Во всех трех случаях число e является эксцентриситетом линии, число p — фокальным параметром, а полюс $r=0$ — фокусом линии (в случае $e>1$ — одноименным с рассматриваемой ветвью).

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Эллипс, парабола и гипербола как конические сечения

Определение 1. *Прямым круговым конусом* называется поверхность, имеющая в некоторых прямоугольных координатах $Oxyz$ уравнение вида

$$x^2+y^2=R^2z^2. \tag{1}$$

Плоскость $z=1$ пересекает поверхность (1) по линии с уравнением

$$x^2+y^2=R^2, \tag{2}$$

т. е. по окружности радиуса R (как мы знаем, x, y являются прямоугольными координатами и на плоскости $z=1$). С другой стороны, если точка $(x, y, 1)$ принадлежит окружности (2), то любая точка вида (xt, yt, t) принадлежит поверхности (1), и обратно. Следовательно, поверхность (1) образована всевозможными прямыми, проходящими через точку $O(0, 0, 0)$ и произвольную точку окружности (2). Это показывает, что поверхность (1) состоит из двух бесконечных конусов, имеющих общую вершину O.

В пересечении с произвольной плоскостью

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \qquad p\geqslant 0, \tag{3}$$

конус (1) дает некоторую линию.

Определение 2. В случае, когда плоскость (3) не проходит через начало координат O, т. е. в случае, когда $p>0$, линия, высекаемая на плоскости (3) конусом (1), называется *коническим сечением.*

Упражнение. Какие линии пересечения получаются при $p=0$? Что изменится, если мы вместо евклидова пространства будем рассматривать евклидово вещественно-комплексное пространство?

Чтобы найти уравнения конических сечений, мы заметим, что в силу круговой симметрии конуса можно, без ограничения общности, считать, что плоскость (3) параллельна оси Oy, т. е. что $\cos\beta=0$. Тогда $\cos\gamma=\sin\alpha$, и потому уравнение плоскости (3) может быть записано в виде

$$x\cos\alpha+z\sin\alpha-p=0. \tag{4}$$

Более того, по аналогичным соображениям мы можем считать, что

$$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Чтобы найти пересечение плоскости (4) с конусом (1), мы рассмотрим векторы

$$e_1(-\sin\alpha,\ 0,\ \cos\alpha), \quad e_2(0,\ 1,\ 0), \quad e_3(\cos\alpha,\ 0,\ \sin\alpha).$$

Первые два из этих векторов параллельны плоскости (4), а третий ей перпендикулярен. Кроме того, эти векторы составляют ортонормированный базис пространства, разноименный с исходным координатным базисом.

Пусть x', y', z' — прямоугольные координаты в пространстве, определенные репером $Oe_1e_2e_3$. Согласно общим формулам п. 2 § 1 гл. 2 координаты x, y, z выражаются через координаты x', y', z' по формулам

$$\begin{aligned} x &= -x'\sin\alpha + z'\cos\alpha,\\ y &= y',\\ z &= x'\cos\alpha + z'\sin\alpha. \end{aligned}$$

Поэтому в координатах x', y', z' конус (3) имеет уравнение

$$(-x'\sin\alpha + z'\cos\alpha)^2 + y'^2 - R^2(x'\cos\alpha + z'\sin\alpha)^2 = 0,$$

т. е. уравнение

$$y'^2 = 2x'z'(1+R^2)\cos\alpha\sin\alpha + x'^2(R^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \\ + z'^2(R^2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha). \qquad (6)$$

С другой стороны, плоскость (4) имеет в координатах x', y', z' уравнение

$$z' - p = 0,$$

и потому координаты x', y' являются прямоугольными координатами на этой плоскости, причем, чтобы получить в этих координатах уравнение линии, являющейся пересечением конуса (1) с плоскостью (4), достаточно в уравнении (6) положить $z' = p$. Таким образом, эта линия будет иметь в координатах x', y' уравнение

$$y'^2 = 2x'p(1+R^2)\cos\alpha\sin\alpha + x'^2(R^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \\ + p^2(R^2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha). \qquad (7)$$

Перенесем теперь начало координат в точку

$$\left(-p\frac{R\sin\alpha - \cos\alpha}{R\cos\alpha + \sin\alpha},\ 0\right),$$

т. е. перейдем от координат x', y' к координатам x'', y'', выражающимся формулами

$$\begin{aligned} x'' &= x' + p\frac{R\sin\alpha - \cos\alpha}{R\cos\alpha + \sin\alpha},\\ y'' &= y'. \end{aligned}$$

(Заметим, что в силу условия (5) величина $R\cos\alpha + \sin\alpha$ отлична от нуля.)

В координатах x'', y'' линия (7) имеет уравнение

$$y''^2 = 2p(1+R^2)\left(x'' - p\frac{R\sin\alpha - \cos\alpha}{R\cos\alpha + \sin\alpha}\right)\cos\alpha\sin\alpha +$$
$$+\left(x'' - p\frac{R\sin\alpha - \cos\alpha}{R\cos\alpha + \sin\alpha}\right)^2 (R^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + p^2(R^2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha).$$

Раскрыв скобки, мы после очевидных преобразований получим, как легко видеть, следующее уравнение:

$$y''^2 = 2Rpx'' + x''^2(R^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \tag{8}$$

Сравнив это уравнение с уравнением (10) п. 3 § 1, мы немедленно получаем, что

каждое коническое сечение является либо эллипсом, либо параболой, либо гиперболой.

При этом фокальным параметром этой линии является число Rp, а коэффициент q из уравнения (19) п. 3 выражается формулой

$$q = R^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \tag{9}$$

Уравнение (8) является уравнением параболы тогда и только тогда, когда

$$R^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0,$$

т. е. когда

$$R = \operatorname{tg}\alpha. \tag{10}$$

Поскольку фокальный параметр этой параболы равен Rp, мы получаем, следовательно, что

каждая парабола является коническим сечением.

Более того, ясно, что

каждая парабола является сечением произвольного фиксированного конуса (1), (*т. е. конуса, отвечающего данному фиксированному* R; *например,* $R = 1$).

Плоскости, на которых данный конус (1) высекает параболы, с точностью до параллельности определяются из условия (10). Чтобы получить данную параболу (с данным фокальным параметром), нужно соответствующим образом подобрать расстояние этой плоскости до вершин конуса (например, при $R=1$ это расстояние должно быть равно фокальному параметру).

Выражая из соотношения (9) угол α через величины q и R, мы немедленно получим, что

$$\sin^2\alpha = \frac{R^2 - q}{1 + R^2}. \tag{11}$$

Отсюда следует, что для любого q, удовлетворяющего неравенствам

$$-1 \leqslant q < 0,$$

существует угол α, удовлетворяющий уравнению (9). Следовательно,

каждый эллипс является коническим сечением.

Более того,

каждый эллипс является сечением произвольного фиксированного конуса (1).

Для соответствующей плоскости угол α определяется из соотношения (11), а свободный член (расстояние до вершины конуса) должен быть равен $\frac{p}{R}$, где p — фокальный параметр эллипса.

При $q > 0$ уравнение (11) имеет решение только при

$$0 < q \leqslant R^2. \tag{12}$$

Поэтому в отличие от парабол и эллипсов

не каждая гипербола является сечением данного конуса (1).

Тем не менее,

каждая гипербола является коническим сечением.

Действительно, при любом $q > 0$ условие (12) удовлетворяется, если R достаточно велико.

Замечание 1. Последнее утверждение может быть доказано проще, если заметить, что, скажем, плоскость

$$x = b$$

пересекает конус (1) по кривой с уравнением

$$b^2 + y^2 = R^2 z^2,$$

т. е. с уравнением

$$\frac{z}{\left(\frac{b}{R}\right)^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

являющимся уравнением гиперболы с полуосями $a = \frac{b}{R}$ и b.

Резюмируя, мы получаем следующее предложение:

Предложение 1. *Линия на плоскости тогда и только тогда является коническим сечением, когда она представляет собой либо эллипс, либо параболу, либо гиперболу.*

Замечание 2. Описанное в замечании 5 п. 3 § 1 постепенное вытягивание окружности во все более и более «длинный» эллипс, переход этого эллипса в параболу, а затем в гиперболу мы можем теперь получить, вращая вокруг оси Oy плоскость (4).

Действительно, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ мы получаем в пересечении с конусом (1) окружность радиуса R. При уменьшении угла α мы будем получать все более и более «длинные» эллипсы, пока, наконец, при $\alpha = \operatorname{arctg} R$ мы не получим параболу. При дальнейшем уменьшении угла α вплоть до $\alpha = 0$ мы будем получать гиперболы. Однако всех гипербол мы при этом не получим. Чтобы получить остальные гиперболы, можно, например, оставляя плоскость (с $\alpha = 0$) неподвижной, постепенно «раскрывать» конус (1), неограниченно увеличивая R. При этом будет оставаться неизменным уже не фокальный параметр, а мнимая полуось гиперболы. (Чтобы сохранить неизменным фокальный параметр, следует одновременно с раскрытием конуса двигать плоскость параллельно самой себе, приближая ее к оси Oy.)

2. Взаимное расположение конических сечений и прямых

Эллипсы, гиперболы и параболы задаются уравнениями второй степени, т. е. являются *линиями второго порядка*. Чтобы не повторяться, нам будет удобно рассмотреть вопрос о взаимном расположении этих линий и прямых сначала в общем виде, т. е. для любых линий второго порядка (впрочем, как мы увидим в следующей главе, эллипсами, гиперболами и параболами исчерпываются, по существу, все линии второго порядка).

Чтобы найти точки пересечения произвольной прямой

$$\begin{aligned} x &= x_0 + lt, \\ y &= y_0 + mt \end{aligned} \tag{1}$$

с некоторой линии второго порядка

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{2}$$

нужно (см. п. 2 § 1 гл. 3) найти корни уравнения

$$\begin{aligned} F(x_0 + lt,\ y_0 + mt) \equiv (a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2)\,t^2 + \\ + 2\,(a_{11}lx_0 + a_{12}(ly_0 + mx_0) + a_{22}my_0 + a_{13}l + a_{23}m)\,t + \\ + a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Определение 1. Прямая (1) называется прямой *неасимптотического направления* (по отношению к линии (2)), если

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 \neq 0.$$

Для такой прямой уравнение (3) является уравнением второй степени и потому имеет либо два вещественных корня, либо два комплексных (невещественных) корня, либо один двукратный вещественный корень. В первом случае прямая (1) пересекает линию (2) в двух точках, во втором случае прямая (1) и линия (2) не пересекаются[1]), а в третьем случае прямая (1) и линия (2) имеют одну общую точку.

[1]) В вещественной плоскости. В вещественно-комплексной плоскости этому случаю отвечают две комплексно-сопряженные точки пересечения.

Определение 2. Если уравнение (3) имеет один двукратный вещественный корень, т. е. прямая (1) неасимптотического направления имеет с линией (2) одну общую точку, то говорят, что в этой точке прямая (1) *касается* линии (2).

Замечание 1. В анализе касательная к произвольной линии в точке M_0 определяется как предельное положение секущей M_0M_1 (где M_1 — вторая точка пересечения секущей с данной линией) при $M_1 \to M_0$. Для линии второго порядка (2) точка M_0 определяется некоторым корнем t_0 уравнения (3), а точка M_1 — другим его корнем t_1. Стремление точки M_1 к точке M_0 означает такое изменение коэффициентов уравнений (1), при котором корень t_0 уравнения (3) не меняется, а корень t_1 стремится к корню t_0. Следовательно, в пределе мы получим такую прямую, которой будет соответствовать двукратный корень уравнения (3). Таким образом, данное нами алгебраическое определение касательной (пригодное только для линий второго порядка) является частным случаем общего аналитического определения касательной (пригодного для любых линий).

Для прямой *асимптотического направления*, т. е. для прямой (1), направляющий вектор $\boldsymbol{a}(l, m)$ которой удовлетворяет условию

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0,$$

уравнение (3) вырождается в линейное уравнение (конечно, если коэффициент при t также не обращается в нуль), и потому каждая такая прямая пересекает кривую (2) в одной точке[1]). Тем не менее, эта прямая касательной не считается.

Определение 3. Прямая (1) называется *асимптотой* кривой (2), если в уравнении (3) равны нулю коэффициенты при t^2 и при t, а свободный член $F(x_0, y_0)$ отличен от нуля.

Такая прямая не имеет с линией второго порядка ни одной общей точки (даже в комплексной плоскости).

Замечание 2. Это определение асимптот (для линий второго порядка) по форме отличается от определения 2 п. 3 § 1 (пригодного для любых линий). Мы дальше на примерах увидим, что оно и по существу отлично от определения 2 п. 3 § 1 (прямая, являющаяся асимптотой линии второго порядка в смысле определения 2 п. 3, будет асимптотой и в нашем теперешнем смысле, но не наоборот).

Если для прямой (1) обращаются в нуль все коэффициенты уравнения (3), то такая прямая целиком принадлежит линии (2). Подчеркнем, что, таким образом, любая прямая, целиком принадлежащая линии второго порядка, является, по определению, прямой асимптотического направления.

Замечание 3. Термин «прямая асимптотического направления» согласуется с использованием термина «направление», объясненном в подстрочном примечании на стр. 17. Согласно этому примечанию направлением на плоскости (или в пространстве) называется класс параллельных прямых. Все прямые одного направления имеют одни и те же направляющие

[1]) Даже в комплексной плоскости!

векторы и потому каждое направление (на плоскости) однозначно характеризуется отношением $l:m$ координат этих векторов (здесь «отношение» $l:m$ следует, конечно, понимать не как число, — иначе будет исключен случай $m=0$, — а как элемент множества $\mathbb{R}P^1$; см. п. 6 § 1 гл. 2). На этом основании мы будем иногда использовать сокращенный термин «направление $l:m$», понимая под этим направление, характеризующееся отношением $l:m$.

Замечание 4 (очень важное!). Во всем сказанном выше мы нигде не использовали предположения об евклидовости координат x, y. Поэтому все это сохраняет силу для любых аффинных координат. Это показывает, что *введенные понятия (касательные, асимптоты и т. д.) принадлежат аффинной геометрии.*

Для параболы

$$y^2=2px, \qquad p>0, \tag{4}$$

уравнение (3) имеет вид

$$m^2t^2+2(my_0-2pl)t+y_0^2-2px_0=0.$$

Следовательно, асимптотические направления характеризуются равенством

$$m=0.$$

Другими словами,

прямая тогда и только тогда имеет относительно параболы асимптотическое направление, когда она параллельна оси этой параболы.

Если $m=0$ и $my_0-2pl=0$, то $l=0$, что невозможно (вектор $\mathbf{a}(l,\ m)$, по условию, отличен от нуля). Следовательно,

асимптот парабола не имеет.

Кроме того,

парабола не содержит ни одной прямой.

Каждая прямая неасимптотического направления (т. е. не параллельная оси Ox) либо вообще не пересекает параболу, либо касается ее в некоторой точке, либо пересекает параболу в двух различных точках. Чтобы выяснить, какой из этих двух случаев имеет место, удобно перейти к уравнению прямой, разрешенному относительно x, т. е. к уравнению вида

$$x=ky+\tau \tag{5}$$

(это всегда возможно, ибо, по условию, рассматриваемая прямая не параллельна оси абсцисс). Тогда ординаты точек пересечения прямой с параболой будут определяться из уравнения

$$y^2=2p(ky+\tau),$$

т. е. будут выражаться формулой

$$y=pk\pm\sqrt{p^2k^2+2p\tau}.$$

Таким образом,

если $\tau < -\frac{pk^2}{2}$, *то прямая* (5) *с параболой не пересекается;*

если $\tau = -\frac{pk^2}{2}$, *то прямая* (5) *касается параболы* (*в точке с ординатой* pk);

если $\tau > -\frac{pk^2}{2}$, *то прямая* (5) *пересекает параболу в двух различных точках.*

Согласно принципу обращения обратные утверждения также справедливы.

В частности, мы видим, что для любого неасимптотического направления прямые этого направления, пересекающие параболу, заполняют целую полуплоскость. Следовательно,

у параболы имеются хорды любого наперед заданного неасимптотического направления.

Для эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a \geqslant b > 0, \tag{6}$$

уравнение (3) имеет вид

$$\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{lx_0}{a^2} + \frac{my_0}{b^2}\right)t + \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Поскольку при $(l, m) \neq (0, 0)$

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \neq 0,$$

эллипс не имеет прямых асимптотического направления.

В частности,

эллипс не имеет асимптот и не содержит ни одной прямой.

По аналогии со случаем параболы мы предпочтем сейчас исследовать пересечения эллипса с прямыми, задавая их не параметрическими уравнениями (1), а уравнениями, разрешенными относительно y:

$$y = kx + \tau \tag{7}$$

(заметим, что если в случае параболы нам было удобно рассматривать прямые, заданные уравнениями (5) — разрешенными относительно x, — то здесь уже нет в этом необходимости).

Конечно, ограничиваясь прямыми вида (7), мы исключаем из рассмотрения прямые $x = x_0$, параллельные оси ординат. Пересечения таких прямых с эллипсом будут поэтому требовать дополнительного исследования.

Чтобы найти точки пересечения эллипса (6) с прямой (7), мы должны решить (относительно x) уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(kx+\tau)^2}{b^2}=1,$$

т. е. уравнение

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)x^2+\frac{2k\tau}{b^2}x+\frac{\tau^2}{b^2}-1=0.$$

Сделав это, мы получим для абсцисс x точек пересечения формулу:

$$x=\frac{-a^2k\tau\pm ab\sqrt{a^2k^2+b^2-\tau^2}}{a^2k^2+b^2}.$$

Следовательно,

если $\tau^2>a^2k^2+b^2$, *то прямая* (7) *не пересекается с эллипсом*;

если $\tau^2=a^2k^2+b^2$, *то прямая* (7) *касается эллипса*;

если $\tau^2<a^2k^2+b^2$, *то прямая* (7) *пересекает эллипс в двух точках.*

Для прямых вида $x=x_0$ ординаты точки их пересечения с эллипсом определяются из уравнения

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

т. е. выражаются формулой

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}.$$

Следовательно,

если $|x_0|>a$, *то прямая* $x=x_0$ *не пересекается с эллипсом*;

если $|x_0|=a$, *то прямая* $x=x_0$ *касается эллипса*;

если $|x_0|<a$, *то прямая* $x=x_0$ *пересекает эллипс в двух точках.*

Мы видим, таким образом, что в любом пучке параллельных прямых прямые, пересекающие эллипс в двух точках, заполняют целую полосу. Следовательно, как и у параболы,

у эллипса имеются хорды любого наперед заданного направления (заведомо, неасимптотического).

Для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad a>0,\quad b>0,\tag{8}$$

уравнение (3) имеет вид

$$\left(\frac{l^2}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}\right)t^2+2\left(\frac{lx_0}{a^2}-\frac{my_0}{b^2}\right)t+\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)=0.$$

Уравнение асимптотических направлений

$$\frac{l^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2} = 0$$

имеет теперь два решения:

$$l : m = \pm a : b.$$

Таким образом,

гипербола имеет два асимптотических направления, характеризующихся угловыми коэффициентами $\pm \frac{b}{a}$.

Дальнейшее исследование пересечений гиперболы (8) с прямой мы предпочтем, как и в случае эллипса, производить в предположении, что прямая задана уравнением

$$y = kx + \tau \tag{9}$$

(или уравнением $x = x_0$).

Чтобы найти точки пересечения гиперболы (8) с прямой (9), мы должны решить (относительно x) уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(kx + \tau)^2}{b^2} = 1,$$

т. е. уравнение

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{k^2}{b^2}\right) x^2 - 2\frac{k\tau}{b^2} x - \left(\frac{\tau^2}{b^2} + 1\right) = 0. \tag{10}$$

При $k = \pm \frac{b}{a}$ (прямая (9) имеет асимптотическое направление) это уравнение вырождается в линейное и имеет при $\tau \neq 0$ только один корень

$$x = \frac{\tau^2 + b^2}{2\tau k},$$

а при $\tau = 0$ вообще не может быть удовлетворено. Это означает, что

из всех прямых асимптотических направлений только прямые

$$y = \frac{b}{a} x, \quad y = -\frac{b}{a} x$$

не пересекают гиперболы, т. е. являются ее асимптотами (*в смысле определения* 3).

Но, как мы знаем, эти прямые являются асимптотами гиперболы и в смысле определения 2 п. 3 § 1. Таким образом,

для гиперболы асимптоты в смысле определения 2 п. 3 § 1 *совпадают с асимптотами в смысле определения* 3.

Для прямой (9) неасимптотического направления уравнение (10) имеет два корня

$$x = \frac{-a^2 k\tau \pm ab\sqrt{\tau^2 - a^2k^2 + b^2}}{a^2k^2 - b^2}. \tag{11}$$

Следовательно,

если $\tau^2 < a^2k^2 - b^2$, *то прямая* (9) *не пересекает гиперболу*;

если $\tau^2 = a^2k^2 - b^2$, *то прямая* (9) *касается гиперболы*;

если $\tau^2 > a^2k^2 - b^2$, *то прямая* (9) *пересекает гиперболу в двух точках.*

Замечание 5. Если $|k| < \frac{b}{a}$, т. е. прямая (9) при $\tau = 0$ заключена в той паре вертикальных углов, образованных асимптотами, которая содержит гиперболу, то величина $a^2k^2 - b^2$ отрицательна и потому при любом τ возможен лишь третий случай, т. е. прямая $y = kx + \tau$ пересекает гиперболу. Если же $|k| > \frac{b}{a}$, т. е. если прямая (9) при $\tau = 0$ заключена в дополнительной паре вертикальных углов, то величина $a^2k^2 - b^2$ положительна и возможны все три случая.

Для прямых вида $x = x_0$ ординаты y их точек пересечения с гиперболой определяются из уравнения

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

т. е. выражаются формулой

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x_0^2 - a^2}.$$

Следовательно,

каждая прямая вида $x = x_0$ *является прямой неасимптотического направления, причем*

при $|x_0| < a$ *она не пересекает гиперболу,*

при $|x_0| = a$ *она касается гиперболы,*

при $|x_0| > a$ *она пересекает гиперболу в двух точках.*

В частности, мы видим, что в любом пучке параллельных прямых, имеющих неасимптотическое направление, характеризующееся угловым коэффициентом k (случай $k = \infty$, т. е. случай прямых $x = x_0$ не исключается), прямые, пересекающие гиперболу, исчерпывают при $|k| < \frac{b}{a}$ весь пучок, а при $|k| > \frac{b}{a}$ заполняют две полуплоскости, отделенные полосой, в которой вообще нет точек гиперболы. В обоих случаях

у гиперболы имеются хорды любого наперед заданного неасимптотического направления.

3. Прямые, касающиеся конических сечений

Согласно результатам п. 2 прямая

$$x = ky + \tau \tag{1}$$

тогда и только тогда касается параболы

$$y^2 = 2px, \qquad p > 0,$$

когда

$$\tau = -\frac{pk^2}{2}.$$

При этом координаты точки касания $M_0(x_0, y_0)$ выражаются, очевидно, формулами

$$x_0 = \frac{pk^2}{2}, \quad y_0 = pk.$$

Поэтому уравнение (1) мы можем переписать в следующем виде:

$$x = \frac{y_0}{p} y - x_0.$$

Тривиальным образом преобразовав это уравнение, мы получим, что

касательная к параболе $y^2 = 2px$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет уравнение

$$y_0 y = p(x + x_0). \tag{2}$$

Замечание 1. Строго говоря, мы доказали лишь, что если в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует касательная к параболе, то она выражается уравнением (2). Но чтобы доказать существование касательной, достаточно показать, что для любой точки $M_0(x_0, y_0)$ параболы существует такое k, что $x_0 = \frac{pk^2}{2}$ и $y_0 = pk$ (ибо тогда прямая с угловым коэффициентом k, проходящая через точку M_0, и будет, по доказанному выше, касательной), а это очевидно (достаточно, например, за k принять число $\frac{y_0}{p}$).

Рассмотрим теперь эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a \geqslant b > 0.$$

Как мы знаем (см. п. 2), прямая

$$y = kx + \tau \tag{3}$$

тогда и только тогда касается эллипса, когда

$$|\tau| = \sqrt{a^2k^2 + b^2}.$$

При этом, согласно формуле (8) п. 2, абсцисса x_0 точки касания выражается формулой

$$x_0 = \frac{-a^2k\tau}{a^2k^2 + b^2} = \frac{-a^2k}{\pm\sqrt{a^2k^2 + b^2}}.$$

Подставив это выражение в уравнение (3), мы найдем и ординату y_0 точки касания:

$$y_0 = kx_0 + \tau = \frac{b^2}{\pm\sqrt{a^2k^2 + b^2}}.$$

Следовательно, $\frac{y_0}{x_0} = -\frac{b^2}{a^2k}$, т. е.

$$k = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}. \tag{4}$$

Таким образом, касательная к эллипсу в точке $M_0(x_0, y_0)$ представляет собой прямую, проходящую через точку M_0 и имеющую угловой коэффициент (4). Поэтому эта касательная выражается уравнением

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}(x - x_0), \tag{5}$$

т. е. уравнением

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}.$$

Поскольку $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ (ибо точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит эллипсу), тем самым доказано, что

касательная к эллипсу в точке $M_0(x_0, y_0)$ *имеет уравнение*

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Замечание 2. Строго говоря (ср. выше аналогичное замечание 1 для параболы), мы лишь доказали, что если в точке M_0 эллипса с у щ е с т в у е т касательная вида $y = kx + b$, то она выражается уравнением (6) (или, точнее, уравнением (5)). Чтобы доказать существование такой касательной, достаточно, очевидно, доказать, что координаты x_0, y_0 точки M_0 могут быть представлены в виде

$$x_0 = \frac{-a^2k}{\pm\sqrt{a^2k^2 + b^2}}, \quad y_0 = \frac{b^2}{\pm\sqrt{a^2k^2 + b^2}} \tag{7}$$

с некоторым k.

Мы покажем, что

любая точка $M_0(x_0, y_0)$ *эллипса, отличная от вершин* $(\pm a, 0)$, *допускает представление вида* (7).

Этим и будет доказано, что в точке M_0 существует касательная.

Пусть сначала $y_0 > 0$. Найдя k из соотношения

$$y_0 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}},$$

мы получим, что

$$k = \pm\frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - y_0^2}}{y_0}.$$

Знак k мы выберем противоположным знаку x_0. Тогда величина

$$\frac{-a^2k}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}$$

будет иметь тот же знак, что и x_0. Поскольку ее квадрат равен

$$\frac{a^4k^2}{a^2k^2+b^2}=\frac{a^4}{b^4}\cdot\frac{b^4}{a^2k^2+b^2}\cdot k^2=\frac{a^4}{b^4}\cdot y_0^2\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{b^2-y_0^2}{y_0^2}=$$

$$=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y_0^2)=x_0^2,$$

этим доказано, что

$$x_0=\frac{-a^2k}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}.$$

Таким образом, при $y_0>0$ все доказано.

При $y_0<0$ мы рассмотрим точку $(-x_0, -y_0)$ (также принадлежащую эллипсу) и представим ее в виде (7) (что, по уже доказанному, возможно). Тогда для точки (x_0, y_0) мы, очевидно, получим представление вида (7), но уже с отрицательными знаменателями.

Тем самым существование касательной вида $y=kx+\tau$ в любой точке $M_0(x_0, y_0)$ эллипса, для которой $y_0\neq 0$, т. е. в любой точке, отличной от вершин $(\pm a, 0)$, полностью доказано.

Что же касается этих вершин, то, согласно сказанному в предыдущем пункте, в них касательные также существуют, но являются уже прямыми вида $x=x_0$, параллельными оси ординат, а именно, прямыми

$$x=\pm a. \tag{8}$$

С другой стороны, подставив в уравнение (6) значения $x_0=\pm a$, $y_0=0$, мы, очевидно, получим как раз уравнения (8). Следовательно, уравнение (6) является уравнением касательной и в каждой из вершин $(\pm a, 0)$.

Таким образом, мы доказали, что

касательная к эллипсу существует в каждой его точке $M_0(x_0, y_0)$ и выражается уравнением (6).

Аналогичное утверждение имеет место и для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a>0, \quad b>0,$$

т. е.

касательная к гиперболе существует в каждой ее точке $M_0(x_0, y_0)$ и выражается формулой

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1. \tag{9}$$

В частности, угловой коэффициент этой касательной равен (при $y_0\neq 0$)

$$k=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}. \tag{10}$$

Задание. Докажите формулу (9).

Определение 1. Линия называется *выпуклой*, если она расположена по одну сторону от каждой ее касательной (за исключением, конечно, точки касания).

Предложение 1. *Парабола, эллипс и каждая ветвь гиперболы являются выпуклыми линиями.*

Доказательство. Подставляя координаты x, y произвольной точки $M(x, y)$ параболы в уравнение касательной (2) и учитывая соотношения $y_0^2=2px_0$ и $y^2=2px$, мы немедленно получим, что

$$y_0y-p(x+x_0)=-\frac{1}{2}(y-y_0)^2.$$

Таким образом, при подстановке координат любой точки $M(x, y)\neq M_0(x_0, y_0)$ параболы в уравнение касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$ мы получаем числа одного знака (отрицательные). Поэтому (см. п. 4 § 1 гл. 3) все эти точки расположены по одну и ту же сторону от касательной.

Аналогичное утверждение для эллипса и гиперболы проще всего доказать, используя их параметрические уравнения (уравнения (2) п. 2 § 1 и уравнения (6) п. 3 § 1). Пусть θ_0 — значение параметра, отвечающее точке касания M_0, а θ — значение параметра, отвечающее произвольной точке M эллипса. Тогда

$$x_0=a\cos\theta_0,\quad y_0=b\sin\theta_0,$$
$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta,$$

и потому

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=\cos\theta_0\cos\theta+\sin\theta_0\sin\theta-1=\cos(\theta_0-\theta)-1\leqslant 0.$$

Таким образом, при подстановке координат произвольной точки $M\neq M_0$ эллипса в уравнение касательной в точке M_0 действительно получаются числа одного и того же знака (отрицательные).

Случай гиперболы совершенно аналогичен:

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}-1=\operatorname{ch}\theta_0\operatorname{ch}\theta-\operatorname{sh}\theta_0\operatorname{sh}\theta-1=\operatorname{ch}(\theta-\theta_0)-1\geqslant 0,$$

причем равенство нулю имеет место только при $\theta=\theta_0$.

Очень интересное и важное (для оптики) свойство касательных к коническим сечениям указывается в следующем предложении:

Предложение 2. *Касательная к эллипсу или гиперболе образует равные углы с фокальными радиусами точки касания.*

Доказательство. Под углом между двумя прямыми мы понимаем здесь острый (точнее, не тупой) угол из двух смежных углов, образованных этими прямыми. Поэтому для доказательства равенства интересующих нас углов достаточно доказать, что они имеют равные синусы, т. е. что отношение расстояния от фокуса до касательной к длине соответствующего фокального радиуса — одно и то же для обоих фокусов.

Мы знаем (п. 5 § 1 гл. 3), что расстояние от некоторой точки до прямой равно абсолютной величине числа, получающегося при подстановке координат этой точки в левую часть нормального уравнения прямой. Поэтому прежде всего мы должны выяснить, что получится при подстановке координат фокусов в нормальное уравнение касательной.

Согласно формулам (6) и (9) нормальное уравнение касательной к эллипсу или к гиперболе имеет вид

$$\left(\frac{x_0x}{a^2} \pm \frac{y_0y}{b^2} - 1\right)N = 0,$$

где $N > 0$ — некоторый нормирующий множитель (точное значение которого нам не понадобится). Подставив в левую часть этого уравнения координаты $(-c, 0)$ левого фокуса, мы получим число

$$\left(-\frac{x_0c}{a^2} - 1\right)N = -\frac{a + ex_0}{a}N,$$

абсолютная величина которого равна

$$\frac{N}{a}|a + ex_0|.$$

Но как для эллипса, так и для гиперболы длина r_1 левого фокального радиуса точки $M_0(x_0, y_0)$ равна $|a + ex_0|$; см. формулы (6) п. 2 § 1 и (7) п. 3 § 1 (заметим, что в пп. 2 и 3 § 1 мы число r_1 называли просто левым фокальным радиусом). Следовательно, синус угла, образованного левым фокальным радиусом с касательной, равен $\frac{N}{a}$.

Аналогично, при подстановке координат $(c, 0)$ правого фокуса в левую часть нормального уравнения касательной получается число

$$\left(\frac{x_0c}{a^2} - 1\right)N = -\frac{a - ex_0}{a}N,$$

абсолютная величина которого равна

$$\frac{N}{a}|a - ex_0| = \frac{N}{a}r_2$$

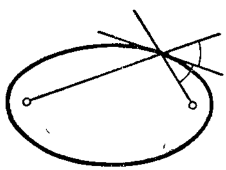
(см. формулы (7) п. 2 § 1 и (8) п. 2 § 1. Поэтому синус угла, образованного правым фокальным радиусом с касательной, равен тому же числу $\frac{N}{a}$.

Тем самым предложение 2 полностью доказано.

В случае эллипса более внимательный анализ показывает, что при подстановке координат любого из фокусов в нормальное уравнение касательной получается отрицательное число. Следовательно (см. п. 5 § 1 гл. 3),

оба фокуса эллипса расположены по одну сторону от касательной (а именно, там, где расположен центр эллипса).

Отсюда следует, что касательная не пересекает треугольник с вершинами в фокусах и точке касания, т. е. содержится в вертикальных углах, внешних к этому треугольнику. Образуя одинаковые углы со сторонами треугольника, она поэтому является биссектрисой этих внешних углов. Таким образом,



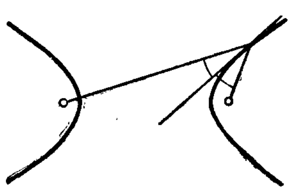
касательная к эллипсу является биссектрисой внешних углов, образованных фокальными радиусами точки касания.

Из этого свойства касательной вытекает, что лучи, исходящие из фокуса вогнутого эллиптического зеркала, собираются в другом его фокусе.

В случае гиперболы касательная (9) пересекает ось Ox в точке с абсциссой $\frac{a^2}{x_0}$. Но, как мы знаем, $|x_0| \geqslant a$, и потому

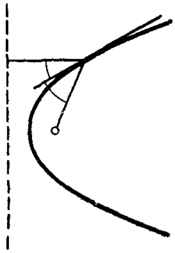
$$\left|\frac{a^2}{x_0}\right| \leqslant a.$$

Это означает, что точка пересечения касательной с осью абсцисс лежит между вершинами гиперболы, а потому и между ее фокусами. Другими словами, касательная проходит внутри треугольника, имеющего вершины в фокусах гиперболы и в точке касания. Образуя равные углы со сторонами этого треугольника, она является, следовательно, биссектрисой его внутреннего угла. Таким образом,



касательная к гиперболе является биссектрисой внутреннего угла, образованного фокальными радиусами точки касания.

Чтобы получить аналог предложения 2 для случая параболы, мы рассмотрим угол, образованный фокальным радиусом точки касания M_0 и перпендикуляром, опущенным из точки касания на директрису параболы (точнее, тот из двух смежных углов, образованных этими прямыми, который является углом треугольника, имеющего вершины в фокусе, в основании перпендикуляра и в точке касания). Острый угол, образованный перпендикуляром и касательной, равен, очевидно, углу, образованному касательной и осью абсцисс, т. е. равен углу при вершине A в треугольнике AFM_0, где A — точка пересечения касательной с осью абсцисс, а F — фокус параболы. Но точка A имеет, очевидно, абсциссу $-x_0$. Поэтому ее расстояние до фокуса F равно $\frac{p}{2}+x_0$ (напомним, что $x \geqslant 0$), т. е. равно расстоянию δ_{M_0} от точки касания M_0 до директрисы, а значит (см. предложение 1 п. 1), равно расстоянию r_{M_0} от точки M_0 до фокуса F. Следовательно, треугольник AFM_0 — равнобедренный, и потому углы при его вершинах A и M равны. Тем самым доказано, что угол, образованный касательной с перпендикуляром, опущенным из точки касания на директрису, равен углу, образованному касательной с фокальным радиусом точки касания. Другими словами, мы доказали следующее



Предложение 3. *Касательная к параболе является биссектрисой угла, образованного фокальным радиусом точки касания и перпендикуляром, опущенным из точки касания на директрису.*

Замечание 3. В изложенном доказательстве молчаливо предполагалось, что точка M_0 отлична от вершины (0, 0) параболы. Однако доказанное утверждение остается справедливым и в этом случае, поскольку касательная к параболе в ее вершине перпендикулярна оси параболы.

Из доказанного свойства касательной к параболе следует, что лучи, исходящие из фокуса вогнутого параболического зеркала, отражаются параллельным пучком, а именно, параллельно оси зеркала. На этом свойстве параболических зеркал основано устройство прожекторов, зеркальных телескопов, фар автомобилей и т. п.

4. Семейства софокусных эллипсов и гипербол

Пусть на плоскости даны две (различные) точки F_1 и F_2. В этом пункте мы изучим семейство всех эллипсов и гипербол, имеющих точки F_1 и F_2 своими фокусами.

Выберем прямоугольные координаты x, y так, чтобы точка F_1 имела координаты $(-c, 0)$, а точка F_2 — координаты $(c, 0)$, где c — половина расстояния между точками F_1 и F_2.

Ясно, что для любого эллипса (и любой гиперболы) с фокусами F_1 и F_2 прямая, соединяющая фокусы (т. е. ось абсцисс), и их медиатриса (т. е. ось ординат) являются осями симметрии эллипса (гиперболы). Это показывает, что для любой линии нашего «семейства софокусных эллипсов и гипербол» координаты x, y являются каноническими координатами. Следовательно, уравнение этой линии мы можем записать в виде

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1,$$

где A и B — некоторые числа, обладающие тем свойством, что

$$A-B=c^2.$$

Выбрав в качестве «начального» произвольный эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где

$$a^2-b^2=c^2,$$

$$a>b>0,$$

и положив

$$\lambda=A-a^2=B-b^2,$$

мы можем уравнение произвольной линии рассматриваемого семейства записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1, \tag{1}$$

где λ — некоторый параметр (отличный от $-a^2$ и $-b^2$).

Это уравнение обычно называется *каноническим уравнением семейства софокусных эллипсов и гипербол.*

Возможны следующие случаи:

1. $-\infty<\lambda<a^2$. Уравнение (1) не удовлетворяется ни одной точкой плоскости. Этот случай нам не интересен и потому в дальнейшем мы будем исключать его из рассмотрения.

2. $-a^2<\lambda<-b^2$. Уравнение (1) является уравнением гиперболы с действительной полуосью $\sqrt{a^2+\lambda}$ и мнимой полуосью $\sqrt{-b^2-\lambda}$.

3. $-b^2<\lambda<+\infty$. Уравнение (1) является уравнением эллипса с большой полуосью $\sqrt{a^2+\lambda}$ и малой полуосью $\sqrt{b^2+\lambda}$.

При $\lambda\to -a^2+0$ действительная полуось гиперболы (1) неограниченно убывает, и эта гипербола все теснее прижимается с двух сторон к оси ординат Oy. Уравнение же (1)[1] при $\lambda\to -a^2+0$ переходит в уравнение $x^2=0$ дважды взятой оси Oy. Таким образом, дважды взятую ось ординат можно рассматривать как предельный случай гипербол (1) при $\lambda\to -a^2+0$.

При $\lambda\to -b^2-0$ действительная полуось гиперболы (1) приближается к $c=\sqrt{a^2-b^2}$, а мнимая полуось неограниченно убывает. Сама же гипербола все теснее прижимается с двух сторон к оси абсцисс, из которой вырезан отрезок между фокусами.

При $\lambda\to -b^2+0$ большая полуось эллипса (1) приближается к $c=\sqrt{a^2-b^2}$, а малая неограниченно убывает. Сам же эллипс все теснее охватывает отрезок оси абсцисс между фокусами.

---

[1]) Точнее, равносильное ему (при $\lambda\neq -a^2, -b^2$) уравнение

$$(b^2+\lambda)\,x^2+(a^2+\lambda)\,y^2=(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda).$$

Поскольку уравнение (1) при $\lambda \to -b^2$ дает дважды взятую ось абсцисс $y^2=0$, мы можем, таким образом, сказать, что пределом кривых (1) при $\lambda \to -b^2$ является дважды взятая ось Ox.

При $\lambda \to +\infty$ эллипс (1) неограниченно увеличивается, а его эксцентриситет e стремится к единице (эллипс «округляется»).

Предложение 1. *Через любую точку плоскости (не принадлежащую координатным осям) проходят точно две кривые рассматриваемого семейства: одна — являющаяся эллипсом, и другая — являющаяся гиперболой.*

Доказательство. Условие, что линия (1) проходит через точку (x, y), выражается уравнением

$$x^2(b^2+\lambda)+y^2(a^2+\lambda)=(a^2+\lambda)(b^2+\lambda),$$

т. е. уравнением

$$\lambda^2+(a^2+b^2-x^2-y^2)\lambda+a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2=0.$$

Поскольку

$$(a^2+b^2-x^2-y^2)^2-4(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)=$$
$$=(b^2-a^2+x^2-y^2)^2+4x^2y^2,$$

это уравнение имеет два вещественных корня

$$\lambda_{1,2}=\frac{x^2+y^2-a^2-b^2\pm\sqrt{(b^2-a^2+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}{2}, \qquad (2)$$

при $x\neq 0$ и $y\neq 0$ отличных от $-a^2$ и $-b^2$.

Так как при $x\neq 0$ и $y\neq 0$ функция

$$f(\lambda)=\lambda^2+(a^2+b^2-x^2-y^2)\lambda+a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2$$

положительна при $\lambda=-a^2$ (равна $(a^2-b^2)x^2$), отрицательна при $\lambda=-b^2$ (равна $(b^2-a^2)y^2$) и положительна при $\lambda\to+\infty$, то один из корней (2) расположен на отрезке $(-a^2, -b^2)$ (и потому ему соответствует гипербола), а другой — на отрезке $(-b^2, +\infty)$ (и потому ему соответствует эллипс).

Определение 1. Числа λ_1 и λ_2, определенные формулой (2), называются *эллиптическими координатами* (на плоскости).

Чтобы найти выражения прямоугольных координат x, y через эллиптические координаты λ_1, λ_2, положим в тождестве

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$$

сначала $\lambda=-a^2$, а затем $\lambda=-b^2$. Тогда мы получим, что

$$(a^2-b^2)x^2=(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2),$$
$$-(a^2-b^2)y^2=(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2),$$

откуда следует, что

$$x^2 = \frac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}{a^2-b^2},$$
$$y^2 = -\frac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}{a^2-b^2}. \tag{3}$$

Обратим внимание на то, что эти формулы определяют лишь квадраты прямоугольных координат, так что для каждой пары значений

$$\lambda_1,\ \lambda_2, \quad -a^2 < \lambda_1 < -b^2, \quad -b^2 < \lambda_2 < +\infty,$$

мы получим по четыре точки. Собственно говоря, этого и следовало ожидать, поскольку софокусные эллипс и гипербола пересекаются в четырех точках. Таким образом, эллиптические координаты являются «настоящими» координатами только в каждом координатном квадранте.

Координатными линиями, т. е. линиями $\lambda_1 = \mathrm{const}$ и $\lambda_2 = \mathrm{const}$, для эллиптических координат являются, по определению, софокусные эллипсы и гиперболы (линии $\lambda_1 = \mathrm{const}$ — гиперболы, а линии $\lambda_2 = \mathrm{const}$ — эллипсы). Как мы знаем (см. п. 3), касательная к эллипсу одинаково наклонена к фокальным радиусам точки касания и является внешней биссектрисой угла между ними, тогда как для гиперболы касательная является внутренней биссектрисой угла между фокальными радиусами точки касания. Отсюда следует, что

софокусные эллипс и гипербола пересекаются под прямым углом.

Координаты на плоскости называются *ортогональными*, если их координатные линии пересекаются под прямым углом. Таким образом, последнее утверждение означает, что

эллиптические координаты являются ортогональными координатами.

Мы не можем здесь вдаваться в исследование многих замечательных свойств эллиптических координат. Отметим лишь следующее свойство «равнодиагональности»:

любой «криволинейный четырехугольник», образованный двумя линиями $\lambda_1 = \mathrm{const}$ *и двумя линиями* $\lambda_2 = \mathrm{const}$, *имеет диагонали равной длины.*

Упражнение. Докажите свойство равнодиагональности.

Замечание 1. Иногда *эллиптическими координатами* называются величины u и v, связанные с координатами λ_1 и λ_2 соотношениями

$$\sin u = \frac{\sqrt{a^2+\lambda_1}}{c}, \quad \operatorname{ch} v = \frac{\sqrt{a^2+\lambda_2}}{c},$$
$$0 \leqslant u < 2\pi, \quad 0 \leqslant v < \infty.$$

Задание. Докажите, что прямоугольные координаты x, y выражаются через координаты u и v по формулам

$$x = c \sin u \operatorname{ch} v,$$
$$y = \pm c \cos u \operatorname{sh} v.$$

Координатная линия $u = \text{const}$ является гиперболой

$$\frac{x^2}{c^2 \sin^2 u} - \frac{y^2}{c^2 \cos^2 u} = 1,$$

а координатная линия $v = \text{const}$ — эллипсом

$$\frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 v} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 v} = 1.$$

Упражнение. Рассмотрите аналогичным образом семейства софокусных парабол и постройте соответствующие *параболические координаты.*

5. Диаметры конических сечений

Рассмотрим произвольное семейство параллельных хорд параболы $y^2 = 2px$, т. е. семейство отрезков, получающихся при пересечении параболы прямыми

$$x = ky + \tau$$

с одним и тем же k и различными τ (конечно, удовлетворяющими условию $\tau > -\frac{pk^2}{2}$; см. п. 2). Координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) концов любой хорды этого семейства связаны соотношениями

$$y_1^2 = 2px_1, \quad y_2^2 = 2px_2, \quad \frac{x_2 - x_1}{y_1 - y_2} = k$$

(первые два соотношения выражают тот факт, что концы хорды принадлежат параболе, а третье — что хорда имеет угловой коэффициент k). Следовательно,

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p(x_2 - x_1),$$

т. е.

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = p\,\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

и потому

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = pk.$$

Но число $\frac{y_1 + y_2}{2}$ является, как мы знаем, ординатой середины отрезка с концами в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2), т. е. середины рассматриваемой хорды. Тем самым мы доказали, что *середины параллельных хорд параболы (имеющих относительно оси ординат угловой коэффициент k) принадлежат прямой*

$$y = pk,$$

параллельной оси параболы.

Определение 1. Если для некоторой линии и некоторого семейства параллельных хорд этой линии середины хорд семейства принадлежат одной прямой, то эта прямая называется *диаметром* данной линии, *сопряженным* с направлением данных хорд.

В этой терминологии доказанное свойство параболы означает, во-первых, что

с любым неасимптотическим направлением сопряжен некоторый диаметр параболы,

и, во-вторых, что

все диаметры параболы параллельны ее оси (и, таким образом, имеют асимптотическое направление).

Кроме того, поскольку в виде $y = pk$ можно (при соответствующем выборе k) представить уравнение любой прямой, параллельной оси параболы, мы видим, что

любая прямая, параллельная оси параболы, является ее диаметром,

а поскольку представление этой прямой в виде $y = pk$ единственно, то

любой диаметр параболы сопряжен с однозначно определенным (неасимптотическим) направлением.

О диаметре, сопряженном с асимптотическим направлением, говорить не приходится, поскольку хорд асимптотического направления не существует.

Определение 2. Диаметр линии называется *главным*, если он перпендикулярен хордам, с направлением которых он сопряжен.

Поскольку любой диаметр параболы параллелен оси Ox, каждый главный диаметр параболы (если он существует) должен быть сопряжен с хордами, параллельными оси Oy. Но для таких хорд $k = 0$, и потому диаметр имеет уравнение $y = 0$, т. е. является осью параболы. Таким образом,

парабола обладает единственным главным диаметром, являющимся ее осью.

Не нужно думать, что любая точка диаметра является серединой некоторой хорды. Действительно, тот факт, что точка (x, y) диаметра $y = pk$ является серединой некоторой хорды (с угловым коэффициентом k) означает, что

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = pk,$$

где x_1, y_1 и x_2, y_2 — такие числа, что

$$y_1^2 = 2px_1, \quad y_2^2 = 2px_2.$$

В силу тождества

$$\frac{y_1^2 + y_2^2}{2} = \left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2,$$

мы имеем:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2p} = \frac{1}{p}\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2 + \frac{pk^2}{2}, \tag{1}$$

откуда непосредственно вытекает, что

точка (x, y) *диаметра* $y = pk$ *тогда и только тогда является серединой некоторой хорды (с угловым коэффициентом* k*), когда*

$$x > \frac{pk^2}{2}. \tag{2}$$

Действительно, если точка (x, y) является серединой хорды, то $x > \frac{pk^2}{2}$ согласно формуле (1). Обратно, если $x > \frac{pk^2}{2}$, то из соотношения (1) мы получим для $\frac{y_1 - y_2}{2}$ вещественное значение $\sqrt{p\left(x - \frac{pk^2}{2}\right)}$. Решая затем уравнения

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = pk,$$

$$\frac{y_1 - y_2}{2} = \sqrt{p\left(x - \frac{pk^2}{2}\right)},$$

мы найдем ординаты концов хорды, серединой которой является данная точка (x, y).

Таким образом, мы видим, что

на диаметре $y = pk$, *сопряженном с хордами, имеющими угловой коэффициент* k, *середины этих хорд заполняют полупрямую, характеризующуюся неравенством* (2).

Иногда *диаметром* параболы, сопряженным с хордами данного направления, называют геометрическое место середин этих хорд, т. е. полупрямую (2).

Концевая точка

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{pk^2}{2}, pk\right)$$

полупрямой (2) принадлежит параболе (ибо $y_0^2 = 2px_0$), и прямая, проходящая через эту точку параллельно хордам рассматриваемого направления, имеет уравнение

$$x = ky + x_0 - ky_0.$$

Поскольку $y_0 = pk$, мы можем это уравнение переписать в следующем виде:

$$x = \frac{y_0}{p} y + x_0 - \frac{y_0^2}{p},$$

т. е. в виде

$$x = \frac{y_0}{p} y - x_0.$$

Сравнив это уравнение с уравнением касательной к параболе в точке (x_0, y_0) (см. уравнение (2) п. 8), мы немедленно получим, что они выражают одну и ту же прямую. Тем самым доказано, что

касательная к параболе параллельна хордам, с направлением которых сопряжен диаметр, проходящий через точку касания.

Похожие результаты имеют место для эллипса и гиперболы. Например, рассмотрим для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > 0, \quad b > 0, \tag{3}$$

семейство параллельных хорд, получающихся при пересечении гиперболы прямыми

$$y = kx + \tau$$

с одним и тем же $k \neq \pm \frac{b}{a}$ и различными τ (конечно, удовлетворяющими условию $\tau^2 > a^2k^2 - b^2$; см. п. 2).

Координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) концов любой хорды этого семейства связаны соотношениями

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$$

(первые два соотношения выражают тот факт, что концы хорды принадлежат гиперболе, а третье — что хорда имеет данный угловой коэффициент k). Следовательно,

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{a^2} - \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} = 0,$$

т. е.

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2},$$

и потому

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Это показывает, что

середины параллельных хорд гиперболы (имеющих неасимптотическое направление, характеризуемое угловым коэффи-

циентом k) принадлежат прямой

$$y = \frac{b^2}{a^2k} x, \tag{4}$$

проходящей через центр гиперболы.

Другими словами,

прямая (4) *является диаметром гиперболы* (3), *сопряженным с хордами, имеющими угловой коэффициент k.*

Середины хорд, параллельных одной из координатных осей, принадлежат, очевидно, другой координатной оси. Следовательно,

координатные оси (*оси симметрии гиперболы*) *также являются ее диаметрами, причем каждый из них сопряжен с хордами, имеющими направление другого.*

Таким образом, единственными прямыми, проходящими через центр гиперболы, которые, возможно, не являются его диаметрами, являются прямые с угловым коэффициентом вида $\frac{b^2}{a^2k}$, где $k = \pm \frac{b}{a}$ — угловой коэффициент некоторого асимптотического направления. Но ясно, что эти прямые и на самом деле не являются диаметрами, поскольку хорд асимптотического направления не существует и, тем более, не существует их середин.

Поскольку при $k = \pm \frac{b}{a}$ число $\frac{b^2}{a^2k}$ равно $\pm \frac{b}{a}$, мы видим, таким образом, что этими исключительными прямыми являются асимптоты гиперболы. Тем самым, мы доказали, что

любая прямая, проходящая через центр гиперболы и не являющаяся ее асимптотой, является диаметром гиперболы.

Определение 3. Два направления, характеризующиеся угловыми коэффициентами k и k', называются *сопряженными* (относительно гиперболы (3)), если

$$kk' = \frac{b^2}{a^2}. \tag{5}$$

Кроме того, направления координатных осей также считаются сопряженными.

В этой терминологии доказанное выше утверждение означает, что

диаметром гиперболы, сопряженным с хордами данного неасимптотического направления, является прямая, проходящая через центр и имеющая (*неасимптотическое!*) *направление, сопряженное с данным.*

Диаметры, имеющие сопряженные направления, называются *сопряженными.*

Ясно, что

отношение сопряженности направлений (*и диаметров*) *симметрично, т. е. если одно направление сопряжено с другим, то второе сопряжено с первым.*

Действительно, для направлений координатных осей это очевидно, а для остальных направлений непосредственно вытекает из симметричности формулы (5) относительно k и k'.

Другими словами,

середины хорд, параллельных некоторому диаметру, принадлежат диаметру, параллельному хордам, середины которых лежат на данном диаметре.

Коротко можно сказать, что

из двух сопряженных диаметров каждый сопряжен с хордами, параллельными другому диаметру.

При $k=k'$ равенство (5) возможно только при $k=\pm\frac{b}{a}$. Следовательно,

асимптотические направления гиперболы (и только они) сопряжены сами себе.

На этом основании асимптоты гиперболы иногда называются ее «самосопряженными диаметрами».

Напомним, что диаметр называется *главным*, если хорды, с которыми он сопряжен, ему перпендикулярны. Таким образом,

диаметр гиперболы тогда и только тогда является главным, когда он перпендикулярен сопряженному диаметру.

В частности,

диаметр, сопряженный с главным диаметром, сам является главным.

Одна пара главных диаметров очевидна: это — пара, состоящая из осей гиперболы. Поскольку (при k, $k'\neq 0, \infty$) условие перпендикулярности

$$kk'=-1$$

не может быть выполнено одновременно с условием сопряженности

$$kk'=\frac{b^2}{a^2},$$

никаких других главных диаметров гипербола не имеет. Таким образом,

оси гиперболы и только они являются главными диаметрами гиперболы.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка диаметра (4). Прямая, проходящая через точку M_0 и имеющая угловой коэффициент k, выражается уравнением

$$x=kx+t_0,$$

где $t_0=y_0-kx_0$. Но мы знаем (см. п. 2), что эта прямая тогда и только тогда пересекает гиперболу в двух точках, когда

$$t_0^2>a^2k^2-b^2,$$

т. е. когда

$$(y_0 - kx_0)^2 > a^2k^2 - b^2. \tag{6}$$

Следовательно, это неравенство является необходимым и достаточным условием того, чтобы точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежала некоторой хорде гиперболы, имеющей угловой коэффициент k (и потому, являясь точкой диаметра (4), была серединой этой хорды). Но, по условию,

$$y_0 = \frac{b^2}{a^2k} x_0,$$

и потому

$$y_0 - kx_0 = -\frac{a^2k^2 - b^2}{a^2k} x_0.$$

Подставляя это выражение в неравенство (6) (и опуская индексы), мы окончательно получаем, что

точка $M(x, y)$, принадлежащая диаметру, сопряженному с хордами, имеющими угловой коэффициент k, тогда и только тогда является серединой одной из этих хорд, когда

$$x^2 > \frac{a^4k^2}{a^2k^2 - b^2}. \tag{7}$$

При $|k| < \frac{b}{a}$ это неравенство удовлетворяется тождественно, т. е. при всех значениях x, а при $|k| > \frac{b}{a}$ оно определяет на диаметре (4) две полупрямые, получающиеся при удалении из диаметра некоторого отрезка, концами которого являются точки с координатами

$$x_0 = \frac{a^2k}{\pm\sqrt{a^2k^2 - b^2}}, \quad y_0 = \frac{b^2}{\pm\sqrt{a^2k^2 - b^2}}, \tag{8}$$

удовлетворяющими уравнению гиперболы (3). Тем самым доказано, что

на каждом диаметре гиперболы точки, являющиеся серединами хорд, имеющих направление, сопряженное с направлением диаметра, либо заполняют весь диаметр, либо принадлежат внешности отрезка, высекаемого на диаметре гиперболой.

Заметив, что при $|k| < \frac{b}{a}$ диаметр (4) вообще не пересекает гиперболы и потому в этом случае «внешность отрезка, высекаемого на диаметре гиперболой» представляет собой весь диаметр, мы получаем, что во всех случаях можно считать, что середины указанных хорд заполняют внешность отрезка, высекаемого на диаметре гиперболой.

Без труда проверяется, что это утверждение остается верным и для диаметров, не представимых в виде (4), т. е. для осей гиперболы. При этом на действительной оси середины

перпендикулярных хорд заполняют внешность отрезка с концами в вершинах гиперболы, а на мнимой оси исчерпывают всю эту ось.

Согласно формуле (10) п. 3 угловой коэффициент касательной в каждой из точек с координатами (8) равен

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}=k.$$

Таким образом, так же как для параболы,

касательная к гиперболе параллельна хордам, с направлением которых сопряжен диаметр, проходящий через точку касания.

Очевидно, что это утверждение справедливо и для диаметров, являющихся осями гиперболы.

Совершенно аналогичные результаты имеют место и для эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a\geqslant b>0. \tag{9}$$

Во-первых,

диаметром эллипса (9), *сопряженным с хордами, имеющими угловой коэффициент k, является прямая*

$$y=-\frac{b^2}{a^2k}x, \tag{10}$$

проходящая через центр эллипса, причем любая прямая, проходящая через центр эллипса, является ее диаметром.

В соответствии с формулой (10) направления, характеризуемые угловыми коэффициентами k и k', называются *сопряженными* относительно эллипса (9), если

$$kk'=-\frac{b^2}{a^2} \tag{11}$$

(направления координатных осей также, конечно, считаются сопряженными).

Так же как и для гиперболы,

отношение сопряженности направлений (*и диаметров*) *взаимно, т. е. из двух сопряженных диаметров каждый сопряжен с хордами, параллельными другому диаметру.*

Самосопряженных направлений (диаметров) эллипс не имеет.

Для эллипса, являющегося окружностью ($a=b$), условие (11) сопряженности совпадает с условием

$$kk'=-1 \tag{12}$$

перпендикулярности. Поэтому

диаметры окружности тогда и только тогда сопряжены, когда они перпендикулярны.

В частности,

любой диаметр окружности является главным диаметром.

Напротив, поскольку при $a > b$ условия (11) и (12) одновременно выполнены быть не могут,

единственными главными диаметрами эллипса, не являющегося окружностью, являются его оси.

Простое вычисление показывает, что

точка $M(x, y)$ *диаметра* (10) *тогда и только тогда является серединой одной из сопряженных хорд, когда*

$$|x| < \frac{a^2|k|}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}. \tag{13}$$

Неравенство (13) определяет на диаметре некоторый отрезок, концы которого принадлежат эллипсу.

Далее, так же как для гиперболы,

касательная к эллипсу параллельна хордам, с направлением которых сопряжен диаметр, проходящий через точку касания.

Задание. Докажите (аналитически) все сформулированные выше свойства диаметров эллипса.

Замечание 1. Все основные свойства диаметров эллипса можно получить чисто геометрически без всяких выкладок, воспользовавшись тем, что любой эллипс получается сжатием окружности к ее диаметру, и заметив, что при любом сжатии параллельные прямые переходят в параллельные прямые, а середины отрезков — в середины отрезков. Действительно, тот факт, что середины параллельных хорд окружности принадлежат одной прямой, очевиден. С другой стороны, любое семейство параллельных хорд эллипса получается при рассматриваемом сжатии из некоторого семейства параллельных хорд окружности. Следовательно, геометрическое место середин параллельных хорд эллипса является образом при этом сжатии геометрического места середин параллельных хорд окружности и потому принадлежит некоторой прямой. С этой точки зрения, сопряженные диаметры эллипса — это диаметры, являющиеся образами при сжатии перпендикулярных диаметров окружности, а главные диаметры — это перпендикулярные диаметры, остающиеся после сжатия перпендикулярными, и т. д.

6. Теоремы Аполлония

Согласно формуле (8) п. 2 диаметр

$$y = kx$$

пересекает эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a \geqslant b > 0,$$

в точках с абсциссами

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}$$

и, следовательно, с ординатами

$$y = \pm \frac{abk}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}.$$

Рассмотрим теперь сопряженный диаметр

$$y = k'x.$$

Поскольку $k' = -\frac{b^2}{a^2k}$, то

$$a^2k'^2 + b^2 = \frac{b^4}{a^2k^2} + b^2 = b^2\frac{a^2k^2 + b^2}{a^2k^2}, \qquad abk' = -\frac{b^3}{ak}.$$

Следовательно, этот сопряженный диаметр пересекает эллипс в точках с координатами

$$x = \pm \frac{a^2k}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}, \qquad y = \mp \frac{b^2}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}.$$

Определение 1. Отрезок, соединяющий центр эллипса (или гиперболы) с некоторой его (ее) точкой, называется *радиусом* эллипса (гиперболы).

Определение 2. Два радиуса эллипса, имеющие сопряженные направления, называются *сопряженными.*

Из только что доказанных формул непосредственно вытекает, что квадрат a'^2 длины a' радиуса, имеющего угловой коэффициент k, выражается формулой

$$a'^2 = \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{abk}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}\right)^2 = \frac{a^2b^2(1 + k^2)}{a^2k^2 + b^2},$$

а квадрат b'^2 длины b' сопряженного радиуса — формулой

$$b'^2 = \left(\frac{a^2k}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b^2}{\sqrt{a^2k^2 + b^2}}\right)^2 = \frac{a^4k^2 + b^4}{a^2k^2 + b^2}.$$

Следовательно,

$$a'^2 + b'^2 = \frac{a^2b^2 + a^2b^2k^2 + a^4k^2 + b^4}{a^2k^2 + b^2} = a^2 + b^2.$$

Тем самым мы доказали, что

сумма площадей квадратов, построенных на произвольной паре сопряженных радиусов эллипса, равна сумме площадей квадратов, построенных на его полуосях:

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

Найдем теперь площадь параллелограмма, построенного на паре сопряженных радиусов. Как мы знаем (п. 4 § 6 гл. 1), площадь параллелограмма, построенного на векторах (a^1, a^2) и (b^1, b^2), равна абсолютной величине определителя

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}.$$

В нашем случае этот определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} \pm\dfrac{ab}{\sqrt{a^2k^2+b^2}} & \dfrac{abk}{\sqrt{a^2k^2+b^2}} \\ \pm\dfrac{a^2k}{\sqrt{a^2k^2+b^2}} & \mp\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2k^2+b^2}} \end{vmatrix}$$

и потому равен

$$\frac{ab}{a^2k^2+b^2}\begin{vmatrix} 1 & k \\ a^2k & -b^2 \end{vmatrix} = -ab.$$

Тем самым мы доказали, что

площадь параллелограмма, построенного на произвольной паре сопряженных радиусов эллипса, равна площади ab прямоугольника, построенного на его полуосях.

Чтобы доказать аналогичные теоремы для гиперболы, удобно наряду с данной гиперболой

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a>0, \quad b>0, \tag{1}$$

рассматривать также гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1, \qquad a>0, \quad b>0, \tag{2}$$

для которой каноническими координатами являются переставленные координаты x, y.

Определение 3. Гипербола (2) называется гиперболой, *сопряженной* с гиперболой (1).

Ясно, что

центр, асимптоты и основной прямоугольник сопряженной гиперболы (2) *совпадают с центром, асимптотами и основным прямоугольником исходной гиперболы* (1).

Кроме того,

действительной (мнимой) осью гиперболы (2) *является мнимая (действительная) ось гиперболы* (1).

В частности,

вершинами гиперболы (2) *являются точки* $(0, b)$ *и* $(0, -b)$ *оси ординат.*

Наконец, легко видеть, что

гиперболы (1) *и* (2) *имеют одни и те же диаметры, причем два диаметра тогда и только тогда сопряжены относительно гиперболы* (1), *когда они сопряжены относительно гиперболы* (2).

Действительно, тот факт, что диаметры обеих гипербол совпадают, очевиден (ибо диаметром является любая прямая, проходящая через центр гиперболы и отличная от ее асимптот, а центр и асимптоты у наших гипербол совпадают). Далее, условие сопряженности диаметров $y = kx$ и $y = k'x$ относительно гиперболы (1) имеет вид

$$kk' = \frac{b^2}{a^2}. \qquad (3)$$

Чтобы написать условие сопряженности этих диаметров относительно гиперболы (2), мы должны их уравнения переписать в виде $x = \frac{1}{k} y$ и $x = \frac{1}{k'} y$ (ибо абсциссой канонической системы координат гиперболы (2) является координата y, а ординатой — координата x) и учесть, что a является мнимой полуосью гиперболы (2), а b — действительной. Поэтому условие сопряженности рассматриваемых диаметров относительно гиперболы (2) имеет вид

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k'} = \frac{a^2}{b^2},$$

что, очевидно, совпадает с (3). Наконец, оси координат, очевидно, сопряжены относительно обеих гипербол.

Диаметр

$$y = kx$$

пересекает гиперболу (1), если $|k| < \frac{b}{a}$, и пересекает сопряженную гиперболу (2), если $|k| > \frac{b}{a}$. Поскольку для сопряженного диаметра

$$y = k'x$$

неравенство $|k'| < \frac{b}{a}$ имеет место тогда и только тогда, когда $|k| > \frac{b}{a}$, мы видим, следовательно, что

для любой пары сопряженных диаметров один из диаметров пересекает исходную гиперболу, а другой — сопряженную.

Согласно формуле (11) п. 2 диаметр

$$y = kx, \quad |k| < \frac{b}{a},$$

пересекает гиперболу (1) в точках с абсциссами

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}$$

и, следовательно, с ординатами

$$y = \pm \frac{abk}{\sqrt{b^2 - ak^2}}.$$

Поэтому квадрат a'^2 длины a' радиуса гиперболы (1), имеющего угловой коэффициент k, выражается формулой

$$a'^2 = \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}\right)^2 + \left(\frac{abk}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}\right)^2 = \frac{a^2b^2(1 + k^2)}{b^2 - a^2k^2}.$$

Аналогично, сопряженный диаметр $y = k'x$ пересекает сопряженную гиперболу (2) в точках с абсциссами

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2k'^2 - b^2}}$$

и ординатами

$$y = \pm \frac{abk'}{\sqrt{a^2k'^2 - b^2}}.$$

Но, по определению, $k' = \frac{b^2}{a^2k}$, и потому

$$a^2k'^2 - b^2 = \frac{b^4}{a^2k^2} - b^2 = b^2 \frac{b^2 - a^2k^2}{a^2k^2}, \qquad abk' = \frac{b^3}{ak}.$$

Следовательно, координаты точек пересечения сопряженного диаметра с сопряженной гиперболой могут быть записаны в следующем виде:

$$x = \pm \frac{a^2|k|}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}, \qquad y = \pm \frac{\varepsilon b^2}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}},$$

где $\varepsilon = +1$, если $k > 0$, и $\varepsilon = -1$, если $k < 0$.

Эти формулы получены в предположении, что сопряженный диаметр имеет уравнение вида $y = k'x$, т. е. в предположении, что $k \neq 0$. Но при $k = 0$ сопряженным диаметром является ось ординат, пересекающая сопряженную гиперболу в точках $(0, \pm b)$. Поэтому полученные формулы справедливы и при $k = 0$, если только мы условимся, что в этом случае $\varepsilon = 1$ (или, что приводит к тому же результату, $\varepsilon = -1$).

Определение 4. Радиусы сопряженных гипербол (1) и (2), имеющие сопряженные направления, называются *сопряженными* (ср. определение 2).

Из доказанных выше формул непосредственно вытекает, что квадрат b'^2 длины b' радиуса гиперболы (2), сопряженного с радиусом гиперболы (1), имеющим угловой коэффициент k, выражается формулой

$$b'^2 = \left(\frac{a^2|k|}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon b^2}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}\right)^2 = \frac{a^4k^2 + b^4}{b^2 - a^2k^2}.$$

Следовательно,

$$b'^2 - a'^2 = \frac{a^4k^2 + b^4 - a^2b^2(1 + k^2)}{b^2 - a^2k^2} = b^2 - a^2.$$

Таким образом,

разность площадей квадратов, построенных на любой паре сопряженных радиусов, равна разности площадей квадратов, построенных на полуосях гиперболы:

$$b'^2 - a'^2 = b^2 - a^2.$$

Наконец, площадь параллелограмма, построенного на паре сопряженных радиусов, равна абсолютной величине определителя

$$\begin{vmatrix} \pm \dfrac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} & \pm \dfrac{abk}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} \\ \pm \dfrac{a^2|k|}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} & \pm \dfrac{\varepsilon b^2}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} \end{vmatrix} = \varepsilon ab$$

(напомним, что, по определению, $k|k| = \varepsilon k^2$). Таким образом, как и для эллипса,

площадь параллелограмма, построенного на любой паре сопряженных радиусов гиперболы, равна площади ab прямоугольника, построенного на полуосях гиперболы.

Доказанные свойства сопряженных радиусов эллипсов и гипербол известны как т е о р е м ы А п о л л о н и я.

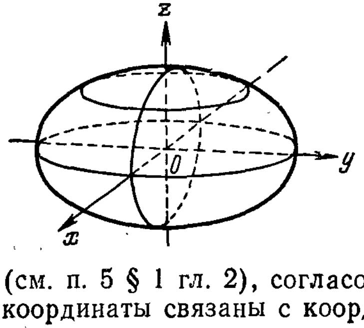
§ 3. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Эллипсоиды

Определение 1. *Эллипсоидом* называется поверхность, выражающаяся в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a \geqslant b \geqslant c > 0, \tag{1}$$

где $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Эта система координат называется *канонической* (относительно данного эллипсоида), а уравнение (1) называется *каноническим уравнением* эллипсоида.



При $a = b = c$ уравнение (1) является уравнением сферы радиуса a с центром в начале координат.

Таким образом,

сфера является частным случаем эллипсоида.

Пусть $a = b$. Перейдем к цилиндрическим координатам ρ, φ, z (см. п. 5 § 1 гл. 2), согласованным с координатами x, y, z. Эти координаты связаны с координатами x, y, z формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z.$$