Таким образом,

разность площадей квадратов, построенных на любой паре сопряженных радиусов, равна разности площадей квадратов, построенных на полуосях гиперболы:

$$b'^2 - a'^2 = b^2 - a^2.$$

Наконец, площадь параллелограмма, построенного на паре сопряженных радиусов, равна абсолютной величине определителя

$$\begin{vmatrix} \pm \dfrac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} & \pm \dfrac{abk}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} \\ \pm \dfrac{a^2|k|}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} & \pm \dfrac{\varepsilon b^2}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} \end{vmatrix} = \varepsilon ab$$

(напомним, что, по определению, $k|k| = \varepsilon k^2$). Таким образом, как и для эллипса,

площадь параллелограмма, построенного на любой паре сопряженных радиусов гиперболы, равна площади ab прямоугольника, построенного на полуосях гиперболы.

Доказанные свойства сопряженных радиусов эллипсов и гипербол известны как теоремы Аполлония.

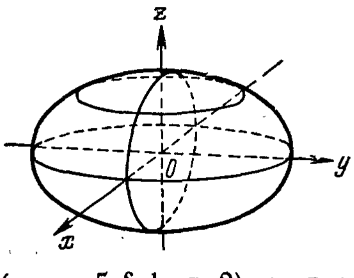
§ 3. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Эллипсоиды

Определение 1. *Эллипсоидом* называется поверхность, выражающаяся в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a \geqslant b \geqslant c > 0, \tag{1}$$

где $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Эта система координат называется *канонической* (относительно данного эллипсоида), а уравнение (1) называется *каноническим уравнением* эллипсоида.



При $a = b = c$ уравнение (1) является уравнением сферы радиуса a с центром в начале координат.

Таким образом,

сфера является частным случаем эллипсоида.

Пусть $a = b$. Перейдем к цилиндрическим координатам ρ, φ, z (см. п. 5 § 1 гл. 2), согласованным с координатами x, y, z. Эти координаты связаны с координатами x, y, z формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z.$$

Подставив эти выражения в уравнение (1) (при $a=b$), мы получим уравнение

$$\frac{\rho^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Это уравнение не зависит от φ, и потому вместе с некоторой точкой $M_0(\rho_0, \varphi_0, z_0)$ ему удовлетворяет также любая точка $M(\rho_0, \varphi, z_0)$, где φ произвольно. Геометрически это означает, что вместе с точкой M_0 эллипсоиду принадлежит и любая точка M, получающаяся из точки M_0 поворотом вокруг оси Oz. Поскольку плоскость $y=0$ пересекает эллипсоид (1) по эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

тем самым доказано, что

эллипсоид

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (2)$$

получается из эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

расположенного в плоскости Oxz, вращением вокруг оси Oz.

Это дает уже вполне отчетливое представление о форме эллипсоида (2) (называемого обычно *эллипсоидом вращения*).

Аналогично,

при $a=c$ или $b=c$ эллипсоид (1) *также является эллипсоидом вращения.*

Например, при $b=c$ он получается из эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

расположенного в плоскости Oxy, вращением вокруг оси Oy.

Замечание 1. Если в плоскости Oxz задана произвольная кривая

$$f(x, z)=0,$$

то при вращении этой кривой вокруг оси Oz получается поверхность, имеющая в цилиндрических координатах ρ, φ, z уравнение

$$f(\rho, z)=0, \qquad (3)$$

не зависящее от φ. Таким образом, уравнение (3) является общим уравнением *поверхностей вращения*. В координатах x, y, z оно имеет вид

$$f(\sqrt{x^2+y^2}, z)=0.$$

Чтобы представить себе вид произвольного эллипсоида (1), рассмотрим преобразование пространства, переводящее произвольную точку $M(x, y, z)$ в точку $M'(x', y', z')$ с координатами

$$x'=x,$$
$$y'=ky,$$
$$z'=z,$$

где k — некоторое положительное число. Это преобразование называется *сжатием* к плоскости Oxz с коэффициентом k.

Поскольку при таком сжатии точка (x, y, z) получается из точки $\left(x, \frac{y}{k}, z\right)$, эллипсоид вращения (2) переходит в результате этого сжатия в поверхность с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(ka)^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

т. е. $\left(\text{при } k=\frac{b}{a}\right)$ в эллипсоид (1). Таким образом,

произвольный эллипсоид (1) *получается из эллипсоида вращения* (2) *сжатием к плоскости* Oxz *с коэффициентом* $\frac{b}{a}$.

Замечание 2. Эллипсоид вращения (2) получается из сферы

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

сжатием пространства к плоскости Oxy с коэффициентом $\frac{c}{a}$. Следовательно,

любой эллипсоид получается из некоторой сферы двумя сжатиями к взаимно перпендикулярным плоскостям.

Другой способ (называемый методом «плоских сечений») представить себе форму эллипсоида (1) заключается в том, чтобы рассмотреть его сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Рассмотрим, например, плоскости $z=h$, параллельные координатной плоскости Oxy. При пересечении этой плоскостью эллипсоида (1) получается линия, имеющая (в координатах x, y, являющихся координатами на плоскости Oxy) уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},$$

т. е. уравнение

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1.$$

Это показывает, что

при $|h|>c$ *плоскость* $z=h$ *не пересекает эллипсоид* (1);

при $|h|=c$ *плоскость* $z=h$ *имеет с эллипсоидом* (1) *одну общую точку (соответственно* $(0, 0, c)$ *или* $(0, 0, -c)$*)*;

при $|h|<c$ *плоскость* $z=h$ *пересекает эллипсоид* (1) *по эллипсу с полуосями*

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},\quad b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},$$

наибольшими (и равными a *и* b*) при* $h=0$ *и монотонно уменьшающимися до нуля, когда* $|h|$ *возрастает от нуля до* c.

Аналогично показывается, что

при $|h| > b$ *плоскость* $y = h$ *не пересекает эллипсоид* (1);

при $|h| = b$ *плоскость* $y = h$ *имеет с эллипсоидом* (1) *одну общую точку* (*соответственно* $(0, b, 0)$ *или* $(0, -b, 0)$);

при $|h| < b$ *плоскость* $y = h$ *пересекает эллипсоид* (1) *по эллипсу с полуосями*

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}, \quad c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}},$$

наибольшими (*и равными* a *и* c) *при* $h = 0$ *и монотонно уменьшающимися до нуля, когда* $|h|$ *возрастает от нуля до* b;

и что

при $|h| > a$ *плоскость* $x = a$ *не пересекает эллипсоид* (1);

при $|h| = a$ *плоскость* $x = a$ *имеет с эллипсоидом* (1) *одну общую точку* (*соответственно* $(a, 0, 0)$ *или* $(-a, 0, 0)$);

при $|h| < a$ *плоскость* $x = a$ *пересекает эллипсоид* (1) *по эллипсу с полуосями*

$$b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}, \quad c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}},$$

наибольшими (*и равными* b *и* c) *при* $h = 0$ *и монотонно уменьшающимися до нуля, когда* $|h|$ *возрастает от нуля до* a.

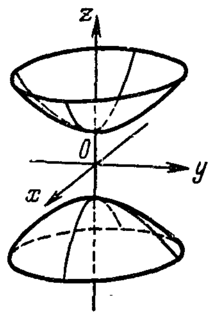
Все это дает уже вполне удовлетворительное представление о форме эллипсоида (1). В частности, мы видим, что

эллипсоид (1) *целиком расположен внутри прямоугольного параллелепипеда с центром в точке* $(0, 0, 0)$, *с гранями, параллельными координатным плоскостям, и со сторонами, имеющими длины* $2a$, $2b$ и $2c$.

Можно еще добавить, что так как уравнение (1) не меняется при изменении знаков координат x, y, z, то

координатные плоскости являются плоскостями симметрии эллипсоида (1), *а начало координат — его центром симметрии.*

Упражнение. Докажите, что если числа a, b и c все различны, то никаких других плоскостей симметрии эллипсоид (1) не имеет.



2. Двуполостные гиперболоиды

Определение 1. *Двуполостным гиперболоидом* называется поверхность, имеющая в некоторой системе прямоугольных координат уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{1}$$

где $a \geqslant b > 0$ и $c > 0$. Эта система координат называется *канонической* (относительно данного гиперболоида), а уравнение (1) называется *каноническим уравнением* двуполостного гиперболоида.

Замечание 1. Весьма часто каноническим уравнением двуполостного гиперболоида называется его уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Каноническое в этом смысле уравнение отличается от канонического уравнения в нашем смысле только обозначением координат.

При $a=b$ уравнение двуполостного гиперболоида в цилиндрических координатах ρ, φ, z имеет, очевидно, вид

$$\frac{\rho^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Отсюда вытекает (см. в п. 1 аналогичное рассуждение для эллипсоида), что

гиперболоид

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (2)$$

получается из гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

расположенной в плоскости Oxz, вращением вокруг оси Oz (являющейся ее действительной осью).

Это дает уже вполне отчетливое представление о форме гиперболоида (2) (называемого обычно *двуполостным гиперболоидом вращения*).

При сжатии к плоскости Oxz с коэффициентом k гиперболоид (2) переходит, очевидно, в поверхность с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(ka)^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

т. е. (при $k=\frac{a}{b}$) — в гиперболоид (1). Таким образом,

произвольный двуполостный гиперболоид (1) *получается из двуполостного гиперболоида вращения* (2) *сжатием к плоскости Oxz с коэффициентом $\frac{b}{a}$.*

Исследуя форму гиперболоида (1) методом плоских сечений, мы немедленно получим, что в пересечении с плоскостью $z=h$ гиперболоид (1) дает линию с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1,$$

т. е. с уравнением

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}=1.$$

Следовательно,

при $|h| < c$ *плоскость* $z = h$ *не пересекает гиперболоид* (1);

при $|h| = c$ *плоскость* $z = h$ *имеет с гиперболоидом* (1) *одну общую точку (соответственно* $(0, 0, c)$ *или* $(0, 0, -c)$*)*;

при $|h| > c$ *плоскость* $z = h$ *пересекает гиперболоид* (1) *по эллипсу с полуосями*

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, \quad b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},$$

монотонно возрастающими (соответственно от a *и* b *до* $+\infty$*), когда* $|h|$ *возрастает от* c *до* $+\infty$.

В пересечении с плоскостью $y = h$ гиперболоид (1) дает линию с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1-\frac{h^2}{b^2},$$

т. е. с уравнением

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}\right)^2}-\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}\right)^2}=1.$$

Следовательно,

любая плоскость $y = h$ *пересекает гиперболоид* (1) *по гиперболе с полуосями*

$$c\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}, \quad a\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}},$$

монотонно возрастающими (соответственно от c *и* a *до* $+\infty$*), когда* $|h|$ *возрастает от нуля до* $+\infty$.

Аналогично показывается, что

любая плоскость $x = h$ *пересекает гиперболоид* (1) *по гиперболе с полуосями*

$$c\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}, \quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}},$$

монотонно возрастающими (соответственно от c *и* b *до* $+\infty$*), когда* $|h|$ *возрастает от нуля до* $+\infty$.

Все это дает уже вполне удовлетворительное представление о форме двуполостного гиперболоида (1).

В частности, мы видим, что, так как ни одна плоскость $z = h$ с $|h| < c$ не пересекает гиперболоид и так как он имеет точки по обе стороны от каждой из этих плоскостей, то

гиперболоид (1) состоит из двух не связанных друг с другом частей, расположенных соответственно в полупространствах $z \geqslant c$ *и* $z \leqslant -c$.

Этим и объясняется эпитет «двуполостный» в названии гиперболоида (1).

Заметим в заключение, что по тем же соображениям, что и для эллипсоида,

координатные плоскости являются плоскостями симметрии гиперболоида (1), *а начало координат — его центром симметрии.*

Упражнение. Докажите, что при $a > b$ никаких других плоскостей симметрии гиперболоид (1) не имеет.

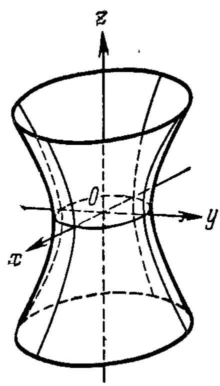
3. Однополостные гиперболоиды

Определение 1. *Однополостным гиперболоидом* называется поверхность, имеющая в некоторой системе прямоугольных координат уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

где $a \geqslant b > 0$ *и* $c > 0$. Эта система координат называется *канонической* (относительно данного гиперболоида), а уравнение (1) называется *каноническим уравнением* однополостного гиперболоида.

При $a = b$ уравнение однополостного гиперболоида в цилиндрических координатах ρ, φ, z имеет вид



$$\frac{\rho^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

Следовательно (ср. пп. 1 и 2), *гиперболоид*

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{2}$$

получается из гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

расположенной в плоскости Oxz, *вращением вокруг оси* Oz (*являющейся ее мнимой осью*).

Это дает уже вполне отчетливое представление о форме гиперболоида (2) (называемого обычно *однополостным гиперболоидом вращения*).

При сжатии к плоскости Oxz с коэффициентом k гиперболоид (2) переходит, очевидно, в поверхность с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(ka)^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

т. е. $\left(\text{при } k=\frac{b}{a}\right)$ — в гиперболоид (1). Таким образом,

произвольный однополостный гиперболоид (1) *получается из однополостного гиперболоида вращения* (2) *сжатием к плоскости* Oxz *с коэффициентом* $\frac{b}{a}$.

Исследуя форму гиперболоида (1) методом плоских сечений, мы немедленно получим, что в пересечении с плоскостью $z = h$ гиперболоид (1) дает линию с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2},$$

т. е. с уравнением

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

Следовательно,

любая плоскость $z = h$ пересекает гиперболоид (1) *по эллипсу с полуосями*

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}, \quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},$$

монотонно возрастающими (*соответственно от a и b до $+\infty$*), *когда $|h|$ возрастает от нуля до $+\infty$.*

Определение 2. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

получающийся при $h = 0$ (и расположенный в плоскости Oxy), называется *горловым эллипсом* однополостного гиперболоида (1).

В пересечении с плоскостью $y = h$ гиперболоид (1) дает линию с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2},$$

т. е. либо с уравнением

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1$$

(если $|h| < b$), либо с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{3}$$

(если $|h| = b$), либо, наконец, с уравнением

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}\right)^2} = 1$$

(если $|h| > b$).

Заметив, что точка (x, y) тогда и только тогда удовлетворяет уравнению (3), когда она удовлетворяет либо уравнению

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0,$$

либо уравнению

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0,$$

мы получаем, следовательно, что

при $|h|<b$ *плоскость* $y=h$ *пересекает гиперболоид* (1) *по гиперболе с полуосями*

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}},\quad c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}},$$

монотонно убывающими (соответственно от a *и* c *до нуля), когда* $|h|$ *возрастает от нуля до* b;

при $|h|=b$ *плоскость* $y=h$ *пересекает гиперболоид* (1) *по прямым*

$$\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=0,\\ y&=h\end{aligned}\qquad(4)$$

и

$$\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=0,\\ y&=h;\end{aligned}\qquad(5)$$

при $|h|>b$ *плоскость* $y=h$ *пересекает гиперболоид* (1) *по гиперболе с полуосями*

$$c\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1},\quad a\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1},$$

монотонно возрастающими от нуля до $+\infty$, *когда* $|h|$ *возрастает от* b *до* $+\infty$.

Заметим, что действительные (мнимые) оси гипербол, получающихся при $|h|<b$, параллельны мнимым (действительным) осям гипербол, получающихся при $|h|>b$.

Аналогично показывается, что

при $|h|<a$ *плоскость* $x=h$ *пересекает гиперболоид* (1) *по гиперболе с полуосями*

$$b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}},\quad c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}},$$

монотонно убывающими (соответственно от b *и* c *до нуля), когда* $|h|$ *возрастает от нуля до* a;

при $|h|=a$ *плоскость* $x=h$ *пересекает гиперболоид* (1) *по прямым*

$$\begin{aligned}\frac{y}{b}-\frac{z}{c}&=0,\\ x&=h\end{aligned}\quad \text{и}\quad \begin{aligned}\frac{y}{b}+\frac{z}{c}&=0,\\ x&=h;\end{aligned}$$

при $|h|>a$ *плоскость* $x=h$ *пересекает гиперболоид* (1) *по гиперболе с полуосями*

$$c\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1},\quad b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1},$$

монотонно возрастающими от нуля до $+\infty$, когда $|h|$ возрастает от a до $+\infty$.

Все это дает вполне удовлетворительное представление о форме однополостного гиперболоида (1).

Можно также добавить, что по тем же соображениям, что и для эллипсоида и двуполостного гиперболоида.

координатные плоскости являются плоскостями симметрии однополостного гиперболоида (1), а начало координат — его центром симметрии.

Упражнение. Докажите, что при $a > b$ никаких других плоскостей симметрии гиперболоид (1) не имеет.

4. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида

Обратим внимание на тот замечательный факт, что, несмотря на «искривленность», однополостный гиперболоид (1) п. 3 содержит целые прямые: например, прямую (4) п. 3. Более того, легко видеть, что этот гиперболоид содержит целое семейство таких прямых. Действительно, если гиперболоид является гиперболоидом вращения, то он переходит в себя при любом повороте вокруг оси Oz. Поэтому при этом повороте прямая (4) п. 3 переходит в некоторую прямую, также принадлежащую гиперболоиду. Таким образом, мы можем сказать, что гиперболоид вращения «заметается» (или «зачерчивается») некоторой прямой[1]), вращающейся вокруг оси Oz. При сжатии к плоскости Oxz прямые переходят, очевидно, в прямые, а вращение — в некоторое непрерывное преобразование пространства (описывать которое более подробно нам нет нужды). Следовательно, мы видим, что

произвольный однополостный гиперболоид заметается некоторой непрерывно перемещающейся прямой.

Определение 1. Поверхность в пространстве, являющаяся геометрическим местом точек некоторой непрерывно перемещающейся прямой, называется *линейчатой поверхностью.*

Таким образом, мы доказали, что

каждый однополостный гиперболоид является линейчатой поверхностью.

Определение 1 линейчатой поверхности является не столько строгим математическим определением, сколько наглядным описанием. Однако его можно без особого труда превратить во вполне строгое определение.

С этой целью мы заметим, что любая прямая в пространстве однозначно определена, если известна ее точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ее направляющий вектор $\boldsymbol{a}(l, m, n)$. Поэтому, чтобы задать некоторое непрерывное семейство прямых, зависящих, скажем, от параметра τ, пробегающего отрезок $[\tau_1, \tau_2]$, достаточно

---

[1]) То, что при этом получается весь гиперболоид, наглядно очевидно. Строгое доказательство будет дано ниже.

задать непрерывные функции

$$\begin{aligned} &x_0(\tau), \quad y_0(\tau), \quad z_0(\tau),\\ &l(\tau), \quad m(\tau), \quad n(\tau), \end{aligned} \tag{1}$$

первые три из которых для любого τ определяют точку на прямой семейства, соответствующей данному значению параметра, а остальные три — направляющий вектор этой прямой (при этом, конечно, требуется, чтобы $l(\tau)^2 + m(\tau)^2 + n(\tau)^2 \neq 0$). Тогда произвольная точка, принадлежащая некоторой прямой этого семейства, будет иметь координаты вида

$$\begin{aligned} x &= x_0(\tau) + l(\tau)\, t,\\ y &= y_0(\tau) + m(\tau)\, t,\\ z &= z_0(\tau) + n(\tau)\, t, \end{aligned} \tag{2}$$

где t — некоторое число (параметр на прямой). Теперь мы видим, что данное выше наглядное определение линейчатой поверхности может быть переформулировано следующим образом:

Поверхность называется линейчатой, если ее можно задать параметрическими уравнениями вида (2), *в которых параметр* t *изменяется от* $-\infty$ *до* $+\infty$, *а параметр* τ — *на некотором отрезке* $[\tau_1, \tau_2]$. *При этом, конечно, предполагается, что все функции* (1) *непрерывны и что* $l(\tau)^2 + m(\tau)^2 + n(\tau)^2 \neq 0$ *ни при одном* $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$.

Определение 2. Прямые, из которых состоит данная линейчатая поверхность, называются ее *прямолинейными образующими.* Уравнение каждой прямолинейной образующей получается из уравнений (2) при некотором фиксированном τ.

Таким образом, уравнения (2) мы можем рассматривать не только как уравнения линейчатой поверхности, но и как уравнения произвольной прямолинейной образующей этой поверхности (в зависимости от того, считаем ли мы параметр τ изменяющимся или фиксированным).

С наглядной точки зрения прямолинейные образующие — это мгновенные положения прямой, перемещением которой образована данная линейчатая поверхность.

Замечание 1. Подчеркнем, что понятие «прямолинейной образующей» связано со способом построения поверхности (или, иными словами, с выбором ее уравнения (2)). Может случиться, что та же поверхность будет образована движением совсем другой прямой, т. е. будет геометрическим местом точек совсем другой системы прямолинейных образующих. В этом случае иногда говорят, что рассматриваемая поверхность *дважды линейчата.* (Мыслимы, конечно, и поверхности, линейчатые трижды, четырежды и т. д.) Возможно также, что поверхность (не обязательно линейчатая) содержит некоторую прямую, не включающуюся ни в какое семейство прямолинейных образующих. Такую прямую прямолинейной образующей считать, конечно, нельзя.

Тем не менее во многих учебниках аналитической геометрии прямолинейная образующая определяется просто как прямая, принадлежащая поверхности. Это может быть оправдано тем, что для интересующих аналитическую геометрию поверхностей второго порядка каждая прямая, принадлежащая поверхности, является ее прямолинейной образующей (но уже для поверхностей третьего порядка это не так).

Наше доказательство того, что однополостный гиперболоид является линейчатой поверхностью, было, по существу, чисто синтетическим. Однако его легко можно алгебраизировать, и тем самым не только заново доказать линейчатость однополостного гиперболоида, но и найти его параметрические уравнения вида (2), т. е., иными словами, найти параметрические уравнения его прямолинейных образующих.

Для гиперболоида вращения (2) п. 3 прямая (4) п. 3 (при $h = b$) имеет, очевидно, параметрические уравнения вида

$$\begin{aligned} x &= at, \\ y &= b, \\ z &= ct. \end{aligned}$$

При повороте вокруг оси Oz на угол τ, сопровождаемом сжатием к плоскости Oxz с коэффициентом $\frac{b}{a}$, эта прямая, как можно показать, переходит в прямую с уравнениями

$$\begin{aligned} x &= -a\sin\tau + a\cos\tau\cdot t, \\ y &= b\cos\tau + b\sin\tau\cdot t, \\ z &= ct. \end{aligned} \tag{3}$$

Мы не будем этого доказывать, а непосредственно проверим, что при любом τ прямая (3) целиком расположена на гиперболоиде (1), т. е. что при любых t и τ числа x, y, z, даваемые уравнениями (3), удовлетворяют уравнению (1) п. 3 однополостного гиперболоида. Но, действительно,

$$\frac{(-a\sin\tau + a\cos\tau\cdot t)^2}{a^2} + \frac{(b\cos\tau + b\sin\tau\cdot t)^2}{b^2} - \frac{(ct^2)}{c^2} = 1.$$

Чтобы доказать, что уравнения (3) на самом деле определяют семейство прямолинейных образующих гиперболоида, остается только показать, что для любой его точки $M(x, y, z)$ можно подобрать такие (однозначно определенные) значения τ и t, что ее координаты имеют вид (3). Другими словами, нужно показать, что уравнения (3) однозначно разрешимы относительно τ и t (при условии, что x, y и z удовлетворяют уравнению (1) п. 3).

Но последнее уравнение (3) однозначно определяет t:

$$t = \frac{z}{c}.$$

Подставляя это значение в первые два уравнения (3), мы получаем уравнения

$$\frac{x}{a} = -\sin\tau + \cos\tau \cdot \frac{z}{c},$$

$$\frac{y}{b} = \cos\tau + \sin\tau \cdot \frac{z}{c}.$$

Следовательно,

$$\cos\tau = \frac{\frac{xz}{ac} + \frac{y}{b}}{1 + \frac{z^2}{c^2}}, \qquad \sin\tau = \frac{\frac{yz}{bc} - \frac{x}{a}}{1 + \frac{z^2}{c^2}}.$$

Поскольку

$$\left(\frac{\frac{xz}{ac} + \frac{y}{b}}{1 + \frac{z^2}{c^2}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{yz}{bc} - \frac{x}{a}}{1 + \frac{z^2}{c^2}}\right)^2 = \frac{\frac{x^2}{a^2}\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) + \frac{y^2}{b^2}\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)^2} = 1,$$

эти соотношения однозначно определяют угол τ.

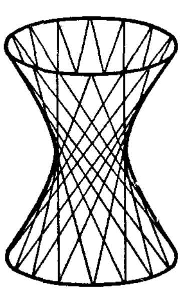
Тем самым мы доказали, что

уравнения (3) *являются уравнениями некоторого семейства прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, т. е. при любом* τ *они представляют собой уравнения некоторой прямолинейной образующей гиперболоида* (1), п. 3, *и любая прямолинейная образующая (принадлежащая рассматриваемому семейству) получается таким образом.*

Иначе можно сказать, что

уравнения (3) *являются параметрическими уравнениями однополостного гиперболоида, имеющими вид* (2).

Заметим теперь, что вместо того, чтобы исходить из прямой (4) п. 3, мы можем с тем же правом отправляться от прямой (5) п. 3 (при $h = b$). В результате мы получим другую систему прямолинейных образующих однополостного гиперболоида с уравнениями



$$x = a\sin\tau + a\cos\tau \cdot t,$$
$$y = -b\cos\tau + b\sin\tau \cdot t, \tag{4}$$
$$z = ct.$$

Задание. Докажите это утверждение.

Предложение 1. *Однополостный гиперболоид является дважды линейчатой поверхностью: одно семейство его прямолинейных образующих имеет вид* (3), *а другое — вид* (4).

Доказательство. В свете сказанного выше нам остается только доказать, что не существует третьего семейства прямолинейных образующих, т. е., что

через любую точку однополостного гиперболоида (1) п. 3 *проходят точно две прямые, целиком лежащие на этом гипер-*

болоиде: одна, являющаяся прямолинейной образующей из семейства (3), *а другая, являющаяся прямолинейной образующей из семейства* (4).

Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка однополостного гиперболоида (1) п. 3 и пусть

$$x = x_0 + lt,$$
$$y = y_0 + mt,$$
$$z = z_0 + nt$$

— произвольная прямая, проходящая через эту точку. Чтобы эта прямая целиком принадлежала гиперболоиду, необходимо и достаточно, чтобы тождественно по t имело место равенство

$$\frac{(x_0+lt)^2}{a^2} + \frac{(y_0+mt)^2}{b^2} - \frac{(z_0+nt)^2}{c^2} = 1,$$

т. е. равенство

$$\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{c^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{lx_0}{a^2} + \frac{my_0}{b^2} - \frac{nz_0}{c^2}\right)t = 0,$$

что возможно тогда и только тогда, когда

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{c^2} = 0$$

и

$$\frac{lx_0}{a^2} + \frac{my_0}{b^2} - \frac{nz_0}{c^2} = 0. \tag{5}$$

Из первого уравнения мы видим, что $n \neq 0$ (ибо, в противном случае, $l = m = 0$, что невозможно). Поскольку числа l, m, n нам заданы только с точностью до пропорциональности, мы, следовательно, без ограничения общности можем считать, что $n = c$. Но тогда для l и m мы получим уравнение

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} = 1,$$

общее решение которого имеет вид

$$l = a\cos\tau, \quad m = b\sin\tau, \qquad 0 \leqslant \tau < 2\pi.$$

Таким образом, параметрические уравнения рассматриваемой прямой мы можем записать в следующем виде:

$$x = x_0 + a\cos\tau \cdot t,$$
$$y = y_0 + b\sin\tau \cdot t, \tag{6}$$
$$z = z_0 + ct,$$

а соотношение (5) (которое мы еще не использовали) — в виде

$$\frac{x_0}{a}\cos\tau + \frac{y_0}{b}\sin\tau = \frac{z_0}{c}. \tag{7}$$

Перейдем теперь в уравнениях (6) от параметра t к параметру

$$t' = t + \frac{z_0}{c}.$$

Тогда мы получим уравнения

$$\begin{aligned} x &= a\left(\frac{x_0}{a} - \cos\tau \cdot \frac{z_0}{c}\right) + a\cos\tau \cdot t', \\ y &= b\left(\frac{y_0}{b} - \sin\tau \cdot \frac{z_0}{c}\right) + b\sin\tau \cdot t', \\ z &= ct'. \end{aligned} \tag{8}$$

Но согласно соотношениям (7)

$$\cos\tau \cdot \left(\frac{x_0}{a} - \cos\tau \cdot \frac{z_0}{c}\right) = -\frac{y_0}{b}\sin\tau + (1 - \cos^2\tau)\frac{z_0}{c} =$$
$$= -\sin\tau \cdot \left(\frac{y_0}{b} - \sin\tau \cdot \frac{z_0}{c}\right),$$

откуда вытекает, что

$$\frac{x_0}{a} - \cos\tau \cdot \frac{z_0}{c} = -u\sin\tau, \qquad \frac{y_0}{b} - \sin\tau \cdot \frac{z_0}{c} = u\cos\tau, \tag{9}$$

где u — некоторое число. Поэтому уравнения (8) приобретают вид

$$\begin{aligned} x &= -au\sin\tau + a\cos\tau \cdot t', \\ y &= bu\cos\tau + b\sin\tau \cdot t', \\ z &= ct'. \end{aligned}$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (3) и (4), мы немедленно замечаем, что при $u = \pm 1$ они совпадают с этими уравнениями (с точностью до обозначения параметра t'). Поэтому для завершения доказательства нам остается лишь показать, что $u = \pm 1$, т. е. что $u^2 = 1$.

Но из соотношений (9) непосредственно вытекает, что

$$u^2 = \left(\frac{x_0}{a} - \cos\tau \cdot \frac{z_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b} - \sin\tau \cdot \frac{z_0}{c}\right)^2,$$

т. е. что

$$u^2 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 2\frac{z_0}{c}\left(\frac{x_0}{a}\cos\tau + \frac{y_0}{b}\sin\tau\right).$$

Учитывая соотношения (7) и тот факт, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит гиперболоиду (1) п. 3, мы получаем, следовательно, что

$$u^2 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1.$$

Тем самым предложение 1 полностью доказано.

Замечание 2. Обратим внимание на то, что мы фактически заново вывели уравнения (3) и (4) прямолинейных образующих однополостного гиперболоида. Этот вывод уравнений (3) и (4) более громоздок, но он доказывает, что никаких других прямолинейных образующих однополостный гиперболоид не имеет.

Замечание 3. Если не гнаться за параметрическими уравнениями прямолинейных образующих (а также за доказательством отсутствия третьего семейства прямолинейных образующих), то можно предложить очень короткий, хотя и искусственный, вывод их непараметрических уравнений (что одновременно еще раз докажет линейчатость однополостного гиперболоида).

Очевидно, что уравнение однополостного гиперболоида можно записать в следующем виде:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right). \qquad (10)$$

Это наводит на мысль рассмотреть для произвольного числа $k \neq 0$ прямую с уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=k\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{k}\left(1+\frac{y}{b}\right). \end{aligned} \qquad (11)$$

Ясно, что уравнение (10) является следствием уравнений (11). Это означает, что любая точка прямой (11) принадлежит гиперболоиду (10). Кроме того, для любой точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ гиперболоида (10) прямая (11) с

$$k=\frac{\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{z_0}{c}}{1-\dfrac{y_0}{b}} \qquad (12)$$

проходит через эту точку. Этим доказано, что

прямые (11) *составляют семейство прямолинейных образующих однополостного гиперболоида.*

Замечание 4. При $\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}=0$ формула (12) дает для k значение 0, а при $1-\frac{y_0}{b}=0$ — «значение» ∞. Ясно, что этим случаям отвечают прямые

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0, \quad 1+\frac{y}{b}=0, \qquad \text{и} \qquad 1-\frac{y}{b}=0, \quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0,$$

которые мы также должны считать принадлежащими нашему семейству.

Чтобы получить этим методом второе семейство прямолинейных образующих гиперболоида, следует рассмотреть прямые

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=k\left(1+\frac{y}{b}\right),$$
$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right); \tag{13}$$

Задание. Докажите, что прямые (13) действительно являются прямолинейными образующими однополостного гиперболоида, отличными от образующих (11).

Уравнения (11) и (13) не очень удобны для исследования взаимного расположения прямолинейных образующих. Поэтому мы будем пользоваться исключительно параметрическими уравнениями (3) и (4). Впрочем, целесообразно и эти уравнения несколько преобразовать.

Каждая прямая (3) пересекает плоскость $z=0$, т. е. горловой эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

гиперболоида, в точке с координатами

$$x_0=-a\sin\tau, \quad y_0=b\cos\tau.$$

Поэтому

$$a\cos\tau=\frac{a}{b}y_0, \quad b\sin\tau=-\frac{b}{a}x_0.$$

Следовательно, уравнения (3) мы можем переписать в следующем виде:

$$x=x_0+\frac{a}{b}y_0t,$$
$$y=y_0-\frac{b}{a}x_0t, \tag{14}$$
$$z=ct.$$

Тем самым доказано, что

уравнения (14) *представляют собой параметрические уравнения некоторой прямолинейной образующей однополостного гиперболоида, проходящей через точку* (x_0, y_0) *горлового эллипса.*

Аналогично показывается, что

параметрические уравнения другой прямолинейной образующей, проходящей через точку (x_0, y_0) *горлового эллипса, имеют вид*

$$x=x_0-\frac{a}{b}y_0t,$$
$$y=y_0+\frac{b}{a}x_0t, \tag{15}$$
$$z=ct.$$

Задание. Выведите уравнения (15).

Теперь у нас все готово для доказательства основных свойств прямолинейных образующих однополостного гиперболоида.

Свойство 1. *Через любую точку гиперболоида проходит одна и только одна прямолинейная образующая каждого семейства.*

Это свойство мы уже доказывали (и притом трижды). Здесь мы его привели лишь для полноты списка свойств.

Свойство 2. *Любые две образующие однополостного гиперболоида, принадлежащие разным семействам, компланарны (лежат в одной плоскости).*

Действительно, пусть образующая первого семейства проходит через точку (x_0, y_0) горлового эллипса, а образующая второго семейства — через точку (x_1, y_1). Тогда согласно уравнениям (14) и (15) направляющий вектор первой образующей имеет вид

$$\left(\frac{a}{b}y_0,\ -\frac{b}{a}x_0,\ c\right),$$

а направляющий вектор второй образующей — вид

$$\left(-\frac{a}{b}y_1,\ \frac{b}{a}x_1,\ c\right).$$

Но мы знаем (п. 2 § 3 гл. 3), что две прямые, имеющие соответственно направляющие векторы (l_0, m_0, n_0) и (l_1, m_1, n_1) и проходящие через точки (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1), тогда и только тогда компланарны, когда определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l_0 & m_0 & n_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}$$

равен нулю. В нашем случае этот определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & 0 \\ \frac{a}{b}y_0 & -\frac{b}{a}x_0 & c \\ -\frac{a}{b}y_1 & \frac{b}{a}x_1 & c \end{vmatrix} = abc\left[\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)-\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)\right]$$

и, следовательно, на самом деле равен нулю (поскольку $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$ и $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$).

Тем самым свойство 2 полностью доказано.

Можно еще заметить, что рассмотренные образующие тогда и только тогда параллельны, когда

$$\frac{\frac{a}{b}y_0}{-\frac{a}{b}y_1}=\frac{-\frac{b}{a}x_0}{\frac{b}{a}x_1}=\frac{c}{c},$$

т. е. когда

$$x_1 = -x_0, \quad y_1 = -y_0.$$

Это означает, что

две прямолинейные образующие однополостного гиперболоида, принадлежащие разным семействам, тогда и только тогда параллельны, когда они проходят через диаметрально противоположные точки горлового эллипса.

Рассмотрим теперь образующие, принадлежащие одному семейству.

Свойство 3. *Две образующие однополостного гиперболоида, принадлежащие одному семейству, скрещиваются (не лежат в одной плоскости).*

Действительно, пусть (x_0, y_0) и (x_1, y_1) — точки горлового эллипса, через которые проходят данные образующие. Ясно, что эти точки различны, поскольку через любую точку горлового эллипса проходит только одна образующая каждого семейства. Пусть, для определенности, рассматриваемые образующие принадлежат семейству (14). Тогда их направляющие векторы имеют вид

$$\left(\frac{a}{b} y_0, -\frac{b}{a} x_0, c\right), \quad \left(\frac{a}{b} y_1, -\frac{b}{a} x_1, c\right), \tag{16}$$

и потому условие их скрещивания состоит в том, чтобы не был равен нулю определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & 0 \\ \frac{a}{b} y_0 & -\frac{b}{a} x_0 & c \\ \frac{a}{b} y_1 & -\frac{b}{a} x_1 & c \end{vmatrix} = c\left[\frac{b}{a}(x_1 - x_0)^2 + \frac{a}{b}(y_1 - y_0)^2\right].$$

Но поскольку точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) различны, этот определитель на самом деле отличен от нуля.

Для прямолинейных образующих (15) доказательство аналогично.

Замечание 5. Свойство 3 можно доказать без всяких выкладок, если заметить, что прямолинейные образующие одного семейства не могут пересекаться (ибо тогда вопреки свойству 1 через некоторую точку гиперболоида проходили бы две образующие этого семейства). Если же они параллельны, т. е. векторы (16) коллинеарны, то

$$\frac{\frac{a}{b} y_0}{\frac{a}{b} y_1} = \frac{-\frac{b}{a} x_0}{-\frac{b}{a} x_1} = \frac{c}{c},$$

и потому $x_0 = x_1$, $y_0 = y_1$ и, значит, эти образующие совпадают.

Свойство 4. *Никакие три образующие одного семейства прямолинейных образующих однополостного гиперболоида не параллельны одной и той же плоскости.*

Действительно, пусть (x_0, y_0), (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — точки горлового эллипса, через которые проходят данные три образующие одного и того же семейства. Согласно свойству 1 эти точки попарно различны, а согласно формулам (14) и (15) направляющие векторы этих образующих имеют вид

$$\left(\pm\frac{a}{b}y_0,\quad \mp\frac{b}{a}x_0,\quad c\right),\qquad \left(\pm\frac{a}{b}y_1,\quad \mp\frac{b}{a}x_1,\quad c\right),$$
$$\left(\pm\frac{a}{b}y_2,\quad \pm\frac{b}{a}x_2,\quad c\right). \tag{17}$$

Поскольку три прямые тогда и только тогда параллельны одной плоскости, когда их направляющие векторы компланарны, для доказательства свойства 4 достаточно доказать, что векторы (17) не компланарны, т. е. определитель, составленный из их координат, не равен нулю. Но этот определитель равен

$$c\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

и потому на самом деле отличен от нуля (ибо точки (x_0, y_0), (x_1, y_1) и (x_2, y_2) не коллинеарны).

Замечание 6. Из доказанных свойств прямолинейных образующих вытекает красивое геометрическое описание произвольного однополостного гиперболоида.

Возьмем три произвольных прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, принадлежащих одному семейству. Согласно свойству 2 любая образующая другого семейства пересекает каждую из этих образующих в некоторой точке (или ей параллельна, т. е. пересекает ее в несобственной точке). Но ясно, что если нам даны три скрещивающиеся прямые, то существует только одна прямая, проходящая через данную точку одной прямой и пересекающая две другие прямые (возможно, в несобственной точке). Следовательно, прямолинейные образующие некоторого семейства однозначно характеризуются как прямые, пересекающие три произвольно выбранные образующие другого семейства. Это означает, что

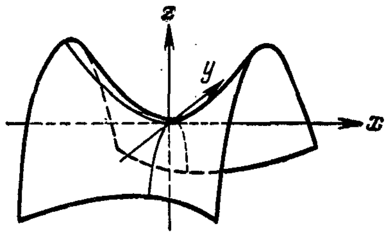
произвольный однополостный гиперболоид представляет собой геометрическое место точек, принадлежащих прямым, пересекающим (возможно, в несобственной точке) каждую из трех фиксированных скрещивающихся прямых, не параллельных никакой плоскости.

Упражнение. Докажите, что

какие бы три скрещивающиеся прямые, не параллельные ни одной плоскости, мы ни взяли, геометрическое место точек, принадлежащих прямым, пересекающим эти прямые, является однополостным гиперболоидом.

5. Гиперболические параболоиды

Определение 1. Гиперболическим параболоидом называется поверхность, имеющая в некоторой прямоугольной системе координат уравнение вида



$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{1}$$

где $p > 0$, $q > 0$. Эта система координат называется *канонической* (относительно данного параболоида), а уравнение (1) — *каноническим уравнением.*

Представить себе форму гиперболического параболоида довольно трудно. Проще всего это можно сделать методом плоских сечений.

Плоскость $z = h$ пересекает параболоид (1) по линии с уравнением

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h,$$

т. е. либо с уравнением

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2hp})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2hq})^2} = 1$$

(если $h > 0$), либо с уравнением

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$$

(если $h = 0$), либо, наконец, с уравнением

$$\frac{y^2}{(\sqrt{-2qh})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{-2ph})^2} = 1$$

(если $h < 0$).

В первом случае эта линия является гиперболой с полуосями $\sqrt{2hp}$, $\sqrt{2hq}$, во втором случае она состоит из двух прямых

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0,$$

а в третьем случае — снова является гиперболой, но уже с полуосями $\sqrt{-2hq}$, $\sqrt{-2hp}$.

Таким образом,

при $h<0$ *плоскость* $z=h$ *пересекает гиперболический параболоид* (1) *по гиперболе с полуосями*

$$\sqrt{-2hq},\quad \sqrt{-2hp},$$

монотонно убывающими от $+\infty$ *до нуля, когда* h *возрастает от* $-\infty$ *до нуля;*

при $h=0$ *плоскость* $z=h$ *пересекает гиперболический параболоид* (1) *по паре пересекающихся прямых*

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}&=0, &\quad \text{и} \quad \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}&=0,\\ z&=0 & z&=0;\end{aligned}$$

при $h>0$ *плоскость* $z=h$ *пересекает гиперболический параболоид* (1) *по гиперболе с полуосями*

$$\sqrt{2hp},\quad \sqrt{2hq},$$

монотонно возрастающими от нуля до $+\infty$, *когда* h *возрастает от нуля до* $+\infty$.

Обратим внимание на то, что действительные (мнимые) оси гипербол, получающихся при $h<0$, параллельны мнимым (действительным) осям гипербол, получающихся при $h>0$.

Плоскость $y=h$ пересекает параболоид (1) по линии с уравнением

$$\frac{x^2}{p}-\frac{h^2}{q}=2z,$$

т. е. с уравнением

$$x^2=2p\left(z+\frac{h^2}{2q}\right).$$

Это означает, что

плоскость $y=h$ *пересекает гиперболический параболоид* (1) *по параболе с фокальным параметром* p, *с вершиной в точке* $\left(0,\ h,\ -\frac{h^2}{2q}\right)$ *и с «рогами», направленными в положительном направлении оси* Oz *(«вверх»).*

Аналогично показывается, что

плоскость $x=h$ *пересекает гиперболический параболоид* (1) *по параболе с фокальным параметром* q, *с вершиной в точке* $\left(h,\ 0,\ \frac{h^2}{2p}\right)$ *и с «рогами», направленными в отрицательном направлении оси* Oz *(«вниз»).*

Отметим, что вершины парабол, получающихся в пересечении с плоскостями $y=h$ (плоскостями $x=h$), принадлежат параболе, получающейся в пересечении с плоскостью $x=0$ (соответственно с плоскостью $y=0$).

При известном усилии пространственного воображения теперь уже можно представить себе форму гиперболического параболоида. Он «поднимается» в положительном и отрицательном направлениях оси Ox и «опускается» в положительном и отрицательном направлениях оси Oy. Вблизи начала координат он имеет форму седла.

Поскольку уравнение (1) не меняется при изменении знаков у x и y (но не у z!),

координатные плоскости Oxz и Oyz являются плоскостями симметрии гиперболического параболоида.

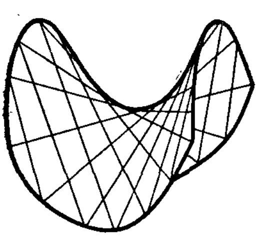
Упражнение. Докажите, что кроме плоскостей Oxz и Oyz других плоскостей симметрии гиперболический параболоид не имеет. Не имеет он и центра симметрии.

Предложение 1. *Гиперболический параболоид является дважды линейчатой поверхностью.*

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка параболоида (1) и

$$x = x_0 + lt,$$
$$y = y_0 + mt,$$
$$z = z_0 + nt$$

— произвольная прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Чтобы эта прямая целиком принадлежала параболоиду, необходимо и достаточно, чтобы тождественно по t выполнялось равенство



$$\frac{(x_0 + lt)^2}{p} - \frac{(y_0 + mt)^2}{q} = 2(z_0 + nt),$$

т. е. равенство

$$\left(\frac{l^2}{p} - \frac{m^2}{q}\right)t^2 + 2\left(\frac{lx_0}{p} - \frac{my_0}{q} - n\right)t = 0,$$

что возможно только тогда, когда

$$\frac{l^2}{p} - \frac{m^2}{q} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{lx_0}{p} - \frac{my_0}{q} - n = 0.$$

Отсюда мы находим:

$$m = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}\,l, \quad n = \left(\frac{x_0}{p} \mp \frac{y_0}{\sqrt{pq}}\right)l.$$

Поскольку величины l, m и n нам заданы только с точностью до пропорциональности, мы без ограничения общности можем считать, что $l = \sqrt{p}$. Тем самым доказано, что

прямая, проходящая через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ гиперболического параболоида (1), *тогда и только тогда целиком принад-*

лежит этому параболоиду, когда она может быть задана параметрическими уравнениями либо вида

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \sqrt{p}\,t, \\ y &= y_0 + \sqrt{q}\,t, \\ z &= z_0 + \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)t, \end{aligned} \tag{2}$$

либо вида

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \sqrt{p}\,t, \\ y &= y_0 - \sqrt{q}\,t, \\ z &= z_0 + \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)t. \end{aligned} \tag{3}$$

Займемся сначала уравнениями (2). Чтобы преобразовать их к более удобному виду, мы заметим, что точке пересечения прямой (2) с плоскостью $z = 0$ отвечает значение параметра

$$t_0 = -\frac{z_0}{\dfrac{x_0}{\sqrt{p}} - \dfrac{y_0}{\sqrt{q}}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right).$$

Поэтому, если мы перейдем к новому параметру $t' = t - t_0$, то уравнения (2) перейдут в уравнения

$$\begin{aligned} x &= \left(x_0 - \frac{\sqrt{p}}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)\right) + \sqrt{p}\,t', \\ y &= \left(y_0 - \frac{\sqrt{q}}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)\right) + \sqrt{q}\,t', \\ z &= \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)t', \end{aligned}$$

т. е. в уравнения (мы опускаем в обозначении параметра штрих)

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{p}}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) + \sqrt{p}\,t, \\ y &= -\frac{\sqrt{q}}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) + \sqrt{q}\,t, \\ z &= \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)t. \end{aligned}$$

Следовательно, полагая

$$\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right), \tag{4}$$

мы окончательно получим из уравнений (2) уравнения

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{p}\,(t+\tau),\\
y &= \sqrt{q}\,(t-\tau),\\
z &= 2\tau t.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Таким образом, мы показали, что при некоторых значениях параметра τ (а именно, при значениях, представимых формулой (4)) уравнения (5) являются параметрическими уравнениями прямой, целиком принадлежащей параболоиду (1). При этом для любой точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параболоида существует (единственное) значение параметра τ (а именно, значение, даваемое формулой (4)), при котором прямая (5) проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Все это означает, что

уравнения (5) *являются параметрическими уравнениями некоторого семейства прямолинейных образующих гиперболического параболоида* (1).

Выясним теперь возможные значения параметра τ (и заодно его геометрический смысл).

Пусть сначала $\tau \neq 0$. Тогда прямая (5) пересекает плоскость $z=0$ в точке, отвечающей значению параметра $t=0$, т. е. в точке с координатами $(\sqrt{p}\,\tau,\ -\sqrt{q}\,\tau,\ 0)$. Но ясно, что эта точка принадлежит прямой

$$
\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0,\quad z = 0 \tag{6}
$$

(лежащей, как мы знаем, на параболоиде (1); см. выше) и число τ является координатой этой точки на прямой (6) в координатной системе с репером Oe, где O — точка $(0, 0, 0)$, а e — направляющий вектор $(\sqrt{p},\ -\sqrt{q},\ 0)$. При $\tau = 0$ прямая (5) целиком расположена в плоскости $z=0$ (она является первой из указанных выше прямых, по которым плоскость $z=0$ пересекает параболоид (1)) и пересекает прямую (6) в точке $(0, 0, 0)$. Поэтому и в этом случае точка пересечения прямых (5) и (6) имеет координату τ в координатной системе на прямой (6) с репером Oe.

Возьмем теперь на прямой (6) произвольную точку M_0 и проведем через нее образующую (5). По только что сказанному параметр τ, соответствующий этой образующей, будет равен координате точки M_0 на прямой (6) в репере Oe. Так как эта координата может принимать любые значения, то

в уравнениях (5) *параметр* τ *может принимать любые значения от* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Одновременно мы доказали, что

гиперболический параболоид (1) *заметается движущейся прямой, все время пересекающей фиксированную прямую* (6).

Чтобы найти второе семейство прямолинейных образующих гиперболического параболоида, можно было бы повторить шаг за шагом все наши рассуждения, но отправляясь не от прямой (2), а от прямой (3). Однако теперь можно поступить проще и написать по аналогии с уравнениями (5) уравнения

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{p}\,(\tau + t),\\
y &= \sqrt{q}\,(\tau - t),\\
z &= 2\tau t.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

При любых τ и t числа x, y, z, получающиеся из этих уравнений, удовлетворяют уравнению (1) параболоида, ибо

$$(\tau + t)^2 - (\tau - t)^2 = 4\tau t.$$

Поэтому при любом τ, $-\infty < \tau < +\infty$, уравнения (7) являются параметрическими уравнениями некоторой прямой, целиком лежащей на параболоиде. Следовательно, чтобы доказать, что уравнения (7) являются уравнениями прямолинейных образующих, остается только проверить, что для любой точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параболоида можно подобрать такое τ, что соответствующая прямая (7) проходит через эту точку, т. е. что координаты x_0, y_0, z_0 получаются при некотором значении параметра t. Другими словами, нужно доказать, что для любой точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параболоида (1) уравнения (7) (в которых положено $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$) однозначно разрешимы относительно τ и t. Но это очевидно: решение дается формулами

$$\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right), \quad t = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right).$$

Тем самым мы доказали, что

уравнения (7) *также являются параметрическими уравнениями некоторого семейства прямолинейных образующих гиперболического параболоида* (1).

Задание. Проверьте, что каждая прямая (7) пересекает прямую

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= 0,\\
z &= 0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

и что параметр τ является не чем иным, как координатой точки пересечения прямых (7) и (8) в координатной системе на прямой (8) с репером Oe', где O, как и выше, — точка $(0, 0, 0)$, а e' — направляющий вектор $(\sqrt{p}, \sqrt{q}, 0)$ прямой (8).

Поскольку найденные два семейства прямолинейных образующих явно различны (направляющие векторы $(\sqrt{p}, -\sqrt{q}, 2\tau)$ и $(\sqrt{p}, -\sqrt{q}, 2\tau)$ этих образующих даже не коллинеарны) и поскольку третьего семейства прямолинейных образующих не существует (ибо по доказанному в начале этого пункта через любую точку параболоида (1) проходят только две прямые, целиком лежащие на этом параболоиде), тем самым предложение 1 полностью доказано.

Замечание 1. Если не доказывать отсутствия третьего семейства прямолинейных образующих, то все сказанное выше можно существенно сократить, начав сразу же с уравнений (5) и доказав, что они дают прямолинейные образующие (так же как мы это выше сделали для уравнений (7)). Правда, при этом остается неясным, как до этих уравнений догадаться. (Впрочем, догадаться на самом деле совсем не сложно, если помнить формулу $(\tau+t)^2-(\tau-t)^2=4\tau t$.)

Очень просто уравнения обоих семейств прямолинейных образующих (правда, в непараметрическом виде и без доказательства отсутствия третьего семейства) можно получить (ср. п. 4), представив уравнение (1) в виде

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2z.$$

Тогда ясно, что любая прямая с уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}&=2k,\\ \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}&=\frac{z}{k},\end{aligned}\tag{9}$$

где $k\neq 0$, а также прямая с уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}&=0,\\ z&=0\end{aligned}\tag{9a}$$

(соответствующими уравнениям (9) при $k=0$) целиком расположены на параболоиде (1). Кроме того, при $k=\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}+\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)$ прямая (9) (или (9a), если $k=0$) проходит через произвольную наперед данную точку $M(x_0, y_0, z_0)$ этого параболоида. Следовательно,

прямые (9) (*вместе с прямой* (9a)) *составляют семейство прямолинейных образующих гиперболического параболоида* (1).

Аналогично показывается, что

прямые

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}&=2k,\\ \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}&=\frac{z}{k},\end{aligned}\qquad k\neq 0,$$

вместе с прямой

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}&=0,\\ z&=0\end{aligned}$$

составляют другое семейство прямолинейных образующих гиперболического параболоида (1).

Свойства прямолинейных образующих гиперболического параболоида во многом аналогичны свойствам прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (см. п. 4).

Свойство 1. *Через любую точку гиперболического параболоида проходит одна и только одна образующая каждого семейства.*

Это свойство мы выше уже доказали.

Свойство 2. *Любые две образующие гиперболического параболоида, принадлежащие разным семействам, пересекаются и потому компланарны.*

Действительно, пусть

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{p}(t+\tau_1), \\ y &= \sqrt{q}(t-\tau_1), \\ z &= 2\tau_1 t \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} x &= \sqrt{p}(\tau_2+t), \\ y &= \sqrt{q}(\tau_2-t), \\ z &= 2\tau_2 t \end{aligned}$$

— произвольные образующие первого и второго семейств. Поскольку

$$\begin{vmatrix} \sqrt{p}(\tau_2-\tau_1) & \sqrt{q}(\tau_2+\tau_1) & 0 \\ \sqrt{p} & \sqrt{q} & 2\tau_1 \\ \sqrt{p} & -\sqrt{q} & 2\tau_2 \end{vmatrix} = 2\sqrt{pq} \begin{vmatrix} \tau_2-\tau_1 & \tau_2+\tau_1 & 0 \\ 1 & 1 & \tau_1 \\ 1 & -1 & \tau_2 \end{vmatrix} = 0,$$

эти образующие не скрещиваются. Так как

$$\begin{vmatrix} \sqrt{p} & \sqrt{q} \\ \sqrt{p} & -\sqrt{q} \end{vmatrix} = 2\sqrt{pq} \neq 0,$$

они и не параллельны. Следовательно, эти образующие пересекаются.

Заметим, что это свойство сильнее соответствующего свойства прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (п. 4, свойство 2).

Свойство 3. *Две образующие гиперболического параболоида, принадлежащие одному семейству, скрещиваются.*

Действительно, пусть, например, эти образующие принадлежат семейству (5) и отвечают значениям параметра τ_1 и τ_2. Поскольку

$$\begin{vmatrix} \sqrt{p}(\tau_2-\tau_1) & \sqrt{q}(\tau_1-\tau_2) & 0 \\ \sqrt{p} & \sqrt{q} & 2\tau_1 \\ \sqrt{p} & \sqrt{q} & 2\tau_2 \end{vmatrix} = 4\sqrt{pq}(\tau_2-\tau_1)^2 \neq 0,$$

эти образующие скрещиваются.

Свойство 4. *Все образующие гиперболического параболоида, принадлежащие одному семейству, параллельны некоторой плоскости.*

Действительно, если образующие принадлежат, скажем, семейству (5), они имеют направляющие векторы вида

$$(\sqrt{p},\ -\sqrt{q},\ 2\tau)$$

и потому параллельны плоскости

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0.$$

Аналогично, образующие семейства (7) параллельны плоскости

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0.$$

Так же как и для однополостного гиперболоида, из этих свойств непосредственно вытекает, что

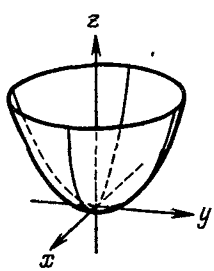
произвольный гиперболический параболоид представляет собой геометрическое место точек, принадлежащих прямым, пересекающим три фиксированные скрещивающиеся прямые, параллельные одной плоскости.

Упражнение. Докажите, что

какие бы три скрещивающиеся прямые, параллельные одной плоскости, мы ни взяли, геометрическое место точек прямых, пересекающих эти прямые, является гиперболическим параболоидом.

6. Эллиптические параболоиды

Определение 1. *Эллиптическим параболоидом* называется поверхность, имеющая в некоторой системе прямоугольных координат уравнение вида



$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \tag{1}$$

где $p>0$, $q>0$. Эта система координат называется *канонической* (относительно данного параболоида), а уравнение (1) называется *каноническим уравнением* этого эллиптического параболоида.

Форму эллиптического параболоида изучить очень легко.

При $p=q$ параболоид (1) выражается в цилиндрических координатах ρ, φ, z уравнением

$$\frac{\rho^2}{p}=2z,$$

не зависящим от φ. Следовательно, *параболоид*

$$\frac{x^2+y^2}{p}=2z \tag{2}$$

получается из параболы

$$x^2 = 2pz,$$

расположенной в плоскости Oxz, вращением вокруг оси Oz.

На этом основании параболоид (2) называется обычно *параболоидом вращения.*

Заметим, что рассмотренный в § 3 гл. 4 параболоид Q является как раз параболоидом вращения, получающимся при $p = 1$ (правда, в координатной системе с обращенной ориентацией оси Oz).

При сжатии к плоскости Oxz с коэффициентом $\sqrt{\frac{q}{p}}$ параболоид (2) переходит в параболоид (1) (соответствующее рассуждение мы проводили выше для эллипсоида и двуполостного гиперболоида, и потому повторять его здесь третий раз нужды нет). Таким образом,

произвольный эллиптический параболоид получается из параболоида вращения сжатием к некоторой плоскости.

Этого уже вполне достаточно, чтобы отчетливо представить себе форму эллиптического параболоида. Он имеет вид чаши эллиптического сечения (в случае параболоида вращения — кругового), охватывающей положительное направление оси Oz.

Столь же просто форма эллиптического параболоида исследуется методом плоских сечений. Мы приведем лишь окончательный результат:

При $h < 0$ плоскость $z = h$ не пересекает эллиптический параболоид (1);

при $h = 0$ плоскость $z = h$ имеет с параболоидом (1) *одну общую точку;*

при $h > 0$ плоскость $z = h$ пересекает параболоид (1) *по эллипсу с полуосями*

$$\sqrt{2hp}, \quad \sqrt{2hq},$$

монотонно возрастающими от нуля до $+\infty$, когда h возрастает от нуля до $+\infty$.

Плоскость $y = h$ пересекает эллиптический параболоид (1) *по параболе с фокальным параметром p, с вершиной в точке $\left(0, h, \frac{h^2}{2q}\right)$ и с «рогами», направленными «вверх»;*

плоскость $x = h$ пересекает эллиптический параболоид (1) *по параболе с фокальным параметром q, с вершиной в точке $\left(h, 0, \frac{h^2}{2p}\right)$ и с «рогами», также направленными «вверх».*

Легко, далее, видеть, что в отличие от гиперболического параболоида

эллиптический параболоид линейчатой поверхностью не является.

Более того,

эллиптический параболоид не содержит ни одной прямой.

Действительно, поскольку параболоид (1) расположен в полупространстве $z \geqslant 0$, на нем могут лежать лишь прямые, параллельные плоскости $z=0$, т. е. расположенные в одной из плоскостей вида $z=h$. Но, как мы видели, каждая такая плоскость пересекает параболоид (при $h>0$) по эллипсу, и потому никакая прямая, принадлежащая этой плоскости, не может принадлежать параболоиду.

Замечание 1. Аналогично доказывается, что

ни эллипсоид, ни двуполостный гиперболоид не могут содержать ни одной прямой и потому не являются линейчатыми поверхностями.

Действительно, для эллипсоида это вытекает из того, что он целиком расположен в некотором параллелепипеде (см. п. 1). Поскольку плоскость $z=0$ не пересекает гиперболоид

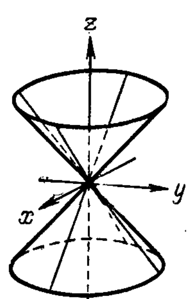
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

каждая прямая, расположенная на этом гиперболоиде, должна принадлежать плоскости вида $z=h$. Но, как мы знаем (п. 2), каждая такая плоскость либо не пересекает гиперболоид, либо имеет с ним одну общую точку, либо пересекает его по эллипсу.

Однако это не означает, что однополостными гиперболоидами и гиперболическими параболоидами исчерпываются все линейчатые поверхности второго порядка. Линейчатые поверхности второго порядка, не являющиеся ни гиперболоидами, ни параболоидами, мы изучим в следующих пунктах.

7. Конусы второго порядка

Определение 1. *Конусом второго порядка* называется поверхность, имеющая в некоторой системе прямоугольных координат уравнение вида



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \tag{1}$$

где $a \geqslant b \geqslant 0$, $c>0$ и $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$. Эта система координат называется *канонической* (относительно данного конуса), а уравнение (1) называется *каноническим уравнением* этого конуса.

Легко видеть, что

плоскость $z=h$ с $h \neq 0$ пересекает конус (1) по эллипсу с полуосями

$$\frac{a}{c}|h|, \quad \frac{b}{c}|h|,$$

монотонно увеличивающимися при $h \to \infty$ и стремящимися к нулю при $h \to 0$;

плоскость $z=0$ пересекает конус (1) *в одной точке;*

плоскость $y=h$ с $h\neq 0$ пересекает конус (1) *по гиперболе с полуосями*

$$\frac{c}{b}|h|,\quad \frac{a}{b}|h|,$$

монотонно увеличивающимися при $h\to\infty$ и стремящимися к нулю при $h\to 0$;

плоскость $x=h$ с $h\neq 0$ пересекает конус (1) *по гиперболе с полуосями*

$$\frac{c}{a}|h|,\quad \frac{b}{a}|h|,$$

монотонно увеличивающимися при $h\to\infty$ и стремящимися к нулю при $h\to 0$;

плоскости $y=0$ и $x=0$ пересекают конус по паре пересекающихся прямых.

Задание. Докажите все эти утверждения.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка конуса (1). Прямая OM_0, проходящая через начало координат $O(0,0,0)$ и точку M_0, имеет параметрические уравнения вида

$$x = x_0t,$$
$$y = y_0t,$$
$$z = z_0t.$$

Поскольку

$$\frac{(x_0t)^2}{a^2}+\frac{(y_0t)^2}{b^2}-\frac{(z_0t)^2}{c^2}=\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)t^2=0,$$

мы видим, что

все точки прямой OM_0 принадлежат конусу (1).

Это означает, что справедливо следующее

Предложение 1. *Конус* (1) *является линейчатой поверхностью, обладающей семейством прямолинейных образующих, проходящих через точку O.*

Это оправдывает следующее общее

Определение 2. Линейчатая поверхность, обладающая семейством прямолинейных образующих, проходящих через некоторую точку, называется *конусом* с *вершиной* в этой точке.

Замечание 1. Согласно этому определению, *любая плоскость является конусом* (с вершиной в произвольной ее точке). Более того, конусом будет поверхность, состоящая из произвольного числа плоскостей, проходящих через одну прямую (вершиной такого конуса может служить любая точка этой прямой).

Упражнение. Покажите, что, за исключением этих особых случаев, любой конус имеет только одну вершину и только одно семейство образующих.

Определение 3. Линия, расположенная на конусе, называется его *направляющей*, если любая прямолинейная образующая конуса пересекает ее в одной и только одной точке.

Примером направляющей является линия, получающаяся при пересечении конуса произвольной плоскостью, не проходящей через вершину конуса. Направляющие такого вида называются *плоскими*.

Для конуса второго порядка (1) плоскими направляющими являются, например, все указанные выше эллипсы и гиперболы.

Замечание 2. Интересно, что

любой конус второго порядка (1) *обладает плоской направляющей, являющейся окружностью.*

Упражнение. Докажите это утверждение.

На этом основании конусы (1) иногда называются *круговыми конусами* (*косыми*, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром направляющей окружности, не перпендикулярна плоскости этой окружности, и *прямыми* — в противном случае).

Задание. Докажите, что

конус (1) *тогда и только тогда является прямым круговым конусом, когда* $a = b$.

Это возвращает нас к определению 1 п. 5 § 1, поскольку при $a = b$ уравнение (1) может быть переписано в виде

$$x^2 + y^2 = R^2 z^2,$$

где $R = a/c$.

Упражнение. Покажите, что любая не проходящая через начало координат плоскость пересекает конус (1) либо по эллипсу, либо по параболе, либо по гиперболе.

Напомним, что функция $F(x, y, z)$ называется *однородной*, если существует такое число ρ, что для любых x, y, z и t имеет место тождество

$$F(tx, ty, tz) = t^\rho F(x, y, z)$$

(число ρ называется при этом *степенью* однородной функции $F(x, y, z)$).

Выше при доказательстве предложения 1 мы по существу использовали лишь тот факт, что функция

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

является однородной функцией (степени 2). Поэтому то же самое рассуждение показывает, что

любое уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

с однородной функцией $F(x, y, z)$ определяет в пространстве некоторый конус с вершиной в начале координат O.

Замечание 3. Здесь, конечно, предполагается, что уравнение (2) действительно определяет некоторую поверхность (а не удовлетворяется, скажем, только точкой $(0, 0, 0)$).

Замечание 4. Обратим внимание на то, что уравнение (2) определяет конус не только в прямоугольных, но в любых аффинных координатах x, y, z.

Замечательно, что обратное утверждение также верно, т. е. *любой конус с вершиной O может быть задан уравнением* (2) *с однородной функцией $F(x, y, z)$.*

Действительно, пусть данный конус задается уравнением

$$G(x, y, z) = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим его пересечение со сферой

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{4}$$

радиуса 1 с центром в точке O. Ясно, что это пересечение является направляющей конуса (3).

Определим теперь функцию $F(x, y, z)$ формулой

$$F(x, y, z) = G\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),$$

если $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. При $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ мы положим

$$F(0, 0, 0) = 0.$$

Функция $F(x, y, z)$ является, очевидно, однородной функцией (нулевой степени) и потому уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \tag{5}$$

определяет некоторый конус с вершиной в точке O.

Функция $F(x, y, z)$, по построению, совпадает с функцией $G(x, y, z)$ на сфере (4). Поэтому конус (5) пересекается со сферой (4) по той же линии, что и конус (3). Таким образом, конусы (3) и (5) имеют одну и ту же вершину и одну и ту же направляющую. Следовательно, они совпадают.

Тем самым мы доказали, что конус (3) может быть задан, как и утверждалось, однородным уравнением.

Замечание 5. Доказанное утверждение, конечно, не означает, что конус (с вершиной в начале координат) нельзя задать неоднородным уравнением.

Рассмотрим, например, функцию вида

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 1)\, G(x, y, z),$$

где $G(x, y, z)$ — некоторая однородная функция. Функция $F(x, y, z)$ заведомо не однородна и вместе с тем уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

определяет ту же поверхность (тот же конус), что и уравнение

$$G(x, y, z) = 0.$$

Интересно, что для алгебраических уравнений первой и второй степени это уже не так, т. е.

если многочлен $F(x, y, z)$ первой или второй степени обладает тем свойством, что уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

определяет конус с вершиной в начале координат, то этот многочлен однороден.

Для многочленов первой степени это утверждение очевидно. Докажем его для многочленов второй степени.

Произвольный многочлен второй степени от переменных x, y, z имеет вид

$$F(x, y, z) = F_0 + F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z),$$

где F_0 — некоторое число, $F_1(x, y, z)$ — однородный многочлен первой степени относительно x, y, z и $F_2(x, y, z)$ — однородный многочлен второй степени относительно x, y, z (выписывать который в явном виде нам нет нужды).

Мы хотим доказать, что если уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \tag{6}$$

является уравнением конуса с вершиной в начале координат и если это уравнение действительно является уравнением второй степени, т. е. многочлен $F_2(x, y, z)$ тождественно не равен нулю, то многочлен $F(x, y, z)$ совпадает с многочленом $F_2(x, y, z)$, т. е. число F_0 и многочлен $F_1(x, y, z)$ равны нулю.

Утверждение относительно числа F_0, по существу, очевидно. Действительно, если уравнение (6) является уравнением конуса с вершиной в начале координат, то ему удовлетворяют, в частности, координаты $(0, 0, 0)$ этой вершины. Но поскольку, в силу однородности, $F_1(0, 0, 0) = 0$ и $F_2(0, 0, 0) = 0$, то это возможно только при $F_0 = 0$.

Утверждение относительно многочлена $F_1(x, y, z)$ доказывается значительно сложнее. Мы проведем доказательсто «от противного». Пусть многочлен $F_1(x, y, z) = Ax + By + Cz$ не равен тождественно нулю, т. е. пусть хотя бы один из его коэффициентов A, B, C, скажем, для определенности, коэффициент C, отличен от нуля. Тогда формулы

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= y, \\ u &= Ax + By + Cz \end{aligned}$$

будут определять в пространстве некоторые новые аффинные координаты x, y, u (вообще говоря, не прямоугольные, даже если исходные координаты x, y, z были прямоугольны). В координатах x, y, u уравнение (6) конуса принимает, очевидно, вид

$$G_2(x, y, u) + u = 0,$$

где $G_2(x, y, u)$ — некоторый (однородный) многочлен второй степени от x, y, u.

Расположив многочлен $G_2(x, y, u)$ по степеням u, мы можем написать

$$G_2(x, y, u) = au^2 + H_1(x, y)u + H_2(x, y),$$

где $H_1(x, y)$ и $H_2(x, y)$ — однородные многочлены (соответственно первой и второй степени) от переменных x, y, а a — некоторое число. В этих обозначениях уравнение (6) приобретает вид

$$au^2+(H_1(x, y)+1)\,u+H_2(x, y)=0. \tag{7}$$

Поскольку это уравнение является, по условию, уравнением конуса с вершиной в начале координат, то вместе с некоторой точкой (x_0, y_0, u_0) ему удовлетворяет и любая точка вида (x_0t, y_0t, u_0t), где t — произвольное число, т. е. тождественно по t имеет место равенство

$$\left[au_0^2+H_1(x_0, y_0)\,u_0+H_2(x_0, y_0)\right]t^2+tu_0=0,$$

что возможно тогда и только тогда, когда $u_0=0$ и $H_2(x_0, y_0)=0$. Таким образом, мы доказали, что любое решение уравнения (7) имеет вид $(x_0, y_0, 0)$, где (x_0, y_0) — некоторое решение уравнения

$$H_2(x, y)=0. \tag{8}$$

В частности, при $x_0=0$, $y_0=0$ мы должны обязательно получить $u_0=0$. Но полагая в уравнении (7) $x=0$, $y=0$, мы получим уравнение

$$au^2+u=0.$$

Чтобы это уравнение имело только корень $u_0=0$, необходимо, чтобы $a=0$. Таким образом, уравнение (7) имеет на самом деле вид

$$(H_1(x, y)+1)\,u+H_2(x, y)=0.$$

Чтобы каждое решение этого уравнения имело вид $(x_0, y_0, 0)$, где x_0, y_0 — некоторое решение уравнения (8), необходимо, чтобы для любых чисел (x_1, y_1), для которых $H_2(x_1, y_1)\neq 0$ (т. е. которые не являются решениями уравнения (8)), имело место равенство

$$H_1(x_1, y_1)+1=0.$$

Рассмотрим поэтому более внимательно уравнение (8). Поскольку многочлен $H_2(x, y)$ является однородным многочленом второй степени, это уравнение имеет вид

$$c_0x^2+2c_1xy+c_2y^2=0. \tag{9}$$

Если многочлен $c_0x^2+2c_1xy+c_2y^2$ разлагается на линейные множители, то этому уравнению удовлетворяют точки д в у х п р я м ы х (возможно, совпадающих), проходящих через точку $(0, 0)$. Если же многочлен $c_0x^2+2c_1xy+c_2y^2$ отличен от нуля и не разлагается на линейные множители, то уравнению (9) удовлетворяет только т о ч к а $(0, 0)$. Наконец, если $c_0=c_1=c_2=0$, то уравнению (9) удовлетворяет л ю б а я точка плоскости.

Таким образом, условию $H_2(x, y)\neq 0$ либо не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости Oxy, либо, напротив, удовлетворяют координаты любой точки этой плоскости, отличной от точки $(0, 0)$ или не принадлежащей двум (возможно, совпадающим) прямым, проходящим через точку $(0, 0)$.

С другой стороны, поскольку многочлен $H_1(x, y)$ является однородным многочленом первой степени, уравнение

$$H_1(x, y)+1=0$$

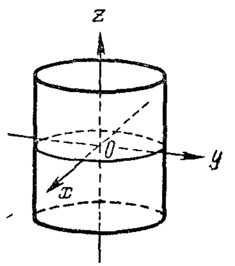
определяет в плоскости Oxy прямую, не проходящую через точку $(0,0)$ (либо — если многочлен $H_1(x, y)$ тождественно равен нулю — вообще не может быть удовлетворено).

Следовательно, равенство $H_1(x_1, y_1)+1=0$ тогда и только тогда имеет место для любых чисел x_1, y_1, для которых $H_2(x_1, y_1)\neq 0$, когда таких чисел вообще нет, т. е. когда многочлен $H_2(x, y)$ тождественно равен нулю.

Тем самым мы доказали, что уравнение нашего конуса имеет на самом деле вид

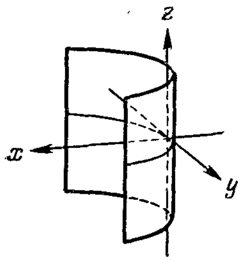
$$(H_1(x, y)+1)u=0$$

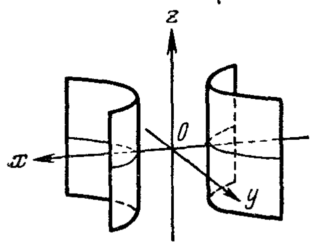
и потому для любых чисел x_0, y_0, для которых $H_1(x_0, y_0)+1=0$, имеет решение вида (x_0, y_0, u) с произвольным u. Поскольку это невозможно (ибо, как мы знаем, для любой точки нашего конуса координата u должна быть равна нулю), отсюда следует, что многочлен $H_1(x, y)$ тождественно равен нулю.



Таким образом, оба многочлена $H_1(x, y)$ и $H_2(x, y)$ тождественно равны нулю. Поскольку $a=0$, это означает, что тождественно равен нулю многочлен $G_2(x, y, u)$, а значит, вопреки предположению, и многочлен $F_2(x, y, z)$.

8. Цилиндры второго порядка





Определение 1. Поверхность называется

а) *эллиптическим цилиндром,*

б) *параболическим цилиндром,*

в) *гиперболическим цилиндром,*

если в некоторой системе прямоугольных координат x, y, z (называемой *канонической* относительно данной поверхности) она имеет следующее (*каноническое*) уравнение:

$$\text{а) } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a\geqslant b>0,$$

$$\text{б) } y^2=2px, \qquad p>0, \tag{1}$$

$$\text{в) } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a>0,\ b>0.$$

Задание. Опишите линии, получающиеся в пересечении этих цилиидров плоскостями $x=h$, $y=h$ и $z=h$.

Поскольку уравнения (1) не зависят от z, вместе с некоторой точкой (x_0, y_0, z_0) им удовлетворяет и любая точка вида (x_0, y_0, z). Это означает, что

вместе с некоторой точкой M_0 каждый из цилиндров (1) *содержит всю прямую, проходящую через эту точку параллельно оси Oz.*

Другими словами, справедливо следующее

Предложение 1. *Каждый из цилиндров* (1) *является линейчатой поверхностью, обладающей семейством прямолинейных образующих, параллельных прямой Oz.*

Это оправдывает следующее общее

Определение 2. Линейчатая поверхность, обладающая семейством прямолинейных образующих, параллельных некоторой фиксированной прямой, называется *цилиндром.* Направление этой прямой называется *осевым направлением* цилиндра.

Замечание 1. Согласно этому определению любая плоскость и, более общо, любая поверхность, состоящая из любого числа плоскостей, проходящих через одну прямую (или параллельных друг другу), является цилиндром. Таким образом, все «особые» конусы, описанные в замечании 1 п. 7, одновременно являются и цилиндрами.

Упражнение. Покажите, что, за исключением цилиндров, являющихся плоскостями или несколькими параллельными плоскостями, любой цилиндр имеет единственное семейство параллельных образующих (и, следовательно, единственное осевое направление).

Замечание 2. Во многих отношениях цилиндры подобны конусам. Это объясняется тем, что в евклидово-проективном пространстве цилиндры являются частным случаем конусов (а именно, представляют собой конусы с вершиной в несобственной точке).

Следующее определение вполне аналогично соответствующему определению для конусов:

Определение 3. Линия, расположенная на цилиндре, называется его *направляющей*, если любая прямолинейная образующая цилиндра пересекает ее в одной и только одной точке. Направляющая называется *плоской*, если она является пересечением цилиндра с некоторой плоскостью.

Можно без особого труда показать, что

любая плоская направляющая

$$\left.\begin{array}{l}\textit{эллиптического}\\ \textit{параболического}\\ \textit{гиперболического}\end{array}\right\}\ \textit{цилиндра является}\ \left\{\begin{array}{l}\textit{эллипсом}\\ \textit{параболой}\\ \textit{гиперболой.}\end{array}\right.$$

Для эллиптических цилиндров верно и более точное утверждение:

любой эллиптический цилиндр обладает плоской направляющей, являющейся окружностью.

Упражнение. Докажите эти утверждения.

На основании последнего утверждения эллиптические цилиндры иногда называются также *косыми круговыми цилиндрами.* Эпитет «косой» здесь подчеркивает, что плоскость направляющей окружности может быть не перпендикулярна осевому направлению цилиндра. В случае, когда эта плоскость перпендикулярна осевому направлению цилиндра, цилиндр называется *прямым круговым цилиндром* (это в точности — «цилиндры», известные читателю из школы). Ясно, что эллиптический цилиндр тогда и только тогда является прямым круговым цилиндром, когда в его каноническом уравнении $a = b$.

Соображения, использованные выше для доказательства предложения 1, немедленно показывают, что

любое уравнение вида

$$F(x, y) = 0, \tag{2}$$

левая часть которого не зависит от z, определяет в пространстве цилиндр, осевым направлением которого является направление оси Oz.

При этом ясно, что

линия на плоскости Oxy, определяемая уравнением (2), *является направляющей этого цилиндра.*

Замечание 3. Как и в аналогичном утверждении для конусов (см. п. 7), здесь, конечно, предполагается, что уравнение (2) действительно определяет на плоскости Oxy некоторую линию.

Замечание 4. Уравнение вида (2) определяет цилиндр в любых аффинных координатах.

Верно и обратное утверждение, т. е.

любой цилиндр, прямолинейные образующие которого параллельны оси Oz, может быть задан уравнением (2) *с левой частью, не зависящей от z.*

Действительно, пусть (2) — уравнение направляющей данного цилиндра, получающейся при пересечении его координатной плоскостью Oxy. Ясно тогда, что это же уравнение (но рассматриваемое в пространстве, т. е. как уравнение от x, y, z) будет и уравнением данного цилиндра.

Упражнение. Покажите (ср. п. 7), что

если многочлен $F(x, y, z)$ степени не выше второй обладает тем свойством, что уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

определяет цилиндр с прямолинейными образующими, параллельными оси Oz, то этот многочлен не зависит от z.

Как показывает пример уравнения

$$x(x^2 + y^2 + z^2 + 1) = 0,$$

для многочленов степени выше второй соответствующее утверждение неверно.