Глава 6

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Линии второго порядка на евклидовой плоскости

Самое общее уравнение линии второго порядка имеет (в прямоугольных или любых аффинных координатах) вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (1)$$

где хотя бы одно из чисел a_{11}, a_{12}, a_{22} отлично от нуля.

Предполагая координаты x, y прямоугольными, мы попробуем найти другие (также прямоугольные) координаты x', y', в которых уравнение линии (1) имеет возможно более простой вид.

В первую очередь мы постараемся поворотом координатных осей уничтожить член, содержащий произведение координат (конечно, если этот член имеется, т. е. если $a_{12} \neq 0$).

Повернув оси координат на угол θ, мы получим новые координаты x', y', связанные со старыми координатами соотношениями

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned} \qquad (2)$$

(см. п. 4 § 1 гл. 2). В этих координатах линия (1) задается уравнением

$$\begin{aligned} a_{11}(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + 2a_{12}(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + \\ + a_{22}(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 + 2a_{13}(x'\cos\theta - y'\sin\theta) + \\ + 2a_{23}(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + a_{33} = 0, \end{aligned}$$

т. е. уравнением

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \qquad (1')$$

где

$$
\begin{aligned}
a'_{11} &= a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta,\\
a'_{12} &= (a_{22} - a_{11})\cos\theta\sin\theta + a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta),\\
a'_{22} &= a_{11}\sin^2\theta - 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\cos^2\theta,\\
a'_{13} &= a_{13}\cos\theta + a_{23}\sin\theta,\\
a'_{23} &= -a_{13}\sin\theta + a_{23}\cos\theta.\\
a'_{33} &= a_{33}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Условие $a'_{12} = 0$ дает нам для угла θ уравнение

$$(a_{22} - a_{11})\cos\theta\sin\theta + a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0,$$

т. е. уравнение

$$(a_{22} - a_{11})\sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta = 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \tag{4}$$

Тем самым доказано, что
при повороте координатных осей на угол

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

уравнение (1) *преобразуется в аналогичное уравнение с коэффициентом* a_{12}, *равным нулю.*

Таким образом, без ограничения общности, мы можем считать, что наша линия с самого начала задана уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{5}$$

Дальнейшее упрощение этого уравнения мы произведем, перенося начало координат в некоторую точку (x_0, y_0), т. е. вводя новые координаты x', y', связанные с координатами x, y формулами

$$
\begin{aligned}
x &= x' + x_0,\\
y &= y' + y_0.
\end{aligned}
$$

В координатах x', y' линия (1) задается уравнением

$$
\begin{aligned}
a_{11}(x' + x_0)^2 + 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) + a_{22}(y' + y_0)^2 +\\
+ 2a_{13}(x' + x_0) + 2a_{23}(y' + y_0) + a_{33} = 0,
\end{aligned}
$$

т. е. уравнением

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0,$$

где

$$
\begin{aligned}
&a'_{11}=a_{11}, \quad a'_{12}=a_{12}, \quad a'_{22}=a_{22},\\
&a'_{13}=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13},\\
&a'_{23}=a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23},\\
&a'_{33}=a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0+a_{33}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

В частности, для упрощенного уравнения (5) мы получаем, что

$$
\begin{gathered}
a'_{11}=a_{11}, \quad a'_{12}=a_{12}=0, \quad a'_{22}=a_{22},\\
a'_{13}=a_{11}x_0+a_{13},\\
a'_{23}=a_{22}y_0+a_{23},\\
a'_{33}=a_{11}x_0^2+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0+a_{33}.
\end{gathered}
$$

Постараемся теперь подобрать точку (x_0, y_0) так, чтобы коэффициенты при x' и y' обратились в нуль. Это дает нам уравнения

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_0+a_{13}=0,\\
a_{22}y_0+a_{23}=0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Если $a_{11}\neq 0$ и $a_{22}\neq 0$, то эти уравнения имеют единственное решение

$$
x_0=-\frac{a_{13}}{a_{11}}, \quad y_0=-\frac{a_{23}}{a_{22}}. \tag{8}
$$

Этим доказано, что

при переносе начала координат в точку с координатами (8) *уравнение* (5) *с* $a_{11}\neq 0$ *и* $a_{22}\neq 0$ *преобразуется в аналогичное уравнение с коэффициентами* a_{13} *и* a_{23}, *равными нулю.*

Пусть теперь один из коэффициентов a_{11} и a_{22} равен нулю (оба они равны нулю быть не могут, поскольку тогда мы имели бы линию не второго, а первого порядка). Переименовывая, если нужно, координаты, мы можем считать, что $a_{22}\neq 0$. Тогда мы можем удовлетворить второму из уравнений (7) (решение дается второй из формул (8)), и в нашем распоряжении еще останется x_0. Постараемся им распорядиться так, чтобы обратить в нуль свободный член. Это даст нам уравнение

$$
a_{11}x_0^2+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0+a_{33}=0,
$$

т. е. $\left(\text{поскольку } a_{11}=0 \text{ и } y_0=-\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)$ уравнение

$$
2a_{13}x_0=\frac{a_{23}^2}{a_{22}}-a_{33}.
$$

При $a_{13}\neq 0$ это уравнение имеет единственное решение; вместе со вторым уравнением (8) это дает нам точку с координатами

$$
x_0=\frac{a_{23}^2-a_{22}a_{33}}{2a_{13}a_{22}}, \quad y_0=-\frac{a_{23}}{a_{22}}. \tag{9}
$$

Таким образом,

при переносе начала координат в точку с координатами (9) *уравнение* (5) *с* $a_{11}=0$, $a_{22}\neq 0$ *и* $a_{13}\neq 0$ *переходит в аналогичное уравнение с коэффициентами* a_{23} *и* a_{33}, *равными нулю.*

Если же $a_{13}=0$, то выбор координаты x_0 никак не влияет на уравнение, и мы получаем, что

при переносе начала координат в точку $\left(x_0, -\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)$, *где* x_0 — *произвольно, уравнение* (5) *с* $a_{11}=a_{13}=0$ *и* $a_{22}\neq 0$ *переходит в аналогичное уравнение с коэффициентом* a_{23}, *равным нулю.*

Резюмируя, мы получаем следующее

Предложение 1. *Для любой линии второго порядка существует система прямоугольных координат, в которой ее уравнение имеет либо вид*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}=0, \tag{10}$$

где $a_{11}\neq 0$, $a_{22}\neq 0$, *либо вид*

$$a_{22}y^2+2a_{13}x=0, \tag{11}$$

где $a_{22}\neq 0$, $a_{13}\neq 0$, *либо вид*

$$a_{22}y^2+a_{33}=0, \tag{12}$$

где $a_{22}\neq 0$.

Определение 1. Уравнения (10)—(12) называются *приведенными уравнениями* линии второго порядка. Линии, имеющие приведенные уравнения вида (10), мы будем называть линиями *типа* I, имеющие приведенные уравнения вида (11) — линиями *типа* II, а имеющие приведенные уравнения вида (12) — линиями *типа* III.

Замечание 1. Хотя априори не исключено, что одна и та же линия может принадлежать различным типам (т. е. что при одном способе приведения получится, скажем, уравнение (10), а при другом — уравнение (11)), на самом деле это невозможно. Мы этого доказывать здесь не будем, поскольку ниже мы тип линии охарактеризуем другим способом, из которого невозможность для линии иметь два различных типа будет вытекать автоматически.

Рассмотрим более внимательно уравнения (10) линий типа I.

Случай 1. *Коэффициенты* a_{11} *и* a_{22} *имеют различные знаки.* Умножив (если нужно) уравнение (10) на —1, мы можем, без ограничения общности, считать, что коэффициент a_{33} неположителен:

$$a_{33}\leqslant 0.$$

Кроме того (переименовав, если нужно, координаты), мы можем также считать, что коэффициент a_{11} положителен, а коэффициент a_{22} отрицателен:

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} < 0.$$

Случай 1а. *Коэффициент a_{33} отличен от нуля.* Тогда, полагая

$$a^2 = -\frac{a_{33}}{a_{11}}, \quad b^2 = \frac{a_{33}}{a_{22}},$$

мы приведем уравнение (10) к виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > 0, \quad b > 0, \tag{13}$$

являющемуся каноническим уравнением *гиперболы* (см. п. 3 § 1 гл. 5).

Случай 1б. *Коэффициент a_{33} равен нулю.* Тогда без ограничения общности можно считать, что $a_{11} \leqslant -a_{22}$. Полагая

$$a^2 = \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{11}}, \quad b^2 = -\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{22}},$$

мы приведем уравнение (10) к виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \text{где} \quad a \geqslant b > 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \tag{14}$$

т. е. к виду

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяют точки двух прямых

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

пересекающихся в точке (0, 0). Таким образом, в этом случае наша линия второго порядка состоит из *двух пересекающихся прямых.*

Определение 2. Случай 1 принято называть *гиперболическим* (при $a_{33} \neq 0$ — *невырожденным*, а при $a_{33} = 0$ — *вырожденным*).

Случай 2. *Коэффициенты a_{11} и a_{22} имеют один и тот же знак.* Умножая (если нужно) уравнение (10) на -1, мы, без ограничения общности, можем считать эти коэффициенты положительными:

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0.$$

Кроме того, переставляя (если нужно) координаты, мы можем считать, что

$$a_{11} \leqslant a_{22}.$$

Случай 2а. *Коэффициент a_{33} отрицателен.* Тогда, полагая

$$a^2 = -\frac{a_{33}}{a_{11}}, \quad b^2 = -\frac{a_{33}}{a_{22}},$$

мы приведем уравнение (10) к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geqslant b > 0, \tag{15}$$

являющемуся каноническим уравнением *эллипса* (см. п. 2 § 1 гл. 5).

Случай 2б. *Коэффициент a_{33} равен нулю.* Тогда, полагая

$$a^2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{a_{11}}, \quad b^2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{a_{22}},$$

мы приведем уравнение (10) к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где} \quad a \geqslant b > 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1. \tag{16}$$

Этому уравнению удовлетворяет только *точка* $(0, 0)$.

Случай 2в. *Коэффициент a_{33} положителен.* Тогда, полагая

$$a^2 = \frac{a_{33}}{a_{11}}, \quad b^2 = \frac{a_{33}}{a_{22}},$$

мы приведем уравнение (10) к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad a \geqslant b > 0. \tag{17}$$

Этому уравнению не удовлетворяет ни одна точка плоскости, т. е. оно определяет *пустое множество.*

Определение 3. Случай 2 принято называть *эллиптическим* (при $a_{33} < 0$ — *действительным невырожденным*, при $a_{33} > 0$ — *мнимым невырожденным* и при $a_{33} = 0$ — *вырожденным*).

Рассмотрим теперь уравнения (11) кривых типа II.

Меняя (если нужно) ориентацию оси Ox, мы можем, без ограничения общности, считать, что коэффициенты a_{22} и a_{13} имеют разные знаки (напомним, что по условию $a_{22} \neq 0$ и $a_{13} \neq 0$). Тогда, полагая

$$p = -\frac{a_{13}}{a_{22}},$$

мы приведем уравнение (11) к виду

$$y^2 = 2px, \quad p > 0, \tag{18}$$

являющемуся каноническим уравнением *параболы* (см. п. 1 § 1 гл. 5).

Для уравнений (12) кривых типа III возможны три различные случая.

Случай А. *Коэффициент a_{33} равен нулю.* Тогда после сокращения на a_{11} уравнение (12) приобретает вид

$$y^2 = 0. \tag{19}$$

Это уравнение определяет ту же прямую (ось Ox), что и уравнение $y = 0$. Однако чтобы оттенить различие между уравнениями $y^2 = 0$ и $y = 0$, мы будем говорить, что первое из них — *дважды взятая прямая* $y = 0$ или что оно определяет *пару совпадающих прямых.*

Случай Б. *Коэффициенты a_{22} и a_{33} имеют разные знаки.* Тогда, полагая

$$b^2 = -\frac{a_{33}}{a_{22}},$$

мы приведем уравнение (12) к виду

$$y^2 - b^2 = 0, \ b > 0, \tag{20}$$

т. е. к виду

$$(y + b)(y - b) = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты точек двух параллельных прямых

$$y + b = 0 \quad \text{и} \quad y - b = 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае наша линия второго порядка состоит из *двух параллельных прямых.*

Случай В. *Коэффициенты a_{22} и a_{33} имеют одинаковые знаки.* Тогда, полагая

$$b^2 = \frac{a_{33}}{a_{22}},$$

мы приведем уравнение (12) к виду

$$y^2 + b^2 = 0, \ b > 0. \tag{21}$$

Этому уравнению не удовлетворяет ни одна точка плоскости.

Определение 4. Случаи уравнений (11) и (12) называются *параболическими* (случай уравнения (11) — *невырожденным*, а уравнения (12) — *вырожденным*).

Таким образом, линии типа I могут быть двух видов: гиперболического и эллиптического (с дальнейшим подразделением на вырожденные и невырожденные, а в случае эллиптических линий — еще не действительные и мнимые). Напротив, линии типов II и III объединяются в один вид параболических линий (невырожденных, т. е. парабол, — в случае типа II, и вырожденных, — в случае типа III).

Определение 5. Уравнения (13)—(21) называются (*евклидово*) *каноническими уравнениями*, а описанная процедура — *приведением уравнения* (1) *к каноническому виду*.

Заметим, что эта терминология согласована с употреблением термина «каноническое уравнение» для эллипса, гиперболы и параболы в § 1 гл. 5.

Замечание 2 (очень важное!). Мы видим, что оставаясь в обыкновенной евклидовой плоскости, мы в качестве «линий второго порядка» получаем, в частности, точки (уравнение (16)) и пустые множества (уравнения (17) и (21)). При этом «линии», задаваемые уравнениями (17) и (21), оказываются одинаковыми, хотя сами эти уравнения различны (не сводятся одно к другому заменой координат). Чтобы устранить эти недостатки, целесообразно перейти в евклидову вещественно-комплексную плоскость (см. п. 5 § 3 гл. 2), являющуюся «естественной областью», в которой следует развивать теорию линий второго порядка и в которой эта теория приобретает законченный и изящный вид.

Начиная с этого места, мы будем всегда предполагать (*если только явно не оговорено противное*), *что все линии рассматриваются в евклидовой вещественно-комплексной плоскости.*

Конечно, мы при этом будем по-прежнему интересоваться лишь *вещественными линиями* второго порядка, т. е. линиями, задаваемыми уравнениями (1) с вещественными коэффициентами.

Поскольку уравнение (16) может быть представлено в виде

$$\left(\frac{x}{a}+i\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-i\frac{y}{b}\right)=0,$$

мы видим, что на вещественно-комплексной плоскости оно определяет *пару мнимых* (*т. е. невещественных*) *комплексно-сопряженных прямых*

$$y=\pm i\frac{b}{a}x,$$

пересекающихся в вещественной точке (0, 0).

Аналогично, уравнение (21) определяет *пару параллельных* (*т. е. непересекающихся*) *мнимых комплесно-сопряженных прямых*

$$y=\pm ib.$$

Что же касается уравнения (16), то оно определяет в евклидовой вещественно-комплексной плоскости некоторую новую, у нас еще не встречавшуюся, линию, называемую «мнимым эллипсом».

Дадим точное

Определение 6. *Мнимым эллипсом* называется линия, имеющая в некоторой (*канонической* для этой линии) евклидовой координатной системе уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

где $a \geqslant b > 0$.

При $a = b$ получаются уже известные нам (см. п. 6 § 3 гл. 4) окружности мнимого радиуса.

Эллипсы в прежнем смысле (т. е. в смысле определения 1 п. 2 § 1 гл. 5) мы будем теперь называть *действительными эллипсами.*

Замечание 3. Строго говоря, действительные эллипсы не являются эллипсами в смысле определения 1 п. 2 § 1 гл. 5. Последние являются лишь пересечениями действительных эллипсов с вещественной плоскостью. То же самое, конечно, относится и к линиям, которые мы будем теперь называть «гиперболами» и «параболами».

Различие между эллипсами на евклидовой вещественной плоскости и действительными эллипсами на евклидовой вещественно-комплексной плоскости проявляется, например, в том, что, в то время как эллипс в прежнем смысле не имеет асимптот, *действительный эллипс асимптоты имеет* (ими будут, очевидно, комплексно-сопряженные прямые $y = \pm \frac{bi}{a} x$).

Вместе с тем легко видеть, что развитая в § 1 гл. 5 теория эллипсов на вещественной плоскости сохраняется (с незначительными и само собой понятными изменениями) и для действительных эллипсов на вещественно-комплексной плоскости. Более того, эта теория может быть теперь построена и для мнимых эллипсов. Например, для мнимых эллипсов можно ввести *оси* (являющиеся вещественными прямыми), *центр* (являющийся вещественной точкой), *фокусы* (также являющиеся вещественными точками), *директрисы* (являющиеся мнимыми комплексно-сопряженными прямыми), доказать аналоги предложений 2 и 3 из п. 2 § 1 гл. 5 и т. д.

Упражнение. Докажите для мнимых эллипсов аналоги предложений 2 и 3 из п. 2 § 1 гл. 5.

Задание. Докажите, что

никакой эллипс (действительный или мнимый) на евклидовой вещественно-комплексной плоскости (а также никакая гипербола или парабола) не содержит ни одной прямой (даже мнимой).

Указание: см. доказательство аналогичного утверждения для гипербол на вещественной плоскости в п. 2 § 2 гл. 5.

Таблица линий второго порядка на евклидовой вещественно-комплексной плоскости

Тип линии	Вид линии	Невырожденные линии	Вырожденные линии
I	гиперболический	гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$ $a>0,\quad b>0$	пара вещественных пересекающихся прямых $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$ $a>0,\quad b>0,$ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$
	эллиптический	эллипс а) действительный $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a\geqslant b>0$ б) мнимый $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$ $a\geqslant b>0$	пара мнимых (комплексно-сопряженных) прямых, пересекающихся в вещественной точке $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,\quad a\geqslant b>0,$ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$
II, III	параболический	парабола $y^2=2px,\quad p>0$	пара параллельных прямых а) вещественных и различных $y^2-b^2=0,\quad b>0$ б) мнимых (комплексно-сопряженных) $y^2+b^2=0,\quad b>0$ в) совпадающих (вещественных) $y^2=0$

Мы видим, что произвольная линия второго порядка является
либо эллипсом (действительным или мнимым),
либо гиперболой,
либо параболой,
либо парой прямых (мнимых или вещественных, пересекающихся, параллельных или совпадающих).

Таким образом, за исключением вырожденных кривых (распадающихся на две прямые) и мнимых кривых (имеющих не более одной вещественной точки), т. е. за исключением геометрически неинтересных случаев, любая линия второго порядка является одним из трех конических сечений, изученных в §§ 1—2 гл. 5. Впрочем, пересекающиеся прямые (мнимые и вещественные) также можно считать коническими сечениями (получающимися в вещественно-комплексном пространстве при пересечении

конуса плоскостью, проходящей через его вершину). Чтобы получить совпадающие прямые (т. е. дважды взятую прямую), следует рассмотреть плоскость, касающуюся конуса по его образующей, а чтобы получить параллельные прямые, нужно вместо конуса взять цилиндр (который можно рассматривать как конус с вершиной в несобственной точке).

2. Инварианты уравнений линий второго порядка

Изложенный в п. 1 способ приведения решает сразу две задачи: он не только дает каноническое (точнее, приведенное) уравнение, но и указывает каноническую координатную систему.

Однако для многих задач столь полная информация оказывается совершенно излишней: часто достаточно знать лишь приведенное уравнение (без знания соответствующей координатной системы) или даже только вид рассматриваемой линии (т. е. является ли она эллипсом, гиперболой и т. п.). В следующем пункте мы изложим существенно более простой метод, позволяющий найти вид кривой и ее приведенное (а значит, и каноническое) уравнение, не производя самого приведения, т. е. не находя соответствующей координатной системы. Этот метод основывается на некоторых алгебраических результатах, доказательству которых и будет посвящен настоящий пункт.

Коэффициенты уравнения

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

линии второго порядка удобно представлять себе расположенными в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(для единства обозначений мы условливаемся здесь, что символ a_{ij} обозначает то же самое число, что и символ a_{ji}).

Определение 1. Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

этой матрицы называется *большим определителем* уравнения (1), а его минор

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

— *малым определителем* уравнения (1). Число

$$S = a_{11} + a_{22}$$

(след матрицы определителя δ) называется *следом* уравнения (1).

Числа Δ, δ и S называются также *инвариантами уравнения* (1).

Предположим, что от координат x, y мы перешли к новым координатам x', y', получающимся поворотом прежних осей координат на некоторый угол θ. Тогда вместо уравнения (1) мы получим уравнение (1′) п. 1, коэффициенты которого выражаются формулами (3) п. 1. В частности, для следа

$$S' = a'_{11} + a'_{22}$$

уравнения (1′) мы получаем отсюда выражение

$$S' = a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta +$$
$$+ a_{11}\sin^2\theta - 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\cos^2\theta = a_{11} + a_{22} = S.$$

Таким образом, преобразованное уравнение (1) имеет тот же след, что и исходное уравнение (1).

Аналогично, для малого определителя

$$\delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}$$

мы получаем, что

$$\begin{aligned}
\delta' &= a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = \\
&= (a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta) \times \\
&\times (a_{11}\sin^2\theta - 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\cos^2\theta) - \\
&- [(a_{22} - a_{11})\cos\theta\sin\theta + a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)]^2 = \\
&= (a_{11}a_{22} - a^2_{12})\cos^4\theta + \\
&+ 2[-a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} - (a_{22} - a_{11})a_{12}]\cos^3\theta\sin\theta + \\
&+ [a^2_{11} - 4a^2_{12} + a^2_{22} - (a_{22} - a_{11})^2 + 2a^2_{12}]\cos^2\theta\sin^2\theta + \\
&+ 2[a_{12}a_{11} - a_{22}a_{12} + (a_{22} - a_{11})a_{12}]\cos\theta\sin^3\theta + \\
&+ (a_{22}a_{11} - a^2_{12})\sin^4\theta = \\
&= (a_{11}a_{22} - a^2_{12})(\cos^4\theta + 2\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta) = \\
&= (a_{11}a_{22} - a^2_{12})(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 = a_{11}a_{22} - a^2_{12} = \delta.
\end{aligned}$$

Наконец, большой определитель для уравнения (1) имеет вид

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = a'_{31}\begin{vmatrix} a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{22} & a'_{23} \end{vmatrix} - a'_{32}\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{23} \end{vmatrix} + a'_{33}\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}.$$

Но простое вычисление (аналогичное приведенному выше для определителя δ') показывает, что

$$\begin{vmatrix} a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{22} & a'_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cos\theta - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \sin\theta$$

и

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \sin\theta + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cos\theta.$$

Отсюда, после тривиальных преобразований мы получаем, что

$$a'_{31} \begin{vmatrix} a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{22} & a'_{23} \end{vmatrix} - a'_{32} \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{23} \end{vmatrix} = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Кроме того, так как $a'_{33} = a_{33}$ (см. последнюю формулу (3) п. 1) и $\delta' = \delta$ (по уже доказанному), то

$$a'_{33} \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = a'_{33}\delta' = a_{33}\delta = a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Delta' = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Посмотрим теперь, что происходит с величинами S, δ и Δ при сдвиге начала координат. Как мы знаем, при переносе начала координат в точку (x_0, y_0) коэффициенты уравнения (1) претерпевают изменение, описываемое формулами (6) п. 1. Из этих формул непосредственно явствует, что при этом переносе величины S и δ не изменяются, а определитель Δ переходит в определитель

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix},$$

где

$$a'_{13} = a'_{31} = a_{11}x_0 + a_{21}y_0 + a_{31},$$

$$a'_{23} = a'_{32} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{32},$$

$$a'_{33} = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} =$$

$$= a'_{13}x_0 + a'_{23}y_0 + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}).$$

Вычтя из третьей строки этого определителя первую строку, умноженную на x_0, и вторую строку, умноженную на y_0, мы получим, следовательно, определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a^*_{33} \end{vmatrix},$$

где

$$a^*_{33} = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}.$$

Поэтому, вычтя из последнего столбца этого определителя первый столбец, умноженный на x_0, и второй столбец, умноженный на y_0, мы получим определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Поскольку при этих преобразованиях определитель не меняется, тем самым доказано, что величины S, δ и Δ не меняются и при переносе начала координат.

Так как любое преобразование координат сводится к повороту координатных осей и к переносу начала координат, тем самым мы доказали следующее

Предложение 1. *При любом преобразовании прямоугольных координат x, y числа S, δ и Δ не меняются.*

Это объясняет термин «инвариант» для чисел S, δ и Δ.

Рассмотрим теперь число

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33}(a_{11} + a_{22}) - a_{13}^2 - a_{23}^2.$$

При повороте осей координат оно переходит в число

$$K' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a'_{31} & a^1_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Но, как легко проверить,

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a'_{31} & a'_{33} \end{vmatrix} = (a_{33}a_{11} - a_{13}^2)\cos^2\theta + \\ + 2(a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23})\cos\theta\sin\theta + (a_{33}a_{22} - a_{23}^2)\sin^2\theta,$$

и, аналогично,

$$\begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = (a_{33}a_{22} - a_{23}^2)\cos^2\theta - \\ - 2(a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23})\cos\theta\sin\theta + (a_{33}a_{11} - a_{13}^2)\sin^2\theta.$$

Поэтому

$$K' = (a_{33}a_{11} - a_{13}^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (a_{33}a_{22} - a_{23}^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \\ = (a_{33}a_{11} - a_{13}^2) + (a_{33}a_{22} - a_{23}^2) = K.$$

При переносе начала координат в точку (x_0, y_0) число K переходит (см. формулы (6) п. 1) в число

$$K' = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{13} \\ a'_{31} & a'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a'_{23} \\ a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix},$$

которое равно (проверьте это!)

$$K + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(x_0^2 + y_0^2) + 2(a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23})x_0 + 2(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})y_0 = \\ = K + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -2x_0 & -2y_0 & x_0^2 + y_0^2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, справедливо следующее

Предложение 2. *При повороте координатных осей число K не меняется, а при переносе начала координат в точку (x_0, y_0) к нему прибавляется определитель*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -2x_0 & -2y_0 & x_0^2 + y_0^2 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Определение 2. Число K называется *семиинвариантом* уравнения (1) (приставка «семи» означает «полу»).

Замечание 1. Обратим внимание на то, что при умножении уравнения на некоторое число $k \neq 0$ инвариант S умножается на k, инвариант δ и семиинвариант K умножаются на k^2, а инвариант Δ умножается на k^3. Поэтому геометрический смысл может иметь только равенство инвариантов S и Δ нулю (или знак их произведения) и знак инварианта δ и семиинварианта K.

3. Определение вида линии второго порядка по инвариантам ее уравнения

Согласно предложению 1 п. 2 инварианты S, δ и Δ имеют одни и те же значения как для исходного уравнения (1) п. 1, так и для соответствующего приведенного уравнения (см. п. 1, уравнения (10), (11) или (12)).

Но для уравнения (10) п. 1 эти инварианты выражаются формулами

$$S = a_{11} + a_{22}, \\ \delta = a_{11}a_{22} \neq 0, \qquad (1) \\ \Delta = \delta a_{33},$$

для уравнения (11) п.1 — формулами

$$S = a_{22} \neq 0,$$
$$\delta = 0, \tag{2}$$
$$\Delta = -a_{22}a_{13}^2 \neq 0,$$

и для уравнения (12) п. 2 — формулами

$$S = a_{22} \neq 0,$$
$$\delta = 0, \tag{3}$$
$$\Delta = 0.$$

Следовательно (здесь мы пользуемся принципом обращения), *уравнение* (1) п. 1 *тогда и только тогда принадлежит типу* I, *когда* $\delta \neq 0$.

Другими словами,

гиперболические и эллиптические линии характеризуются тем, что $\delta \neq 0$, *а параболические — тем, что* $\delta = 0$.

Кроме того,

невырожденные линии (гиперболические, эллиптические или параболические) характеризуются тем, что $\Delta \neq 0$, *а вырожденные — тем, что* $\Delta = 0$.

Таким образом, для типов линий второго порядка мы имеем следующую таблицу:

Тип	Инварианты
I	$\delta \neq 0$
II	$\delta = 0, \quad \Delta \neq 0$
III	$\delta = 0, \quad \Delta = 0$

Замечание 1. Эта таблица, в частности, доказывает корректность распределения линий второго порядка по типам, т. е. факт, что одно и то же уравнение (1) п. 1 не может быть приведено к уравнениям различных типов.

Чтобы научиться отличать по инвариантам гиперболические линии от эллиптических, рассмотрим более внимательно первые два уравнения (1). Эти уравнения показывают, что коэффициенты a_{11} и a_{22} приведенного уравнения (10) п. 1 являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0. \tag{4}$$

Определение 1. Уравнение (4) называется *характеристическим уравнением* (для уравнения (1)).

Заметим, что *это уравнение имеет лишь вещественные корни* (ибо числа a_{11} и a_{22} вещественны).

По определению, эллиптические линии характеризуются тем, что для них числа a_{11} и a_{22} имеют один и тот же знак, т. е. тем, что их произведение положительно. Но по формулам Вьета это произведение равно свободному члену δ характеристического уравнения (4). Поэтому

для эллиптических линий $\delta > 0$.

Аналогично показывается, что

для гиперболических линий $\delta < 0$.

Кроме того, согласно третьему из уравнений (1) коэффициент a_{33} в уравнении (10) п. 1 равен Δ/δ. Поэтому

приведенное уравнение (10) п. 1 *может быть записано в виде*

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \tag{5}$$

где λ_1, λ_2 — *корни характеристического уравнения* (4).

Таким образом, при $\delta \neq 0$ мы можем найти уравнение, к которому приводится уравнение (1) п. 1, не производя приведения (т. е. не отыскивая соответствующей системы канонических координат). Для этого достаточно вычислить инварианты S, δ и Δ, составить уравнение (4), найти его корни λ_1, λ_2 и написать уравнение (5).

Осталось научиться отличать случай мнимого эллипса от действительного. Но это легко. На самом деле, при $\delta > 0$ знак корней λ_1, λ_2 совпадает, очевидно, со знаком их суммы S. С другой стороны, уравнение (5) показывает, что мы имеем мнимый эллипс, когда знаки корней совпадают со знаком определителя Δ, и действительный, когда эти знаки различны.

Окончательные результаты для случая $\delta \neq 0$, т. е. случая линий типа I, можно свести в следующую таблицу:

Линия	Характеристика по инвариантам
1. Эллипс	$\delta > 0, \quad \Delta \neq 0$
а) действительный	$S\Delta < 0$
б) мнимый	$S\Delta > 0$
2. Гипербола	$\delta < 0, \quad \Delta \neq 0$
3. Пара пересекающихся прямых	$\Delta = 0$
а) вещественных	$\delta < 0$
б) мнимых	$\delta > 0$

Рассмотрим теперь параболические линии ($\delta = 0$). Как мы уже знаем, невырожденные линии, т. е. линии, приводящиеся к уравнению (11) п. 1 (тип II), характеризуются условиями

Таблица линий второго порядка

№№ пп	Название	Схематический вид линии	Характеристика	Приведенное уравнение	Каноническое уравнение
[1]	Эллипс (действительный)		$\delta > 0, \quad S\Delta < 0$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geqslant b > 0$
[2]	Мнимый эллипс		$\delta > 0, \quad S\Delta > 0$		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad a \geqslant b > 0$
[3]	Точка (пара мнимых пересекающихся прямых)		$\delta > 0, \quad \Delta = 0$		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} = 0, \quad a \geqslant b > 0, \ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$
[4]	Гипербола		$\delta < 0, \quad \Delta \neq 0$		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \ b > 0$

[5]	Пара пересекающихся прямых (вещественных)		$\delta<0, \quad \Delta=0$		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0, \quad a\geqslant b>0, \quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$
[6]	Парабола		$\delta=0, \quad \Delta\neq 0$	$Sy^2+2\sqrt{-\frac{\Delta}{S}}\,x=0$	$y^2=2px, \quad p>0$
[7]	Пара параллельных прямых (вещественных)		$\delta=0, \quad \Delta=0, \quad K<0$	$Sy^2+\frac{K}{S}=0$	$y^2-b^2=0, \quad b>0,$
[8]	Пара мнимых параллельных прямых		$\delta=0, \quad \Delta=0, \quad K>0$		$y^2+b^2=0, \quad b>0,$
[9]	Пара совпадающих прямых		$\delta=0, \quad \Delta=0, \quad K=0$		$y^2=0$

$\delta = 0$ и $\Delta \neq 0$. При этом согласно формулам (2) коэффициенты a_{22} и a_{13} приведенного уравнения (11) выражаются формулами

$$a_{22} = S, \quad a_{13} = \sqrt{-\frac{\Delta}{S}}.$$

Таким образом,

приведенное уравнение (11) п. 1 может *быть записано в виде*

$$Sy^2 + 2\sqrt{-\frac{\Delta}{S}}\, x = 0. \tag{6}$$

Следовательно, и для линий типа II мы можем написать приведенное уравнение, не производя фактического приведения.

Осталось рассмотреть лишь линии типа III, приводящиеся к уравнению (12) п. 1. Здесь мы воспользуемся семиинвариантом K.

Вспомним, как мы в п. 1 осуществляли приведение уравнения (1) п. 1 к простейшему виду. Сначала мы поворотом осей координат привели его к виду (5) п. 1. Как мы знаем, семиинвариант K при этом не изменился.

В интересующем нас сейчас случае уравнения (12) п. 1 определитель (2) п. 2 прибавляющийся при переносе начала координат в точку (x_0, y_0) к семиинварианту K, имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ -2x_0 & -2y_0 & x_0^2 + y_0^2 \end{vmatrix}$$

и потому равен нулю. Следовательно,

если уравнение (1) п. 1 *приводится к уравнению* (12) п. 1, *то семиинвариант K для обоих уравнений — один и тот же.*

Но для уравнения (12) п. 1 этот семиинвариант выражается формулой

$$K = \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33}.$$

Поэтому

уравнение (12) п. 1 *может быть записано в виде*

$$Sy^2 + \frac{K}{S} = 0. \tag{7}$$

Отсюда следует, что

при $K = 0$ мы имеем пару совпадающих прямых,
при $K > 0$ — пару мнимых параллельных прямых,
при $K < 0$ — пару вещественных параллельных прямых.

Окончательные результаты произведенного исследования линий второго порядка подытожены в таблице на стр. 516—517.

Обратим внимание на то, что в этой таблице все линии второго порядка на евклидовой вещественно-комплексной плоскости распределены по девяти классам. Принадлежность линии тому или иному классу определяется знаками инвариантов δ и

$S\Delta$, фактом равенства или неравенства нулю инварианта Δ и (при $\delta = 0$, $\Delta = 0$) знаком семиинварианта K.

Из полученных результатов вытекает, в частности, что *уравнение второй степени*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

тогда и только тогда является (*в прямоугольных координатах* x, y)

а) *уравнением окружности* (*вещественного радиуса*), *когда*

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{11}a_{33} < a_{13}^2 + a_{23}^2,$$

б) *уравнением равнобочной гиперболы, когда*

$$a_{11} = -a_{22}, \quad \Delta \neq 0,$$

в) *уравнением пары перпендикулярных прямых, когда*

$$a_{11} = -a_{22}, \quad \Delta = 0.$$

Задание. Докажите это утверждение.

4. Линии второго порядка на аффинной плоскости. Теорема единственности

В аффинных координатах x, y произвольная линия второго порядка задается уравнением того же вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (1)$$

что и в прямоугольных. Но в аффинных координатах свобода в преобразованиях координат бо́льшая, чем в прямоугольных, и потому уравнение (1) можно упрощать сильнее.

Замечание 1. Можно представлять себе, что мы по-прежнему находимся в евклидовой плоскости и лишь позволяем себе пользоваться аффинными координатами. Однако более последовательно считать, что мы перешли теперь в аффинную плоскость (вещественную или вещественно-комплексную), в которой именно аффинные координатные системы наиболее естественны.

Чтобы преобразованием аффинных координат привести уравнение (1) к наиболее простому виду, можно, например, перейти сначала от данных аффинных координат к некоторым прямоугольным (при этом преобразовании уравнение (1) сохранит свой вид, но, конечно, его коэффициенты изменятся), а затем уже известным нам образом перейти от этих прямоугольных координат к прямоугольным каноническим координатам. Если при этом получились канонические уравнения [1]—[5] из таблицы на стр. 516—517, то следует дополнительно сделать (нарушающее прямоугольность координат) преобразование

$$x' = \frac{x}{a},$$

$$y' = \frac{y}{b}.$$

Если получилось уравнение [6], то нужно сделать преобразование

$$x' = px,$$
$$y' = y,$$

а если получились уравнения [7] или [8], то — преобразование

$$x' = x,$$
$$y' = \frac{y}{b}.$$

В случае уравнения [9] можно канонические координаты x, y оставить прежними.

Этим будет доказана следующая теорема об аффинно-канонических уравнениях линий второго порядка:

Теорема 1. *Для любой линии второго порядка существует аффинная координатная система, в которой уравнением линии является одно из следующих девяти уравнений*:

[1] $x^2 + y^2 = 1$,	[4] $x^2 - y^2 = 1$,	[7] $y^2 - 1 = 0$,
[2] $x^2 + y^2 = -1$,	[5] $x^2 - y^2 = 0$,	[8] $y^2 + 1 = 0$,
[3] $x^2 + y^2 = 0$,	[6] $y^2 = 2x$,	[9] $y^2 = 0$.

Определение 1. Уравнения [1]—[9] называются *аффинно каноническими уравнениями*, а аффинные координаты, в которых уравнение данной линии второго порядка является аффинно каноническим уравнением, называются *аффинно каноническими координатами* (относительно этой линии).

Замечание 2. Изложенное доказательство теоремы 1 (хотя и вполне правильное) может быть подвергнуто серьезной критике с методологических позиций. Действительно, теорема 1 имеет чисто аффинный характер (справедлива в аффинной плоскости), а для ее доказательства мы привлекли евклидовы понятия (прямоугольные координаты). Хотелось бы иметь доказательство этой теоремы, не выходящее из рамок аффинной геометрии. Поиск такого доказательства имеет не только методологическое, но и чисто практическое значение, поскольку можно ожидать (и это, как мы увидим ниже, действительно оправдывается), что по пути мы найдем более простой способ приведения, не требующий решения характеристического уравнения (4) из п. 3 (или тригонометрического уравнения (4) из п. 1). Этим вопросом мы займемся в следующих пунктах, а пока обсудим некоторые другие вопросы принципиального характера, связанные с теоремой 1.

Замечание 3. Незначительное формальное усовершенствование изложенного выше доказательства теоремы 1 позволяет сделать его чисто «аффинным». Для этого достаточно заметить, что в п. 1 мы по существу пользовались прямоугольностью координат x, y только для геометрической интерпретации производимых преобразований. Поэтому с формальной точки зрения все приведение из п. 1 можно делать и в аффинных координатах (только теперь угол θ в формулах (2) п. 1 уже не будет иметь никакого явного гео-

метрического смысла). Это позволяет провести доказательство теоремы 1, не употребляя слов «прямоугольные координаты» и, следовательно, целиком в рамках аффинной геометрии.

Именно, применив преобразования из п. 1 к уравнению (1) в аффинных координатах x, y, мы сначала получим описанные в п. 1 «евклидово канонические» уравнения (конечно, это не будут настоящие евклидово канонические уравнения, поскольку соответствующие координаты не будут, вообще говоря, прямоугольными). Затем, применив указанные в доказательстве теоремы 1 дополнительные преобразования (имеющие целью «обратить коэффициенты a, b и p в единицы»), мы и получим аффинно канонические уравнения [1]—[9].

Конечно, этот формальный трюк нисколько не проясняет геометрической основы процесса приведения и не помогает его упростить (правда, некоторого малосущественного упрощения мы все же достигли: предварительный переход от данных аффинных координат к прямоугольным координатам оказывается ненужным).

Тем не менее некоторую пользу из него извлечь можно. Действительно, аналогично евклидовому случаю (см. п. 3) можно поставить задачу об отыскании аффинно канонического уравнения линии второго порядка непосредственно по ее уравнению (1), без того чтобы находить соответствующие аффинно канонические координаты. Чтобы решить эту задачу, мы заметим, что описанные выше «дополнительные» преобразования координат переводят евклидово канонические уравнения, принадлежащие различным классам, в различные аффинно канонические уравнения. С другой стороны, мы знаем, что эти классы могут быть охарактеризованы по инвариантам уравнения данной линии (см. таблицу на стр. 516—517), причем, в силу формально-алгебраического характера этого утверждения, оно верно независимо от того, являются ли наши координаты евклидовыми или любыми аффинными (нужно только, чтобы преобразования координат записывались формулами (2) из п. 1). Поэтому, несмотря на то, что величины S, δ и Δ (не говоря уже о K) при любых преобразованиях аффинных координат, вообще говоря, инвариантными не остаются, мы можем тот факт, что данная линия второго порядка имеет то или иное аффинно каноническое уравнение, охарактеризовать теми же условиями на инварианты:

№№ пп	Аффинно-канонические уравнения	Характеристика по инвариантам		
[1]	$x^2+y^2=1$	$\delta>0$,	$S\Delta<0$	
[2]	$x^2+y^2=-1$	$\delta>0$,	$S\Delta>0$	
[3]	$x^2+y^2=0$	$\delta>0$,	$\Delta=0$	
[4]	$x^2-y^2=1$	$\delta<0$,	$\Delta\neq0$	
[5]	$x^2-y^2=0$	$\delta<0$,	$\Delta=0$	
[6]	$y^2=2x$	$\delta=0$,	$\Delta\neq0$	
[7]	$y^2-1=0$	$\delta=0$,	$\Delta=0$,	$K<0$
[8]	$y^2+1=0$	$\delta=0$,	$\Delta=0$,	$K>0$
[9]	$y^2=0$	$\delta=0$,	$\Delta=0$,	$K=0$

Происхождение аффинно канонических уравнений [1]—[9] из евклидово канонических уравнений, рассмотренных в предыдущих пунктах, показывает, что (в аффинной вещественно-комплексной плоскости) эти уравнения выражают соответственно следующие линии:

[1] действительные эллипсы,

[2] мнимые эллипсы,

[3] пары мнимых пересекающихся прямых,

[4] гиперболы,

[5] пары вещественных пересекающихся прямых,

[6] параболы,

[7] пары вещественных параллельных (но не совпадающих) прямых,

[8] пары мнимых параллельных прямых,

[9] пары совпадающих вещественных прямых.

Линии, принадлежащие каждому из этих классов, могут быть легко охарактеризованы чисто геометрически.

Действительно, рассмотрим следующие условия:

А) линия имеет более одной вещественной точки;

Б) линия имеет более одной оси симметрии;

В) линия пересекает (в вещественной точке) каждую свою ось симметрии;

Г) линия содержит две различные прямые (возможно, мнимые).

Тогда мы можем составить следующую таблицу:

Класс линий	Выполненные условия	Невыполненные условия
[1]	А, Б, В	Г
[2]	Б	А, В, Г
[3]	Б, В, Г	А
[4]	А, Б	В, Г
[5]	А, Б, В, Г	—
[6]	А, В	Б, Г
[7]	А, Б, Г	В
[8]	Б, Г	А, В
[9]	А, Б, В	Г

Согласно принципу обращения, условия, перечисленные в среднем столбце этой таблицы, однозначно характеризуют соответствующие линии.

Заметим теперь, что тот факт, что некоторая линия второго порядка удовлетворяет тем или иным из условий А—Г, не зависит от того, в какой системе координат она рассматривается. Поэтому

никаким преобразованием аффинных координат ни одно из уравнений [1]—[9] *нельзя перевести в другое.*

Другими словами, «лишних» линий среди линий [1]—[9] нет.

Это означает, что справедлива следующая теорема единственности канонических уравнений:

Теорема 2. *Для любой линии второго порядка ее аффинно-каноническое уравнение однозначно определено.*

Подчеркнем, что различных систем канонических координат может быть, тем не менее, много.

Замечание 4. Поскольку условия Б и В имеют евклидов характер, наше доказательство теоремы 2 — методологически не выдержано (ср. замечание 2).

При более методологически выдержанном подходе следовало бы найти аналогичные характеризующие условия чисто аффинного плана и проверить их выполнение (или невыполнение) непосредственно по уравнениям [1]—[9].

Упражнение. Сделайте это.

Замечание 5. Конечно, еще в пп. 1—3 нам нужно было доказать аналогичную теорему для евклидово канонических уравнений, т. е. доказать, что

никаким преобразованием прямоугольных координат ни одно из уравнений классов [1]—[9] п. 3 (*см. таблицу на стр.* 516—517) *нельзя перевести в другое уравнение.*

Мы этого не сделали в пп. 1—3 только для того, чтобы избежать излишних повторений. Сделаем это теперь.

Поскольку это утверждение для уравнений, принадлежащих различным классам [1]—[9] п. 3, очевидным образом вытекает из уже доказанного утверждения об аффинно канонических уравнениях, нам достаточно теперь лишь показать, что никаким преобразованием прямоугольных координат ни одно из уравнений этих классов нельзя перевести в другое уравнение того же класса.

Ясно, что для этого достаточно показать, что фигурирующие в этих уравнениях коэффициенты внутренним образом связаны с линией, т. е. могут быть геометрически охарактеризованы без использования каких-либо координат. Но это делается без всякого труда.

Например, для линий класса [1] (действительных эллипсов) числа a и b являются расстояниями от центра линии до ее вершин (точек пересечения с осями симметрии), причем если $a \neq b$, то a является бóльшим из этих расстояний, а b — меньшим.

Для линий [2] (мнимых эллипсов) аналогичные расстояния равны ia и ib, что снова позволяет однозначно характеризовать числа a и b.

Задание. Охарактеризуйте геометрически коэффициенты остальных евклидово-канонических уравнений.

Замечание 6. Аналогичные результаты справедливы, конечно, и в вещественной (евклидовой или аффинной) плоскости.

Единственное отличие состоит в том, что линии [3] интерпретируются теперь как точки, а линии [2] и [8] объединяются в один класс нулевых линий (пустых множеств).

Обратим внимание на то, что, оставаясь на вещественной плоскости, мы не можем доказать (геометрически), что, например, уравнение [2] нельзя преобразовать в уравнение [8]. Поэтому теорему 2 мы можем доказать на вещественной плоскости только для линий второго порядка, содержащих более одной точки.

Полученные результаты позволяют без особого труда доказать обещанную в п. 2 § 2 гл. 2 теорему единственности для линий второго порядка:

Теорема 3. *Если на вещественно-комплексной плоскости (евклидовой или аффинной) два уравнения второй степени*

$$F(x, y) = 0, \quad G(x, y) = 0$$

определяют (в одной и той же координатной системе) одну и ту же линию, то существует такое число $k \neq 0$, что

$$G(x, y) = kF(x, y).$$

На вещественной плоскости аналогичное утверждение справедливо для линий, содержащих более одной точки.

Доказательство. Приведем уравнение

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

к каноническому виду (евклидову — на евклидовой плоскости и аффинному — на аффинной). Это приведение состоит в переходе к некоторым каноническим координатам x', y' и в умножении получающегося уравнения на некоторое число. Следовательно, если

$$f(x', y') = 0 \tag{3}$$

— каноническое уравнение, а

$$x' = \varphi_1(x, y),$$
$$y' = \varphi_2(x, y)$$

— формулы перехода от координат x, y к координатам x', y', то тождественно по x и y имеет место равенство

$$F(x, y) = k_1 f(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)),$$

где k_1 — некоторое число.

Аналогично, приводя к каноническому виду уравнение

$$G(x, y) = 0, \tag{4}$$

мы получим тождество вида

$$G(x, y) = k_2 g(\psi_1(x, y), \psi_2(x, y)),$$

где k_2 — некоторое число,

$$x'' = \psi_1(x, y),$$
$$y'' = \psi_2(x, y)$$

— канонические координаты для уравнения (3), а

$$g(x'', y'') = 0 \tag{5}$$

— соответствующее каноническое уравнение.

Но согласно теореме 2 канонические уравнения (3) и (5) совпадают (с точностью до обозначений координат) и, более того, сохраняются при переходе

$$x'' = h_1(x', y'),$$
$$y'' = h_2(x', y')$$

от канонических координат x', y' к каноническим координатам x'', y''.

Это означает, что

$$f(x', y') = g(h_1(x', y'), h_2(x', y')).$$

Кроме того, по определению

$$\psi_1(x, y) = h_1(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)),$$
$$\psi_2(x, y) = h_2(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)).$$

Поэтому

$$g(\psi_1(x, y), \psi_2(x, y)) = f(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)),$$

т. е.

$$\frac{G(x, y)}{k_2} = \frac{F(x, y)}{k_1},$$

что и требовалось доказать.

На вещественной плоскости теорема 2 справедлива только для линий, имеющих более одной точки, и потому теорема 3 справедлива тоже только для таких линий.

Теоремы 1 и 2 позволяют также полностью выяснить вопрос об аффинной эквивалентности линий второго порядка.

Согласно общему определению (см. определение 3 п. 3 гл. 2) две линии второго порядка называются *аффинно эквивалентными* («одинаковыми с аффинной точки зрения»), если существует аффинный автоморфизм (преобразование по равенству координат в двух аффинных координатных системах; см. п. 3 § 3 гл. 2), переводящий одну линию в другую.

Пусть

$$F(x, y) = 0 \tag{6}$$

— уравнение некоторой линии в аффинной координатной системе Oxy. Перейдем к новой координатной системе $O'x'y'$. Преобразование по равенству координат в системах Oxy и $O'x'y'$ переводит линию (6) в линию, имеющую в координатах x', y' то же уравнение

$$F(x', y') = 0, \tag{7}$$

что и линия (6) в координатах x, y. Чтобы получить уравнение

$$G(x, y) = 0 \tag{8}$$

линии (7) в исходных координатах x, y, нужно, следовательно, в уравнении (7) координаты x', y' выразить согласно формулам перехода через координаты x, y.

Обратно, пусть нам дана некоторая линия, имеющая в координатах x, y уравнение (8). Перейдя к координатам x', y', мы получим уравнение (7) той же линии в координатах x', y'. Обозначив в этом уравнении координаты x', y' через x, y, мы получим уравнение (6) аффинно эквивалентной линии в исходных координатах.

Все это можно выразить короче, сказав, что

два уравнения

$$F(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad G(x, y) = 0$$

тогда и только тогда выражают в одних и тех же аффинных координатах аффинно эквивалентные линии, когда одно уравнение получается из другого некоторой заменой аффинных координат (и переобозначением координат).

В применении к линиям второго порядка это означает, что если некоторая линия, имеющая (в произвольных аффинных координатах x, y) уравнение второй степени

$$F(x, y) = 0,$$

имеет (в канонических для этой линии координатах x, y), скажем, уравнение

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{9}$$

то она аффинно эквивалентна линии, имеющей в исходных координатах x, y уравнение (9).

Тем самым из теорем 1 и 2 мы получаем следующую теорему аффинной классификации линий второго порядка:

Теорема 4. *Любая линия второго порядка аффинно эквивалентна одной и только одной из девяти линий, выражающихся в произвольной (но фиксированной) системе аффинных координат уравнениями* [1]—[9].

Таким образом, например, *все эллипсы аффинно эквивалентны.*

Замечание 7. Последнее утверждение иногда формулируют следующим образом: «любой эллипс аффинно эквивалентен окружности». Такая формулировка [1]) совершенно правильна, но

---

[1]) Заметим, что она нам по существу известна из элементарной теории эллипса, поскольку рассмотренное в п. 2 § 1 гл. 5 сжатие является, очевидно, аффинным автоморфизмом.

принадлежит евклидовой геометрии, поскольку в аффинной геометрии понятие окружности отсутствует.

Замечание 8. Из того, что любой эллипс аффинно эквивалентен окружности, вытекает, что любым аффинно инвариантным свойством окружности обладают все эллипсы. Это позволяет очень просто получать (методами евклидовой геометрии) разнообразные свойства эллипсов. Например, любая окружность обладает центром симметрии, что является свойством аффинно инвариантным. Следовательно, центром симметрии обладает и любой эллипс.

Однако этот способ методологически невыдержан (аффинные свойства получаются евклидовыми методами!), и потому мы им пользоваться не будем. Он и опасен: можно ошибиться и счесть аффинно инвариантным свойством свойство, на самом деле таковыми не являющееся.

Конечно, об эллипсе мы говорили только для примера. Все сказанное с равным правом применимо, скажем, к гиперболе (здесь роль окружности играет, естественно, равнобочная гипербола).

Совершенно аналогичные результаты имеют место, конечно, и в евклидовом случае. В частности, имеет место следующая теорема евклидовой классификации линий второго порядка:

Теорема 5. *Любая линия второго порядка евклидово эквивалентна (конгруэнтна) одной и только одной линии, выражающейся в произвольной (но фиксированной) системе евклидовых координат евклидово каноническим уравнением.*

Таким образом, имеется бесконечное множество различных евклидово не эквивалентных линий второго порядка, в то время как различных аффинно не эквивалентных линий второго порядка имеется только девять.

В применении, скажем, к эллипсам (и гиперболам) теорема 5 утверждает, что два эллипса (две гиперболы) тогда и только тогда конгруэнтны, когда они имеют одни и те же полуоси. Аналогично, две параболы тогда и только тогда конгруэнтны, когда их параметры одинаковы.

5. Центры линий второго порядка

Мы теперь приступим к систематическому изучению аффинных свойств линий второго порядка с целью найти подходы к «аффинному» доказательству теоремы 1 п. 4.

При этом мы не будем ограничиваться вещественно-комплексным случаем и будем рассматривать линии второго порядка в аффинной плоскости *над произвольным полем* $\mathbb{K}$ *характеристики, отличной от двух* (т. е. таким, что $2a \neq 0$ при $a \neq 0$). Это не вызовет (по крайней мере на первых порах) никаких

существенных осложнений, но позволит применить полученные результаты, во-первых, к линиям на вещественной плоскости (случай, геометрически наиболее наглядный) и, во-вторых, к линиям на комплексной плоскости (случай, алгебраически наиболее простой).

Пусть

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (1)$$

— уравнение некоторой линии второго порядка в данной аффинной координатной системе Oxy.

Согласно формулам (6) п. 1 (справедливыми, очевидно, и в рассматриваемом сейчас общем случае), если мы хотим переносом начала координат уничтожить члены с x и y, то новое начало координат мы должны выбрать среди решений системы уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Определение 1. Каждая точка (x_0, y_0), координаты которой удовлетворяют уравнениям (2), называется *центром* линии второго порядка (1).

Таким образом, точка (x_0, y_0) является центром линии второго порядка, если в координатной системе с началом в этой точке уравнение линии не содержит членов с x и y, т. е. имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0. \qquad (3)$$

Поскольку это уравнение не меняется при замене x, y на $-x$, $-y$, начало координат является центром симметрии [1]) линии (3). Но, по условию, это начало координат представляет собой центр линии. Следовательно,

каждый центр линии второго порядка является ее центром симметрии.

Конечно, здесь предполагается, что говорить о центре симметрии имеет смысл, т. е. что кривая (3) содержит хотя бы одну точку (не является нулевой линией) [2]).

Обратное утверждение мы докажем в следующем виде:

Предложение 1. *На вещественной или вещественно-комплексной плоскости каждый центр симметрии линии второго порядка является ее центром.*

Доказательство. Пусть начало координат (0, 0) является центром симметрии линии (1). Мы должны показать, что

---

[1]) Ясно, что понятие центра симметрии имеет смысл в аффинной геометрии над любым полем (поскольку имеет смысл понятие «середина отрезка»).

[2]) В вещественно-комплексной (или комплексной) плоскости это условие выполнено автоматически.

тогда $a_{13}=0$ и $a_{23}=0$. Но поскольку точка (0, 0) является центром симметрии линии (1), вместе с некоторой точкой (x_0, y_0) уравнению (1) удовлетворяет и точка $(-x_0, -y_0)$, т. е. вместе с соотношением

$$a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0+a_{33}=0$$

имеет место и соотношение

$$a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2-2a_{13}x_0-2a_{23}y_0+a_{33}=0.$$

Вычитая эти соотношения (и сокращая на 2), мы получим равенство

$$a_{13}x_0+a_{23}y_0=0.$$

При $a_{13}\neq 0$ или $a_{23}\neq 0$ это показывает, что любая точка рассматриваемой линии второго порядка принадлежит прямой

$$a_{13}x+a_{23}y=0.$$

Примером линии второго порядка, расположенной на прямой, является дважды взятая прямая. Наиболее общее уравнение такой линии имеет вид

$$(Ax+By+C)^2=0.$$

Ясно, что все центры симметрии такой линии ей принадлежат. Поэтому если точка (0, 0) является ее центром симметрии, то $C=0$ и, следовательно,

$$a_{13}=AC=0, \quad a_{23}=BC=0.$$

Для случая вещественно-комплексной плоскости это доказывает предложение 1, поскольку дважды взятая прямая является, как мы знаем из теоремы 2 п. 4, единственной линией второго порядка, расположенной на прямой.

На вещественной плоскости, кроме дважды взятых прямых, имеется еще лишь один класс ненулевых линий второго порядка, располагающихся на прямой, а именно — точки. Поскольку центром симметрии множества, состоящего из одной точки, является сама эта точка, уравнение (1), изображающее линию второго порядка, являющуюся точкой и имеющую центр симметрии в начале координат, должно удовлетворяться координатами точки (0, 0) и только ее координатами.

Следовательно, если линия второго порядка (1) является точкой (0, 0), то, во-первых,

$$a_{33}=0$$

и, во-вторых, уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x = 0,$$

получающееся из уравнения (1) подстановкой $y = 0$, должно удовлетворяться только при $x = 0$, что возможно лишь при $a_{11} = 0$ и $a_{13} \neq 0$ или при $a_{11} \neq 0$ и $a_{13} = 0$.

Аналогично показывается, что либо $a_{22} = 0$ и $a_{23} \neq 0$, либо $a_{22} \neq 0$ и $a_{23} = 0$.

Если $a_{13} = 0$ и $a_{23} \neq 0$, то $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} = 0$, так что уравнение (1) имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}y = 0,$$

$$a_{11} \neq 0, \qquad a_{23} \neq 0$$

и поэтому имеет ненулевые решения (x_0, y_0) (достаточно взять любое $x_0 \neq 0$, для которого $a_{12}x_0 + a_{23} \neq 0$). Следовательно, случай $a_{13} = 0$, $a_{23} \neq 0$ невозможен.

Аналогично показывается, что случай $a_{13} \neq 0$, $a_{23} = 0$ также невозможен.

Пусть теперь $a_{13} \neq 0$ и $a_{23} \neq 0$. Тогда $a_{11} = 0$ и $a_{22} = 0$, и уравнение (1) имеет вид

$$2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23} = 0,$$

$$a_{12} \neq 0, \quad a_{13} \neq 0, \quad a_{23} \neq 0$$

и потому также имеет ненулевые решения. Следовательно, этот случай также невозможен. Поэтому $a_{13} = a_{23} = 0$.

Тем самым, предложение 1 полностью доказано.

Для случая произвольного поля $\mathbb{K}$ (характеристики, отличной от двух) изложенное доказательство показывает лишь, что *если линия второго порядка либо не расположена на прямой, либо является дважды взятой прямой или точкой, то любой центр симметрии этой линии служит ее центром.*

Замечание 1. Определение 2 центра линии второго порядка привязано к определенному уравнению линии и определенной координатной системе, и потому неясно, не зависит ли оно от выбора этой координатной системы? Теперь мы охарактеризовали центры линии второго порядка (по крайней мере, на вещественной или вещественно-комплексной плоскости) как ее центры симметрии, т. е. способом, не зависящим от системы координат. Поэтому центры линии второго порядка на вещественной или вещественно-комплексной плоскости определены корректно.

В общем случае любого поля $\mathbb{K}$ для доказательства корректности определения центра следует найти, как преобразуются коэффициенты уравнения (1) при произвольном преобразовании

координат, и на этой основе показать, что для преобразованного уравнения центры будут те же самые, что и для исходного уравнения.

Упражнение. Докажите в общем случае корректность определения центра линий второго порядка.

Для системы уравнений (2) возможны следующие три случая:

I. Уравнения (2) имеют единственное решение.

II. Уравнения (2) не имеют ни одного решения.

III. Уравнения (2) имеют бесконечно много решений.

Определение 2. В случае I линия второго порядка называется *центральной*. Она имеет единственный центр.

В случаях II и III линия (1) либо вообще не имеет центров, либо они заполняют некоторую прямую, называемую *прямой центров* (уравнения (2) не могут удовлетворяться тождественно, ибо, по условию, хотя бы одно из чисел a_{11}, a_{12}, a_{22} отлично от нуля). Такие линии второго порядка называются *нецентральными*.

Примерами центральных линий являются эллипсы, гиперболы и пары пересекающихся прямых, а нецентральных — параболы (центров нет) и пары параллельных прямых (имеется прямая центров).

Из алгебры известно, что система двух уравнений с двумя неизвестными тогда и только тогда имеет единственное решение, когда ее определитель отличен от нуля. Но определитель системы (2) — это знакомый нам определитель

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

центральные линии второго порядка характеризуются условием $\delta \neq 0$, *а нецентральные — условием* $\delta = 0$.

Далее, система двух уравнений с двумя неизвестными тогда и только тогда имеет семейство решений, зависящих от одного параметра, когда уравнения пропорциональны. Но пропорциональность уравнений (2) означает пропорциональность первых двух строк определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Следовательно, если имеет место случай III, то $\Delta = 0$.

Обратно, пусть $\Delta = 0$ (и $\delta = 0$). Покажем, что тогда первые две строки определителя Δ пропорциональны (т. е. что имеет место случай III).

Действительно, так как $\delta = 0$, то строки определителя δ пропорциональны. Хотя бы одна строка этого определителя по условию отлична от нуля. Пусть, для определенности, отлична от нуля первая строка. Тогда

$$a_{21} = ka_{11}, \quad a_{22} = ka_{12},$$

где k — некоторое число.

Разложив определитель Δ по элементам последней строки, мы, следовательно, получим, что

$$\Delta = a_{31}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= (ka_{31} - a_{32})\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Поскольку $\Delta = 0$, отсюда вытекает, что либо $ka_{31} - a_{32} = 0$, либо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

и, следовательно, существует такое число l, что

$$a_{13} = la_{11}, \quad a_{23} = la_{21},$$

и потому $a_{23} = lka_{11} = ka_{13}$. В обоих случаях $a_{32} = ka_{31}$, так что первые две строки определителя Δ пропорциональны.

Тем самым доказано, что

случай II *характеризуется условиями* $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$, *а случай* III — *условиями* $\delta = 0$, $\Delta = 0$.

Замечание 2. Сравнивая полученные утверждения с результатами п. 1, мы немедленно получаем следующую геометрическую интерпретацию типа линии второго порядка (введенного в п. 1 довольно формальным образом):

линии типа I — *это центральные линии,*

линии типа II — *это линии, не имеющие центра,*

линии типа III — *это линии, обладающие прямой центров.*

Таким образом, на вещественно-комплексной плоскости

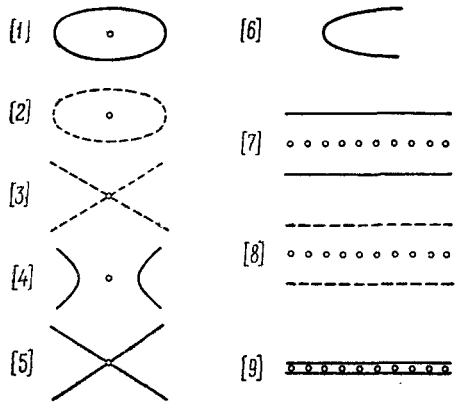
центральные линии — это эллипсы (действительные или мнимые), гиперболы и пары пересекающихся прямых (вещественных или мнимых),

линии, не имеющие центра, — это параболы (и только они),

линии, обладающие прямой центров — это пары параллельных (или совпадающих) прямых (вещественных или мнимых).

Для эллипса (действительного) и гиперболы центр совпадает с центром в смысле пп. 2 и 3 § 1 гл. 5. Для пары пересекающихся (вещественных или мнимых) прямых центром является их точка пересечения. Для параллельных (вещественных) прямых прямой центров является прямая, им параллельная и находящаяся от них на половинном расстоянии. Прямой центров дважды взятой прямой является сама эта прямая.

Схематически расположение центра (центров) изображено на следующих диаграммах:



6. Асимптоты и диаметры линий второго порядка

В соответствии с определением 1 п. 6 § 1 гл. 5, направление $l:m$ на плоскости называется *асимптотическим* для линии второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \tag{1}$$

если

$$a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2=0. \tag{2}$$

Пусть, как и выше,

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Легко видеть, что

если основное поле $\mathbb{K}$ *содержит элемент* $\sqrt{-\delta}$, *т. е. элемент, квадрат которого равен* $-\delta$, *то решения уравнения* (2) *могут быть выражены любой из двух формул*:

$$\begin{aligned} l:m&=(-a_{12}\pm\sqrt{-\delta}):a_{11},\\ l:m&=a_{22}:(-a_{12}\mp\sqrt{-\delta}); \end{aligned} \tag{3}$$

в противном случае уравнение (2) *решений не имеет.*

Замечание 1. При $a_{11}\neq 0$ и $a_{22}\neq 0$ формулы (3) равносильны. В случае же, когда $a_{11}=0$ или $a_{22}=0$, следует пользоваться той из формул (3), которая имеет смысл.

В частности, на вещественной плоскости (т. е. при $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)

эллиптические линии (*с* $\delta>0$) *не имеют асимптотических направлений*; *параболические линии* (*с* $\delta=0$) *имеют одно асимптотическое направление* (*характеризующееся отношением*

$-a_{12}:a_{11}=-a_{22}:a_{12}$), *а гиперболические линии* (*с* $\delta<0$) *имеют два асимптотических направления.*

Для гиперболы асимптотическими направлениями являются направления ее асимптот (этим и объясняется термин «асимптотическое направление»), а для пары пересекающихся прямых — направления этих прямых.

Для параболы единственным асимптотическим направлением является направление ее оси, а для пары параллельных (или совпадающих) прямых — направления этих прямых.

На вещественно-комплексной плоскости (когда $\mathbb{K}=\mathbb{C}$),

эллиптические линии имеют два комплексно-сопряженных асимптотических направления, параболические линии имеют одно (вещественное) асимптотическое направление, а гиперболические линии — два вещественных асимптотических направления.

Заметим, что асимптотическое направление параболической линии вещественно и тогда, когда линия является парой мнимых параллельных прямых (и совпадает с направлением этих прямых, которое, следовательно, вещественно).

На комплексной плоскости (т. е. при $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) различение эллиптических и гиперболических линий смысла не имеет. На этой плоскости можно говорить только о центральных линиях (с $\delta\neq 0$) и нецентральных (параболических) линиях (с $\delta=0$). При этом

центральные линии имеют два асимптотических направления, а нецентральные — только одно.

Замечание 1. Мы видим, в частности, что асимптотические направления линии второго порядка могут быть охарактеризованы (по крайней мере на вещественной плоскости) чисто геометрически. Это показывает, что хотя в определении асимптотического направления и участвует система координат, но на самом деле асимптотические направления от выбора координатной системы не зависят (определены корректно).

В общем случае корректность определения асимптотических направлений следует (подобно корректности определения центра; см. замечание 1 из п. 5) доказывать вычислением, выяснив предварительно, как меняются коэффициенты уравнения (1) при преобразовании координат.

Упражнение. Докажите корректность определения асимптотических направлений.

На вещественной, комплексной или вещественно-комплексной плоскости асимптотами (в смысле п. 2 § 2 гл. 5) обладают из всех линий второго порядка только гиперболы и пары параллельных (или совпадающих) прямых (в последнем случае асимптотой является любая прямая, параллельная этим прямым, но от них отличная). Напротив, асимптотами в смысле п. 3 § 1 гл. 5 обладают (на вещественной плоскости) кроме

гипербол также пары (необязательно различных) прямых (безразлично, параллельных или пересекающихся), причем теперь асимптотами будут уже сами эти прямые и только они (ибо постоянная величина, равная нулю, имеет предел 0). Впрочем, допуская определенную непоследовательность, обычно говорят об асимптотах (в смысле п. 3 § 1 гл. 5) только тогда, когда «уходящая в бесконечность» ветвь линии, к которой приближается асимптота, не является прямой. В этом смысле, из всех линий второго порядка асимптотами обладают лишь гиперболы.

Пусть теперь $l:m$ — произвольное неасимптотическое направление.

Поскольку

$$a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2=(a_{11}l+a_{12}m)\,l+(a_{12}l+a_{22}m)\,m\neq 0, \qquad (4)$$

то хотя бы одно из чисел $a_{11}l+a_{12}m$ и $a_{12}l+a_{22}m$ отлично от нуля. Поэтому уравнение

$$(a_{11}l+a_{12}m)\,x+(a_{12}l+a_{22}m)\,y+(a_{13}l+a_{23}m)=0 \qquad (5)$$

определяет на плоскости некоторую прямую.

Определение 1. Прямая (5) называется *диаметром* линии второго порядка, сопряженным с неасимптотическим направлением $l:m$.

Прямые направления $l:m$ имеют параметрические уравнения вида

$$x=x_0+lt,$$
$$y=y_0+mt.$$

Предположим, что одна из таких прямых пересекает линию (1) в двух различных точках $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Будем считать, что за точку (x_0, y_0) на такой прямой выбрана середина отрезка $\overline{M_1M_2}$. Тогда

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$$

и, одновременно,

$$x_1=x_0+lt_1, \qquad x_2=x_0+lt_2,$$
$$y_1=y_0+mt_1, \qquad y_2=y_0+mt_2,$$

где t_1 и t_2 — корни уравнения

$$(a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2)\,t^2+$$
$$+2\,[a_{11}lx_0+a_{12}(ly_0+mx_0)+a_{22}my_0+a_{13}l+a_{23}m]\,t+$$
$$+a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0+a_{33}=0$$

(см. п. 2 § 2 гл. 5).

Следовательно,

$$x_0=\frac{x_0+lt_1+x_0+lt_2}{2}=x_0+\frac{l}{2}(t_1+t_2)$$

и, аналогично,

$$y_0 = y_0 + \frac{m}{2}(t_1 + t_2).$$

Поскольку числа l и m одновременно нулю не равны, эти равенства возможны тогда и только тогда, когда

$$t_1 + t_2 = 0.$$

Но если сумма корней квадратного уравнения равна нулю, его средний коэффициент также равен нулю. Поэтому при указанном выборе точки (x_0, y_0) имеет место равенство

$$a_{11}lx_0 + a_{12}(ly_0 + mx_0) + a_{22}my_0 + a_{13}l + a_{23}m = 0,$$

т. е. равенство

$$(a_{11}l + a_{12}m)x_0 + (a_{12}l + a_{22}m)y_0 + (a_{13}l + a_{23}m) = 0.$$

Тем самым доказано следующее

Предложение 1. *Если среди прямых неасимптотического направления $l:m$ имеются прямые, пересекающие линию* (1) *в двух точках, то диаметр* (5), *сопряженный с направлением $l:m$, является прямой, содержащей середины хорд, высекаемых на прямых этого направления линией* (1).

Определение 2. Направление $l:m$ мы назовем *хордальным* (по отношению к данной линии второго порядка (1)), если существуют по крайней мере две прямые этого направления, каждая из которых пересекает линию (1) в двух различных точках.

В этой терминологии предложение 1 утверждает, что

диаметр, сопряженный с произвольным хордальным неасимптотическим направлением, однозначно характеризуется как прямая, содержащая середины хорд этого направления.

На вещественной (а также на вещественно-комплексной и комплексной) плоскости каждое неасимптотическое направление эллипса, параболы, гиперболы и пары несовпадающих прямых является, очевидно, хордальным. Поэтому для этих линий предложение 1 характеризует все диаметры. При этом диаметры эллипса, параболы и гиперболы оказываются совпадающими с их диаметрами в смысле п. 5 § 2 гл. 5, а диаметрами пары пересекающихся прямых являются все прямые, проходящие через их точку пересечения. Что же касается пары параллельных (различных) прямых, то они имеют единственный диаметр — прямую, им параллельную и находящуюся от них на половинном расстоянии (т. е. прямую центров).

Найдем теперь диаметры линии второго порядка, являющейся дважды взятой прямой:

$$(Ax + By + C)^2 = 0.$$

В развернутом виде уравнение такой линии имеет вид

$$A^2x^2 + 2ABxy + B^2y^2 + 2ACx + 2BCy + C^2 = 0.$$

Следовательно, уравнение (5) имеет для такой линии вид

$$(A^2l + ABm)x + (ABl + B^2m)y + (ACl + BCm) = 0.$$

Сокращая на $Al + Bm$ (что возможно, ибо в силу условия неасимптотичности $Al + Bm \neq 0$), мы получаем уравнение

$$Ax + By + C = 0.$$

Следовательно,

любой диаметр линии второго порядка, являющейся дважды взятой прямой, совпадает с этой прямой.

Таким образом, и для этих кривых диаметр может быть охарактеризован инвариантным геометрическим образом.

Естественно считать, что дважды взятую прямую каждая прямая (от нее отличная) пересекает в двух совпадающих точках. Поскольку середина вырожденного отрезка совпадает с его концами, отсюда следует, что и для дважды взятой прямой диаметр может быть охарактеризован как прямая, содержащая середины хорд данного направления.

Поскольку определение 1 диаметра использует координатные системы, возникает вопрос о его корректности (независимости от координатной системы). Для дважды взятой прямой ответ на этот вопрос — утвердительный, поскольку такая линия имеет единственный диаметр, совпадающий с этой прямой. Для других линий второго порядка утвердительный ответ обеспечивается предложением 1 для диаметров, сопряженных с хордальными направлениями. В частности, для всех диаметров ответ утвердительный (на плоскости над любым полем) для пар прямых (пересекающихся или параллельных), а на вещественной, вещественно-комплексной или комплексной плоскости — для эллипса, гиперболы и параболы.

На вещественно-комплексной плоскости это полностью решает вопрос, а на вещественной плоскости корректность определения диаметров остается открытой только для нулевых линий и линий, состоящих из одной точки.

Общее доказательство корректности определения диаметра можно получить (так же как и общее доказательство корректности определения центра; см. п. 5), исследовав, как меняются коэффициенты уравнения (1) при преобразовании координат.

Упражнение. Проведите доказательство корректности определения диаметра.

Пусть (x_0, y_0) — произвольный центр линии второго порядка (1). Тогда, по определению,

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0,$$
$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0.$$

Умножая первое уравнение на l, а второе на m и складывая, мы получаем, что

$$(a_{11}l + a_{12}m)\,x_0 + (a_{12}l + a_{22}m)\,y_0 + (a_{13}l + a_{23}m) = 0.$$

Этим доказано, что

каждый диаметр линии второго порядка проходит через любой ее центр.

В частности, отсюда вытекает, что

если линия второго порядка обладает прямой центров, то эта линия имеет единственный диаметр, совпадающий с этой прямой.

Таким образом, для линии, являющейся парой параллельных (или совпадающих) прямых, имеется единственный диаметр — ее прямая центров. Впрочем, этот факт мы выше уже доказали другим способом.

Определение 3. Направления $l : m$ и $l' : m'$ называются *сопряженными* (относительно данной кривой второго порядка (1)), если

$$(a_{11}l + a_{12}m)\,l' + (a_{21}l + a_{22}m)\,m' = 0,$$

т. е. если

$$a_{11}ll' + a_{12}(lm' + l'm) + a_{22}mm' = 0. \tag{6}$$

Поскольку равенство (6) симметрично относительно $l : m$ и $l' : m'$, то *отношение сопряженности симметрично*, т. е.

если направление $l : m$ сопряжено с направлением $l' : m'$, то направление $l' : m'$ сопряжено с направлением $l : m$.

Направление $l : m$ тогда и только тогда *самосопряжено*, т. е. сопряжено с самим собой, когда

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0,$$

т. е. когда оно является асимптотическим направлением.

Определение 4. Направление $l : m$ называется *особым*, если оно сопряжено с каждым направлением $l' : m'$.

Ясно, что для того чтобы направление $l : m$ было особым, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} a_{11}l + a_{12}m &= 0, \\ a_{21}l + a_{22}m &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Поскольку система двух уравнений с двумя неизвестными тогда и только тогда имеет нетривиальное решение, когда ее определитель равен нулю, и поскольку определителем системы (7) служит определитель δ, мы видим, что

особые направления могут быть только у нецентральных (параболических) линий.

При $\delta = 0$ каждое из уравнений (7) является следствием другого, и потому эти уравнения имеют единственное (с точностью до пропорциональности) нетривиальное решение $l : m =$

$= -a_{12} : a_{11} = -a_{22} : a_{12}$. Поскольку отношение $-a_{12} : a_{11} = -a_{22} : a_{12}$ характеризует, как мы уже знаем, асимптотическое направление параболической линии, тем самым доказано, что

любая параболическая линия имеет единственное особое направление, совпадающее с ее асимптотическим направлением.

Направление $l' : m'$, сопряженное с неособым направлением $l : m$, однозначно характеризуется равенством

$$l' : m' = -(a_{21}l + a_{22}m) : (a_{11}l + a_{12}m).$$

Поэтому, если направление $l : m$ не асимптотично (и, в частности, не особо), то сопряженное с ним направление $l' : m'$ может быть описано как направление диаметра, сопряженного с направлением $l : m$, поскольку, как показывает уравнение (5), направление этого диаметра как раз и характеризуется отношением $-(a_{12}l + a_{22}m) : (a_{11}l + a_{12}m)$.

Определение 5. Диаметры линии второго порядка называются *сопряженными*, если они оба имеют неасимптотические направления (ситуация, возможная только для центральных линий) и эти направления сопряжены. Согласно только что сказанному,

диаметры (центральной) линии второго порядка тогда и только тогда сопряжены, когда каждый из них сопряжен с направлением другого.

Для центральных линий второго порядка каждый из сопряженных диаметров, имеющих хордальные направления, может быть описан как прямая, содержащая середины хорд, которые данная линия высекает на прямых, параллельных другому диаметру.

Эти утверждения геометрически характеризуют сопряженные направления, что, в частности, доказывает корректность определения сопряженности направлений (и диаметров).

Замечание 2. На евклидово-проективной плоскости направления (собственных) прямых находятся в биективном соответствии с точками несобственной прямой. Будем называть несобственные точки *сопряженными*, если соответствующие им направления сопряжены. Предположим, что рассматриваемая линия второго порядка центральна. Тогда для любой несобственной точки M существует единственная несобственная точка M', сопряженная с точкой M. Следовательно, сопоставив каждой точке M сопряженную точку M', мы получим некоторое однозначно определенное отображение T несобственной прямой на себя. Поскольку отношение сопряженности симметрично, это отображение является инволюцией. Для эллиптических линий эта инволюция не имеет неподвижных точек, а для гиперболических линий она обладает двумя неподвижными точками (соответствующими асимптотическим направлениям). В параболическом случае отображение T также определено и представляет собой отображение, переводящее всю несобственную прямую в одну «особую» точку (соответствующую особому направлению). Если рассматривать отношение $x = l : m$ как «координату» на несобственной прямой, то отображение T будет задаваться дробно-линейной функцией

$$x' = -\frac{a_{21}x + a_{22}}{a_{11}x + a_{12}}.$$

На основании этой связи между линиями второго порядка и инволюциями на несобственной прямой любая инволюция на произвольной прямой, выражающаяся дробно-линейной функцией, называется *эллиптической*, если она не имеет неподвижных точек, *гиперболической*, если она имеет две неподвижные точки, и *параболической*, если она имеет одну неподвижную точку (и представляет собой отображение всей прямой в эту точку). Ср. замечание 3 п. 6 § 3 гл. 4.*

7. Приведение уравнений линий второго порядка к простейшему виду

Направления координатных осей характеризуются отношениями 1 : 0 и 0 : 1. Отсюда и из формулы (6) п. 6 непосредственно вытекает, что

направления координатных осей тогда и только тогда сопряжены, когда

$$a_{12} = 0.$$

Кроме того, мы знаем (см. п. 5), что

начало координат (0, 0) *тогда и только тогда является центром линии второго порядка, когда*

$$a_{13} = a_{23} = 0.$$

Тот факт, что начало координат является центром линии второго порядка, а направления координатных осей сопряжены, означает для центральных линий (тип. I), что *координатные оси являются сопряженными диаметрами.* В этом случае уравнение линии имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0, \tag{1}$$

причем $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$ (ибо в противном случае $\delta = 0$).

Для нецентральных линий условие сопряженности осей однозначно определяет направление одной из них (оно должно быть особым, т. е. асимптотическим). Для определенности мы будем считать, что *особое направление имеет ось абсцисс.* Направление оси ординат мы тогда можем выбрать произвольно (поскольку любое направление сопряжено с особым). Так как координатные оси сопряжены, то $a_{12} = 0$, а так как направление оси абсцисс является особым направлением, то $a_{11} = 0$. Поэтому, если рассматриваемая нецентральная линия обладает прямой центров (принадлежит типу III), то, выбирая указанным способом направления координатных осей и помещая начало координат в произвольный центр линии, мы получим для нее уравнение вида

$$a_{22}y^2 + a_{33} = 0, \quad a_{22} \neq 0. \tag{2}$$

Заметим, что при таком выборе начала координат ось абсцисс будет не просто прямой асимптотического направления, а будет диаметром, сопряженным с направлением оси ординат (прямой центров).

Для нецентральных линий, не имеющих центра (тип. II), уничтожить линейные члены невозможно. Поэтому в этом случае мы поступим несколько иначе. Именно, так же как для линий типа III, мы направление оси ординат выберем произвольно, а за ось абсцисс примем диаметр, сопряженный с этим направлением. Поскольку направление этого диаметра является асимптотическим, то $a_{11}=0$. С другой стороны, согласно формуле (5) п. 6 диаметр, сопряженный с направлением 0 : 1 оси ординат, имеет уравнение

$$a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0.$$

Так как, по условию, этим диаметром является ось абсцисс, коэффициенты a_{12} и a_{23} этого уравнения должны быть равны нулю (а коэффициент a_{22} отличен от нуля). Таким образом, в описанной координатной системе (с пока еще точно не определенным положением оси ординат) уравнение рассматриваемой линии второго порядка имеет вид

$$a_{22}y^2+2a_{13}x+a_{33}=0, \quad a_{22}\neq 0.$$

Полагая в этом уравнении $y=0$, мы немедленно получим, что ось абсцисс пересекает нашу линию в некоторой точке (а именно, в точке с абсциссой $-\frac{a_{33}}{2a_{13}}$; заметим, что $a_{13}\neq 0$, поскольку в противном случае наша линия принадлежала бы не типу II, а типу III). Поэтому мы можем окончательно выбрать систему координат, потребовав, чтобы начало координат было точкой пересечения оси абсцисс с линией. При таком выборе начала координат будет иметь место равенство $a_{33}=0$ и потому уравнение линии будет иметь вид

$$a_{22}y^2+2a_{13}x=0, \tag{3}$$

где $a_{22}\neq 0$ и $a_{13}\neq 0$.

Подводя итоги, мы получаем следующую теорему приведения:

Теорема 1. *Для любой линии второго порядка существует аффинная координатная система, в которой ее уравнение имеет либо вид* (1), *либо вид* (2), *либо вид* (3).

К виду (1) *могут быть приведены уравнения центральных линий, причем уравнение центральной линии тогда и только тогда имеет вид* (1), *когда координатные оси являются сопряженными диаметрами.*

К виду (2) *могут быть приведены уравнения нецентральных линий, не имеющих центров, причем уравнение такой линии тогда и только тогда имеет вид* (2), *когда ось абсцисс является диаметром, сопряженным с направлением оси ординат, а начало координат является точкой пересечения линии с осью абсцисс.*

К виду (3) *могут быть приведены уравнения нецентральных линий, обладающих прямой центров, причем уравнение такой линии тогда и только тогда имеет вид* (3), *когда ось абсцисс является прямой центров этой линии.*

Замечание 1. Подчеркнем, что эту теорему мы доказали для линий второго порядка над любым полем $\mathbb{K}$ (характеристики, отличной от двух). Более того, коэффициенты приведенных уравнений (1), (2) и (3) (так же как и соответствующие координаты) мы можем найти (по коэффициентам исходного уравнения) лишь рациональными действиями (сложением и вычитанием, умножением и делением). Например, если коэффициенты исходного уравнения линии второго порядка были вещественными числами, то коэффициенты приведенных уравнений (и коэффициенты формул перехода от исходных координат к новым) также будут вещественными числами.

Возможность дальнейшего упрощения уравнений (1), (2) и (3) зависит от арифметических свойств поля $\mathbb{K}$. Например, пусть поле $\mathbb{K}$ является полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел (т. е. мы находимся в вещественной или вещественно-комплексной плоскости). Тогда для любой центральной линии мы от координат x, y, в которых ее уравнение имеет приведенный вид (1), можем перейти к координатам x', y', связанным с координатами x, y формулами

$$\left.\begin{aligned} x' &= \sqrt{\left|\frac{a_{11}}{a_{33}}\right|}\,x, \\ y' &= \sqrt{\left|\frac{a_{22}}{a_{33}}\right|}\,y, \end{aligned}\right\} \quad \text{если} \quad a_{33} \neq 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= \sqrt{|a_{11}|}\,x, \\ y' &= \sqrt{|a_{22}|}\,y, \end{aligned}\right\} \quad \text{если} \quad a_{33} = 0.$$

Для линий с уравнением (3) мы положим

$$\begin{aligned} x' &= a_{13}x, \\ y' &= \sqrt{|a_{22}|}\,y, \end{aligned}$$

а для линий с уравнением (2) положим

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{33}}}\,y, \end{aligned}\right\} \quad \text{если} \quad a_{33} \neq 0,$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= \sqrt{|a_{11}|}\,y, \end{aligned}\right\} \quad \text{если} \quad a_{33} = 0.$$

В результате мы получим следующие уравнения (штрихи в обозначениях координат мы опускаем):

$$\pm x^2 \pm y^2 + 1 = 0,$$
$$\pm x^2 \pm y^2 = 0,$$
$$\pm y^2 + 2x = 0,$$
$$\pm y^2 + 1 = 0,$$
$$\pm y^2 = 0.$$

Меняя (если нужно) ориентации координатных осей и умножая уравнения на ± 1, мы немедленно получаем из этих уравнений знакомые нам девять уравнений, перечисленные в теореме 1 п. 4:

$$[1]\ x^2 + y^2 = 1, \quad [4]\ x^2 - y^2 = 1, \quad [7]\ y^2 - 1 = 0,$$
$$[2]\ x^2 + y^2 = -1, \quad [5]\ x^2 - y^2 = 0, \quad [8]\ y^2 + 1 = 0,$$
$$[3]\ x^2 + y^2 = 0, \quad [6]\ y^2 = 2x, \quad [9]\ y^2 = 0.$$

Тем самым мы заново (и чисто «аффинно») доказали теорему 1 п. 4 (одновременно выяснив геометрический смысл процесса приведения).

Пусть теперь поле $\mathbb{K}$ является полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, т. е. мы рассматриваем комплексную аффинную плоскость и на ней линии второго порядка, выражающиеся уравнениями с комплексными коэффициентами (напомним, что на комплексной плоскости — в отличие от вещественно-комплексной плоскости — понятие линии, выражающейся уравнением с вещественными коэффициентами, бессмысленно). Тогда совершенно аналогичные (лишь несколько более простые) рассуждения доказывают следующую теорему об аффинно канонических уравнениях линий второго порядка на комплексной плоскости:

Теорема 2. *Для любой линии второго порядка на комплексной плоскости существует аффинная координатная система, в которой уравнением линии является одно из следующих пяти уравнений:*

$$[1]\ x^2 + y^2 = 1, \quad [3]\ y^2 = 2x,$$
$$[2]\ x^2 + y^2 = 0, \quad [4]\ y^2 - 1 = 0,$$
$$[5]\ y^2 = 0.$$

При этом

никаким преобразованием аффинных координат (на комплексной плоскости) ни одно из уравнений [1]—[5] *нельзя перевести в другое.*

Задание. Докажите это утверждение (ср. п. 4).

Линии, имеющие каноническое уравнение (1), являются невырожденными центральными линиями (их с равным правом можно называть «эллипсами» или «гиперболами»).

Линии, имеющие каноническое уравнение [3], являются невырожденными параболическими (нецентральными) линиями (их можно называть «параболами»).

Остальные линии ([2], [4] и [5]) являются парами прямых (пересекающихся, параллельных, но не совпадающих, и совпадающих).

Чтобы понять, каким образом эллипсы и гиперболы объединились на комплексной плоскости в одну линию, напомним, что любая линия в комплексной плоскости геометрически представляет собой поверхность и что вещественно-комплексная плоскость получается из комплексной плоскости некоторым выбором вещественной плоскости $\mathfrak{M}^{\text{вещ}}$. Поверхность, изображающая линию [1], обладает тем свойством, что при одном выборе вещественной плоскости $\mathfrak{M}^{\text{вещ}}$ в пересечении получается эллипс, а при другом — гипербола.

Наглядно представить себе эту поверхность нельзя.

Непосредственным следствием теоремы 2 является (ср. п. 4) следующая теорема об аффинной классификации линий второго порядка на комплексной плоскости:

Теорема 3. *Любая линия второго порядка на комплексной плоскости аффинно эквивалентна одной и только одной из пяти линий, имеющих в произвольной (но фиксированной) системе аффинных координат уравнения* [1]—[5].

В частности,

на комплексной плоскости все невырожденные центральные линии аффинно эквивалентны.

8. Главные направления и диаметры линий второго порядка

Вернемся снова к евклидовой (вещественной или вещественно-комплексной) геометрии и в соответствии с этим будем опять считать координаты x, y прямоугольными.

Определение 1. Направление $l:m$ называется *главным* по отношению к данной линии второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \qquad (1)$$

если перпендикулярное к нему направление $l':m'$ с ним сопряжено.

Таким образом, в частности,

для любой параболической линии особое направление является главным.

Главным является и направление, перпендикулярное особому.

Если направление $l:m$ не особо, то с ним сопряжено единственное направление

$$l':m'=-(a_{21}l+a_{22}m):(a_{11}l+a_{12}m).$$

Так как направления $l:m$ и $l':m'$ тогда и только тогда перпендикулярны, когда

$$ll' + mm' = 0,$$

отсюда вытекает, что неособое направление $l:m$ тогда и только тогда является главным, когда

$$l(a_{21}l + a_{22}m) - m(a_{11}l + a_{12}m) = 0,$$

т. е. когда

$$a_{21}l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2 = 0. \tag{2}$$

Поскольку для особого направления это соотношение также справедливо, тем самым доказано, что

направление $l:m$ тогда и только тогда является главным, когда для него имеет место соотношение (2).

При $a_{12} = 0$ и $a_{11} = a_{22}$, т. е. (см. конец п. 3) в случае, когда линия (1) является окружностью (быть может, мнимого или нулевого радиусов), соотношение (2) удовлетворяется тождественно. В противном случае оно представляет собой уравнение, которому должны удовлетворять главные направления. Решения этого уравнения могут быть, очевидно, выражены любой из формул

$$\begin{aligned} l:m &= \left(a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right) : 2a_{12}, \\ l:m &= -2a_{12} : \left(a_{11} - a_{12} \mp \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

(При $a_{12} \neq 0$ эти формулы равносильны. В случае же, когда $a_{12} = 0$, следует пользоваться той из формул (3), которая имеет смысл; именно, первой формулой, когда корень берется с положительным знаком, и второй — в противном случае.)

Поскольку подкоренное выражение

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$$

в формулах (3) положительно, мы видим, что даваемые этими формулами значения отношения $l:m$ всегда вещественны (и различны).

Тем самым доказано следующее

Предложение 1. *Для любой линии второго порядка, не являющейся окружностью, существует точно два различных вещественных главных направления.*

Для окружности (возможно, мнимого или нулевого радиусов) все направления являются главными.

Поскольку направление, перпендикулярное главному, также, очевидно, является главным, найденные главные направления перпендикулярны друг другу.

Замечание 1. Согласно формулам (3) нахождение главных направлений требует, вообще говоря, извлечения квадратных корней. Замечательно, что *для параболических* (*нецентральных*)

линий главные направления можно найти, и не извлекая квадратных корней, поскольку для параболических линий главные направления характеризуются отношениями

$$a_{11} : a_{12} = a_{12} : a_{22} \quad \text{и} \quad -a_{12} : a_{11} = -a_{22} : a_{12}.$$

Действительно, отношение $-a_{12} : a_{11} = -a_{22} : a_{12}$ характеризует, как мы знаем, асимптотическое (особое) направление параболических линий, а отношение $a_{11} : a_{12} = a_{12} : a_{22}$ — направление, ему перпендикулярное.

Определение 2. Диаметр линии второго порядка называется *главным*, если он сопряжен с перпендикулярным ему направлением, т. е. если он перпендикулярен некоторому главному направлению (ср. определение 2 п. 5 § 2 гл. 5).

Так как любой диаметр проходит через середины хорд сопряженного направления (см. п. 6), то

любой главный диаметр линии второго порядка является ее осью симметрии.

Обратное, как показывает пример двух перпендикулярных прямых, вообще говоря, неверно.

Далее, ясно, что

направление любого главного диаметра является главным направлением.

Обратное также, вообще говоря, неверно. Действительно, для параболических линий все диаметры имеют особое (асимптотическое) направление, но существует главное направление, которое неасимптотично и потому не является направлением никакого диаметра.

Для вырожденных параболических линий (линий типа III) существует только один диаметр (прямая центров) и поскольку перпендикулярное к нему направление представляет собой главное направление, он является главным диаметром.

Для парабол (линий типа II) также существует только один главный диаметр, а именно, диаметр, сопряженный с главным неасимптотическим направлением.

Для центральных линий (линий типа I), отличных от окружности, существует два главных диаметра, каждый из которых сопряжен с направлением другого (и потому ему перпендикулярен).

Для окружностей все диаметры являются главными.

Для нецентральных линий (линий типа II и III) главный диаметр сопряжен с направлением, характеризующимся отношением $a_{11} : a_{12} = a_{12} : a_{22}$. Следовательно, чтобы получить уравнение главного диаметра, следует в уравнении (5) п. 6 положить либо $l = a_{11}$, $m = a_{12}$, либо $l = a_{12}$, $m = a_{22}$.

Полагая, например, $l = a_{11}$, $m = a_{12}$, мы получим уравнение

$$(a_{11}^2 + a_{12}^2)x + a_{12}(a_{11} + a_{12})y + a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} = 0.$$

Но, по условию, $a_{11}a_{22}=a_{12}^2$, и потому

$$a_{11}^2+a_{12}^2=a_{11}(a_{11}+a_{22}).$$

Кроме того,

$$a_{11}+a_{22}\neq 0,$$

поскольку, как мы знаем (см. п. 3), равенство $a_{11}+a_{22}=0$ характеризует равнобочные гиперболы и пары перпендикулярных прямых.

Следовательно, мы можем полученное уравнение сократить на $a_{11}+a_{22}$. В результате получим уравнение

$$a_{11}x+a_{12}y+\frac{a_{11}a_{13}+a_{12}a_{23}}{a_{11}+a_{22}}=0. \qquad (4)$$

Аналогично, полагая в уравнении (5) п. 6 $l=a_{21}$, $m=a_{22}$, мы (после сокращения на $a_{11}+a_{12}$) получим уравнение

$$a_{21}x+a_{22}y+\frac{a_{21}a_{13}+a_{22}a_{23}}{a_{11}+a_{22}}=0. \qquad (5)$$

Таким образом,

уравнение главного диаметра параболической линии второго порядка может быть записано либо в виде (4), *либо в виде* (5).

Уравнение (4) имеет смысл (не сводится к тождеству $0=0$) тогда и только тогда, когда либо $a_{11}\neq 0$, либо $a_{12}\neq 0$. Это не удивительно, поскольку при его выводе мы принимали за l и m числа a_{11} и a_{12}, что имеет смысл тогда и только тогда, когда хотя бы одно из этих чисел отлично от нуля.

Аналогично, уравнение (5) имеет смысл тогда и только тогда, когда либо $a_{21}\neq 0$, либо $a_{22}\neq 0$.

Когда оба уравнения (4) и (5) имеют смысл, они равносильны.

В случае, когда рассматриваемая линия является параболой (имеет тип II), ее главный диаметр является ее осью. Следовательно,

для параболы уравнения (4) *и* (5) *являются уравнениями ее оси.*

В случае вырожденной параболической линии (линии типа III) из условий $\delta=0$ и $\Delta=0$ легко вытекает, что

$$a_{12}a_{23}=a_{22}a_{13};\quad a_{21}a_{13}=a_{11}a_{23}.$$

Поэтому

$$\frac{a_{11}a_{13}+a_{12}a_{23}}{a_{11}+a_{22}}=a_{13}\quad \text{и}\quad \frac{a_{21}a_{13}+a_{22}a_{23}}{a_{11}+a_{22}}=a_{23},$$

так что уравнения (4) и (5) приобретают вид

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0\quad \text{и}\quad a_{21}x+a_{22}y+a_{23}=0.$$

Каждое из этих уравнений (когда оно имеет смысл) является уравнением прямой центров вырожденной параболической

линии, как это и должно быть, поскольку главным диаметром такой линии является ее прямая центров.

Уравнения главных диаметров центральных линий второго порядка рационально через коэффициенты уравнения кривой не записываются.

Теперь мы можем без труда охарактеризовать прямоугольную систему координат, в которой уравнение данной линии второго порядка имеет приведенный вид:

Осью абсцисс этой системы является главный диаметр (единственный главный диаметр для нецентральных линий и любой из двух главных диаметров для центральных линий).

Осью ординат этой системы является для центральных линий другой главный диаметр, а для нецентральных линий — прямая, перпендикулярная главному диаметру (т. е. прямая, имеющая неасимптотическое главное направление) и проходящая (в случае параболы) через точку пересечения линий с главным диаметром.

Замечание 2. Обратим внимание на то, что мы заново доказали и существование прямоугольных координат, в которых линия второго порядка имеет приведенное уравнение.

Дополнение. **Классификация поверхностей второго порядка**

Совершенно аналогичные результаты имеют место и для поверхностей второго порядка в пространстве (аффинном или евклидовом, вещественном, вещественно-комплексном или комплексном).

Мы приведем здесь формулировки соответствующих теорем для евклидова случая. Доказывать их мы не будем.

Во-первых, оказывается, что в вещественном евклидовом пространстве все поверхности второго порядка исчерпываются поверхностями, рассмотренными в § 3 гл. 5, и парами плоскостей, т. е.

любая поверхность второго порядка в вещественном евклидовом пространстве представляет собой поверхность одного из следующих шести видов:

1) *эллипсоид,*
2) *гиперболоид (однополостный или двуполостный),*
3) *параболоид (эллиптический или гиперболический),*
4) *конус,*
5) *цилиндр (эллиптический, параболический или гиперболический),*
6) *пара плоскостей (различных или совпадающих).*

Впрочем, пары плоскостей мы можем считать цилиндрами (а пары пересекающихся или совпадающих плоскостей — и конусами); см. пп. 7—8 § 3 гл. 5.

В вещественно-комплексном евклидовом пространстве возможны еще *мнимые эллипсоиды* с каноническим уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad a\geqslant b\geqslant c>0,$$

(в вещественном пространстве эти эллипсоиды являются пустыми множествами), *мнимые конусы* с каноническим уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad a\geqslant b\geqslant c>0$$

(являющиеся в вещественном пространстве точками) и *мнимые эллиптические цилиндры* (являющиеся в вещественном пространстве пустыми множествами). Кроме того, конечно, возможны *пары мнимых* (комплексно-сопряженных) *плоскостей* (в вещественном пространстве являющиеся либо прямыми, либо пустыми множествами).

Всего мы получаем, таким образом, семнадцать классов различных поверхностей второго порядка в евклидовом вещественно-комплексном пространстве:

Таблица вещественных поверхностей второго порядка в евклидовом вещественно-комплексном пространстве

№№ пп	Название	Схематический вид поверхности	Каноническое уравнение поверхности
[1]	Эллипсоид (действительный)		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$ $a\geqslant b\geqslant c>0$
[2]	Мнимый эллипсоид		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$ $a\geqslant b\geqslant c>0$
[3]	Мнимый конус второго порядка		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ $a\geqslant b\geqslant c>0,$ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$
[4]	Двуполостный гиперболоид		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$ $a\geqslant b\geqslant 0,\quad c>0$
[5]	Однополостный гиперболоид		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$ $a\geqslant b>0,\quad c>0$

№№ п/п	Название	Схематический вид поверхности	Каноническое уравнение поверхности
[6]	Действительный конус второго порядка		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$ $a \geqslant b > 0,\quad c > 0,$ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$
[7]	Эллиптический параболоид		$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,$ $p \geqslant q > 0$
[8]	Гиперболический параболоид		$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,$ $p > 0,\quad q > 0$
[9]	Эллиптический цилиндр (действительный)		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ $a \geqslant b > 0$
[10]	Мнимый эллиптический цилиндр		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$ $a \geqslant b > 0$
[11]	Пара мнимых пересекающихся плоскостей		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,$ $a \geqslant b > 0,$ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$
[12]	Гиперболический цилиндр		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$ $a > 0,\quad b > 0$
[13]	Пара пересекающихся плоскостей (вещественных)		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ $a > 0,\quad b > 0,$ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$
[14]	Параболический цилиндр		$y^2=2px,\quad p > 0$

№№ пп	Название	Схематический вид поверхности	Каноническое уравнение поверхности
[15]	Пара параллельных (не совпадающих) плоскостей (вещественных)		$y^2 - b^2 = 0, \quad b > 0$
[16]	Пара мнимых параллельных плоскостей		$y^2 + b^2 = 0, \quad b > 0$
[17]	Пара совпадающих плоскостей		$y^2 = 0$

Самое общее уравнение поверхности второго порядка в прямоугольных (или аффинных) координатах имеет вид

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + \\ + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{24}y + \\ + a_{33}z^2 + 2a_{34}z + \\ + a_{44} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Считая, что

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

мы сопоставим этому уравнению симметрическую матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Пусть

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44},$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Оказывается, что

числа S, δ, Δ, D не меняются при переходе к любой другой системе прямоугольных координат.

На этом основании они называются *инвариантами* уравнения (1).

Нам понадобятся также числа

$$K=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$L=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Оказывается, что

числа K и L не меняются при повороте координатных осей (при переносе начала координат они, вообще говоря, меняются).

На этом основании числа K и L называются *семиинвариантами.*

Оказывается, что класс (вещественной) поверхности второго порядка может быть определен по инвариантам и семиинвариантам его уравнения:

№№ пп	Поверхности	Характеристика по инвариантам и семиинвариантам
[1]	Эллипсоид	$S\Delta>0,\ \delta>0,\ D<0$
[2]	Мнимый эллипсоид	$S\Delta>0,\ \delta>0,\ D>0$
[3]	Мнимый конус	$S\Delta>0,\ \delta>0,\ D=0$
[4]	Двуполостный гиперболоид	$S\Delta\leqslant 0,\ \Delta\neq 0,\ \delta\leqslant 0,\ D>0$
[5]	Однополостный гиперболоид	$S\Delta\leqslant 0,\ \Delta\neq 0,\ \delta\leqslant 0,\ D<0$
[6]	Конус второго порядка	$S\Delta\leqslant 0,\ \Delta\neq 0,\ \delta\leqslant 0,\ D=0$
[7]	Эллиптический параболоид	$\Delta=0,\ D<0$
[8]	Гиперболический параболоид	$\Delta=0,\ D>0$.
[9]	Эллиптический цилиндр	$\Delta=0,\ D=0,\ \delta>0,\ SL<0$
[10]	Мнимый эллиптический цилиндр	$\Delta=0,\ D=0,\ \delta>0,\ SL>0$
[11]	Пара мнимых пересекающихся плоскостей	$\Delta=0,\ D=0,\ \delta>0,\ L=0$
[12]	Гиперболический цилиндр	$\Delta=0,\ D=0,\ \delta<0,\ L\neq 0$
[13]	Пара пересекающихся (вещественных) плоскостей	$\Delta=0,\ D=0,\ \delta<0,\ L=0$
[14]	Параболический цилиндр	$\Delta=0,\ D=0,\ \delta=0,\ L\neq 0$
[15]	Пара параллельных (вещественных) плоскостей	$\Delta=0,\ D=0,\ \delta=0.\ L=0,\ K<0$
[16]	Пара мнимых параллельных плоскостей	$\Delta=0,\ D=0,\ \delta=0,\ L=0,\ K>0$
[17]	Пара совпадающих (вещественных) плоскостей	$\Delta=0,\ D=0,\ \delta=0,\ L=0,\ K=0$

Таким образом, с помощью инвариантов и семиинвариантов можно определить класс поверхности второго порядка, не производя фактического приведения к каноническому виду (возможность использования семиинвариантов для выделения поверхностей классов [9]—[17] объясняется тем, что для этих поверхностей они являются инвариантами).

Более того, зная инварианты и семиинварианты уравнения поверхности, можно написать даже ее каноническое уравнение (по-прежнему не производя приведения, т. е. не находя канонической системы координат).

Для этого следует ввести в рассмотрение кубическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

в развернутом виде имеющее вид

$$\lambda^3 - S\lambda^2 + \delta\lambda - \Delta = 0$$

(это уравнение называется *характеристическим уравнением* для уравнения (1)). Можно показать, что

корни λ_1, λ_2, λ_3 *характеристического уравнения всегда вещественны* [1]).

При $\Delta \neq 0$ все корни λ_1, λ_2, λ_3 отличны от нуля, при $\Delta = 0$ и $\delta \neq 0$ один (и только один) из этих корней равен нулю (пусть это будет корень λ_3), при $\Delta = 0$ и $\delta = 0$ равны нулю два из корней (скажем, корни λ_2 и λ_3), а третий корень λ_1 равен S (и заведомо отличен от нуля, ибо в противном случае, как можно показать, все коэффициенты уравнения (1) равны нулю).

Оказывается, что

преобразованием прямоугольных координат уравнение произвольной поверхности второго порядка можно привести к одному из следующих пяти типов:

(I) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \dfrac{D}{\Delta} = 0$ (*при* $\Delta \neq 0$)

(II) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \pm 2\sqrt{-\dfrac{D}{\delta}}\, z = 0$ (*при* $\Delta = 0$, $D \neq 0$, $\delta \neq 0$) [2]),

(III) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \dfrac{L}{\delta} = 0$ (*при* $\Delta = 0$, $D = 0$, $\delta \neq 0$),

(IV) $Sx^2 \pm 2\sqrt{-\dfrac{L}{S}}\, y = 0$ (*при* $\Delta = 0$, $D = 0$, $\delta = 0$, $L \neq 0$) [3]),

(V) $Sx^2 + \dfrac{K}{S} = 0$ (*при* $\Delta = 0$, $D = 0$, $\delta = 0$, $L = 0$).

Эти уравнения называются *приведенными уравнениями поверхностей второго порядка.*

---

[1]) Алгебраической причиной этого является симметричность матрицы (2).
[2]) При $\Delta = 0$ величины D и δ имеют противоположные знаки.
[3]) При $\Delta = D = \delta = 0$ величины L и S имеют противоположные знаки.

Подчеркнем, что написать приведенное уравнение произвольной поверхности второго порядка мы можем непосредственно по ее инвариантам и семиинвариантам.

Переход от приведенного уравнения к каноническому сводится к тривиальным алгебраическим преобразованиям и никакого труда не представляет.

Приведенные уравнения типа (I) имеют поверхности [1]—[6], типа (II) — поверхности [7]—[8], типа (III) — поверхности [9]—[13], типа (IV) — поверхности [14] и типа (V) — поверхности [15]—[17].

§ 2. ПРОЕКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Линии второго порядка на аффинно-проективной и проективной плоскостях

Определение 1. *Линией второго порядка* на аффинно-проективной плоскости называется множество точек, однородные аффинные координаты $X:Y:Z$ которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2+2a_{13}XZ+2_{23}YZ+a_{33}Z^2=0. \qquad (1)$$

Замечание 1. Ясно, что это определение корректно, т. е. в любой другой однородной аффинной координатной системе линия второго порядка выражается аналогичным уравнением (но, конечно, с другими коэффициентами).

Замечание 2. Определение 1 имеет смысл в аффинно-проективной плоскости под любым полем $\mathbb{K}$ (а в случае поля $\mathbb{C}$ — как в комплексной, так и в вещественно-комплексной плоскости). Для определенности мы в дальнейшем ограничимся лишь аффинно-проективной вещественно-комплексной плоскостью (случай, для нас наиболее интересный), хотя почти все результаты будут справедливы и над любым полем $\mathbb{K}$ характеристики, отличной от двух (конечно, с соответствующими тривиальными и само собой разумеющимися изменениями).

Аффинные координаты $x=\frac{X}{Z}$, $y=\frac{Y}{Z}$ собственных точек линии (1) удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad (2)$$

и, следовательно, составляют (если хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля) некоторую линию второго порядка на аффинной плоскости.

Если $a_{11}=a_{12}=a_{22}=0$, но $a_{13}\neq 0$ или $a_{23}\neq 0$, то уравнение (2) выражает прямую, а если $a_{11}=a_{12}=a_{22}=a_{13}=a_{23}=0$ (но, конечно, $a_{33}\neq 0$), то ему не удовлетворяют координаты никакой собственной точки.