюся при $q>0$ в гиперболу с правой ветвью, «близкой» к параболе, и левой ветвью, далеко сдвинутой влево. При дальнейшем возрастании q ветви гиперболы постепенно «раскрываются» все шире (и приближаются друг к другу), так что при q, близких к $+\infty$, получается гипербола, сильно «прижатая» к оси ординат.



При $q \geqslant -1$ все эти кривые имеют один и тот же фокальный параметр p, а их эксцентриситет e меняется от 0 до $+\infty$. При уменьшении q от -1 до $-\infty$ эксцентриситет растет от нуля до единицы, а фокальный параметр стремится к нулю. Поэтому, хотя в пределе при $q \to -\infty$ и получается значение $e=1$, все же предельное положение эллипса параболой не является, поскольку для него $p=0$.

Предельное положение эллипса при $q \to -\infty$ можно при желании рассматривать как дважды пробегаемую ось ординат. Предельное положение гиперболы при $q \to +\infty$ также является дважды пробегаемой осью ординат, но если гипербола «в пределе» является осью ординат, дважды пробегаемой в одном и том же направлении, то эллипс «в пределе» является осью ординат, пробегаемой сначала в одном направлении, а потом в другом.

4. Уравнения эллипса, параболы и гиперболы в полярных координатах

Единство эллипсов, парабол и гипербол проявляется также и в их уравнениях в полярных координатах.

Рассмотрим сначала произвольную параболу

$$y^2=2px \tag{1}$$

и найдем ее уравнение в системе полярных координат r, φ, полюсом которой является фокус параболы, а полярной осью — ось параболы (или точнее, поскольку необходимо указать ориентацию полярной оси, — ось абсцисс канонической системы координат). С этой полярной системой координат согласована система прямоугольных координат x', y', выражающихся через выражение через r и φ, мы немедленно получим, что

$$x'=x-\frac{p}{2},$$
$$y'=y.$$

Поскольку

$$x' = r\cos\varphi,$$

$$y' = r\sin\varphi,$$

то, следовательно,

$$x = \frac{p}{2} + r\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi.$$

Подставив эти выражения в уравнение (1) параболы, мы получим, что в координатах r, φ парабола выражается уравнением

$$r^2\sin^2\varphi - 2pr\cos\varphi - p^2 = 0.$$

Решая это уравнение относительно r и учитывая, что величина r должна быть положительна, мы немедленно получим, что

$$r = \frac{p\cos\varphi + \sqrt{p^2\cos^2\varphi + p^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi} = \frac{p(1+\cos\varphi)}{\sin^2\varphi} = \frac{p}{1-\cos\varphi}.$$

Таким образом,

в указанной полярной системе координат парабола выражается уравнением

$$r = \frac{p}{1-\cos\varphi}.$$

Рассмотрим теперь произвольный эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a \geqslant b > 0.$$

Так же, как для параболы, мы направим полярную ось по оси абсцисс канонической системы координат, а за полюс примем фокус, имеющий отрицательную абсциссу, т. е. левый фокус. Тогда канонические координаты x, y будут выражаться через полярные координаты r, φ по формулам

$$x = -c + r\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi.$$

Чтобы найти уравнение эллипса в координатах r, φ, можно подставить эти выражения в каноническое уравнение эллипса и решить получающееся квадратное уравнение относительно r. Однако проще вспомнить формулу (6) п. 2 для левого фокального радиуса произвольной точки эллипса и учесть, что в силу нашего выбора полюса этот фокальный радиус совпадает с полярным радиусом r. Подставив в эту формулу вместо x его выражение через r и φ, мы немедленно получим, что

$$r = a + e(-c + r\cos\varphi),$$

и следовательно, что

$$r = \frac{a - ec}{1 - e\cos\varphi}.$$

Поскольку

$$a - ec = a - \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p,$$

тем самым доказано, что

в указанной полярной системе координат эллипс выражается уравнением

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}.$$

Наконец, для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > 0, \quad b > 0,$$

мы рассмотрим систему полярных координат r, φ, полярная ось которой совпадает с осью Ox, а полюс находится в правом фокусе гиперболы (заметим, что для эллипса мы брали левый фокус). Тогда

$$x = c + r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$

причем полярный радиус r произвольной точки $M(x, y)$ гиперболы будет не чем иным, как ее правым фокальным радиусом и потому будет выражаться формулой (8) п. 3. В частности, для точек правой ветви (с $x > 0$) мы получим, что

$$r = -a + ex$$

и потому

$$r = -a + e(c + r\cos\varphi),$$

т. е.

$$r = \frac{ec - a}{1 - e\cos\varphi}.$$

Поскольку

$$ec - a = \frac{c^2}{a^2} - a = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p,$$

тем самым доказано, что

в указанной системе полярных координат правая ветвь гиперболы выражается уравнением

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}.$$

Сопоставляя полученные результаты, мы немедленно получаем следующее окончательное

Предложение 1. *Уравнение*

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$

является

а) *при* $0 \leqslant e < 1$ — *уравнением эллипса,*

б) *при* $e = 1$ — *уравнением параболы,*

в) *при* $e > 1$ — *уравнением одной ветви гиперболы.*

Во всех трех случаях число e является эксцентриситетом линии, число p — фокальным параметром, а полюс $r = 0$ — фокусом линии (в случае $e > 1$ — одноименным с рассматриваемой ветвью).

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Эллипс, парабола и гипербола как конические сечения

Определение 1. *Прямым круговым конусом* называется поверхность, имеющая в некоторых прямоугольных координатах $Oxyz$ уравнение вида

$$x^2 + y^2 = R^2 z^2. \tag{1}$$

Плоскость $z = 1$ пересекает поверхность (1) по линии с уравнением

$$x^2 + y^2 = R^2, \tag{2}$$

т. е. по окружности радиуса R (как мы знаем, x, y являются прямоугольными координатами и на плоскости $z = 1$). С другой стороны, если точка $(x, y, 1)$ принадлежит окружности (2), то любая точка вида (xt, yt, t) принадлежит поверхности (1), и обратно. Следовательно, поверхность (1) образована всевозможными прямыми, проходящими через точку $O(0, 0, 0)$ и произвольную точку окружности (2). Это показывает, что поверхность (1) состоит из двух бесконечных конусов, имеющих общую вершину O.

В пересечении с произвольной плоскостью

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \qquad p \geqslant 0, \tag{3}$$

конус (1) дает некоторую линию.

Определение 2. В случае, когда плоскость (3) не проходит через начало координат O, т. е. в случае, когда $p > 0$, линия, высекаемая на плоскости (3) конусом (1), называется *коническим сечением.*

Упражнение. Какие линии пересечения получаются при $p = 0$? Что изменится, если мы вместо евклидова пространства будем рассматривать евклидово вещественно-комплексное пространство?

Чтобы найти уравнения конических сечений, мы заметим, что в силу круговой симметрии конуса можно, без ограничения общности, считать, что плоскость (3) параллельна оси Oy, т. е. что $\cos\beta = 0$. Тогда $\cos\gamma = \sin\alpha$, и потому уравнение плоскости (3) может быть записано в виде

$$x\cos\alpha + z\sin\alpha - p = 0. \tag{4}$$

Более того, по аналогичным соображениям мы можем считать, что

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Чтобы найти пересечение плоскости (4) с конусом (1), мы рассмотрим векторы

$$\boldsymbol{e}_1(-\sin\alpha, 0, \cos\alpha), \quad \boldsymbol{e}_2(0, 1, 0), \quad \boldsymbol{e}_3(\cos\alpha, 0, \sin\alpha).$$