Подчеркнем, что написать приведенное уравнение произвольной поверхности второго порядка мы можем непосредственно по ее инвариантам и семиинвариантам.

Переход от приведенного уравнения к каноническому сводится к тривиальным алгебраическим преобразованиям и никакого труда не представляет.

Приведенные уравнения типа (I) имеют поверхности [1]—[6], типа (II)— поверхности [7]—[8], типа (III) — поверхности [9]—[13], типа (IV) — поверхности [14] и типа (V) — поверхности [15]—[17].

## § 2. ПРОЕКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

### 1. Линии второго порядка на аффинно-проективной и проективной плоскостях

***Определение 1.*** *Линией второго порядка* на аффинно-проективной плоскости называется множество точек, однородные аффинные координаты $X:Y:Z$ которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2+2a_{13}XZ+2_{23}YZ+a_{33}Z^2=0. \qquad (1)$$

***Замечание 1.*** Ясно, что это определение корректно, т. е. в любой другой однородной аффинной координатной системе линия второго порядка выражается аналогичным уравнением (но, конечно, с другими коэффициентами).

***Замечание 2.*** Определение 1 имеет смысл в аффинно-проективной плоскости под любым полем $\mathbb{K}$ (а в случае поля $\mathbb{C}$ — как в комплексной, так и в вещественно-комплексной плоскости). Для определенности мы в дальнейшем ограничимся лишь аффинно-проективной вещественно-комплексной плоскостью (случай, для нас наиболее интересный), хотя почти все результаты будут справедливы и над любым полем $\mathbb{K}$ характеристики, отличной от двух (конечно, с соответствующими тривиальными и само собой разумеющимися изменениями).

Аффинные координаты $x=\frac{X}{Z}$, $y=\frac{Y}{Z}$ собственных точек линии (1) удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad (2)$$

и, следовательно, составляют (если хотя бы один из коэффициентов $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$ отличен от нуля) некоторую линию второго порядка на аффинной плоскости.

Если $a_{11}=a_{12}=a_{22}=0$, но $a_{13}\neq 0$ или $a_{23}\neq 0$, то уравнение (2) выражает прямую, а если $a_{11}=a_{12}=a_{22}=a_{13}=a_{23}=0$ (но, конечно, $a_{33}\neq 0$), то ему не удовлетворяют координаты никакой собственной точки.

Координаты $X:Y:Z = l:m:0$ несобственных точек линии (1) определяются из уравнения

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0,$$

удовлетворяющегося тождественно при $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ и определяющего асимптотические направления линии (2) в противном случае.

Таким образом,

*если хотя бы один из коэффициентов $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$ отличен от нуля, то линия второго порядка* (1) *на аффинно-проективной плоскости получается из линии второго порядка* (2) *на аффинной плоскости присоединением несобственных точек ее асимптотических направлений,*

*если же $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, то линия второго порядка* (1) *распадается на две прямые, одна из которых является несобственной прямой $Z = 0$* (*а другая — либо некоторой собственной прямой, либо также несобственной прямой $Z = 0$*).

Если линия (2) является эллипсом, параболой или гиперболой, то те же названия сохраняются и для соответствующей линии (1) на аффинно-проективной плоскости.

Поскольку эллипс и гипербола имеют два различных асимптотических направления (эллипс — мнимые, а гипербола — вещественные), а парабола — одно асимптотическое направление, то, следовательно,

*на аффинно-проективной вещественно-комплексной плоскости эллипс имеет две дополнительные мнимые несобственные точки, гипербола — две вещественные несобственные точки, а парабола — одну* (*вещественную*) *несобственную точку.*

Если линия (2) является парой прямых, то ее асимптотическими направлениями являются направления этих прямых. Поэтому присоединение несобственных точек этих направлений превращает эти прямые в прямые на аффинно-проективной плоскости.

Таким образом, мы видим, что, так же как и на аффинной плоскости,

*любая* (*вещественная*) *линия второго порядка на аффинно-проективной* (*вещественно-комплексной*) *плоскости представляет собой линию одного из следующих четырех видов*:

1) *эллипс* (*действительный или мнимый*);
2) *парабола*;
3) *гипербола*;
4) *пара прямых* (*вещественных или мнимых, различных или совпадающих, собственных или несобственных*).

Поскольку мнимые прямые (составляющие вещественную линию второго порядка) обязательно различны, а совпадающие прямые обязательно вещественны, мы, следовательно, получаем о д и н н а д ц а т ь различных классов вещественных линий второго порядка на аффинно-проективной вещественно-комплексной плоскости:

**Таблица вещественных линий второго порядка на аффинно-проективной вещественно-комплексной плоскости**

| №№ пп | Линия | Каноническое уравнение |
|---|---|---|
| [1] | Действительный эллипс | $X^2+Y^2-Z^2=0$ |
| [2] | Мнимый эллипс | $X^2+Y^2+Z^2=0$ |
| [3] | Пара различных мнимых (комплексно-сопряженных) прямых, пересекающихся в собственной точке | $X^2+Y^2=0$ |
| [4] | Гипербола | $X^2-Y^2-Z^2=0$ |
| [5] | Пара различных вещественных собственных прямых, пересекающихся в собственной точке | $X^2-Y^2=0$ |
| [6] | Парабола | $Y^2=2XZ$ |
| [7] | Пара различных собственных вещественных прямых, пересекающихся в несобственной точке | $Y^2-Z^2=0$ |
| [8] | Пара различных мнимых (комплексно-сопряженных) прямых, пересекающихся в несобственной точке | $Y^2+Z^2=0$ |
| [9] | Пара совпадающих вещественных собственных прямых | $Y^2=0$ |
| [10] | Пара прямых, состоящая из вещественной собственной прямой и несобственной прямой | $XZ=0$ |
| [11] | Пара совпадающих несобственных прямых | $Z^2=0$ |

Аналогично, на аффинно-проективной комплексной плоскости получается следующая таблица:

**Таблица линий второго порядка на аффинно-проективной комплексной плоскости**

| №№ пп | Линия | Каноническое уравнение |
|---|---|---|
| [1] | Центральная невырожденная линия (эллипс или гипербола) | $X^2+Y^2+Z^2=0$ |
| [2] | Пара различных собственных прямых, пересекающихся в собственной точке | $X^2+Y^2=0$ |
| [3] | Нецентральная невырожденная линия (парабола) | $Y^2=2XZ$ |
| [4] | Пара различных собственных прямых, пересекающихся в несобственной точке | $Y^2+Z^2=0$ |
| [5] | Пара совпадающих собственных прямых | $Y^2=0$ |
| [6] | Пара прямых, состоящая из собственной и несобственной прямой | $XZ=0$ |
| [7] | Пара совпадающих несобственных прямых | $Z^2=0$ |

Таким образом, в этом случае имеется семь классов линий второго порядка.

Аналогичные результаты имеют место и для линий второго порядка на проективной плоскости.

***Определение 2.*** *Линией второго порядка* на проективной плоскости называется множество всех точек, однородные проективные координаты $X : Y : Z$ которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + a_{33}Z^2 = 0, \qquad (3)$$

Ясно, что это определение корректно.

На аффинно-проективной (вещественно-комплексной) плоскости эллипсы, параболы и гиперболы различились по характеру их пересечения с несобственной прямой. Поскольку на проективной плоскости несобственной прямой нет, различие между эллипсами, параболами и гиперболами пропадает. Аналогично пропадает различие между парами прямых, состоящих из собственных прямых, и парами прямых, одна из которых (или обе) являются несобственными прямыми. Поэтому на проективной вещественно-комплексной плоскости имеется только пять классов (вещественных) линий второго порядка:

**Таблица вещественных линий второго порядка на проективной вещественно-комплексной плоскости**

| №№ пп | Линия | Каноническое уравнение |
|---|---|---|
| [1] | Действительная невырожденная линия | $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ |
| [2] | Мнимая невырожденная линия | $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ |
| [3] | Пара вещественных различных прямых | $X^2 - Y^2 = 0$ |
| [4] | Пара мнимых (комплексно-сопряженных) прямых | $X^2 + Y^2 = 0$ |
| [5] | Пара совпадающих прямых | $X^2 = 0$ |

На проективной комплексной плоскости остается только три класса линий второго порядка:

**Таблица линий второго порядка на проективной комплексной плоскости**

| №№ пп | Линия | Каноническое уравнение |
|---|---|---|
| [1] | Невырожденная линия | $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ |
| [2] | Пара различных прямых | $X^2 + Y^2 = 0$ |
| [3] | Пара совпадающих прямых | $X^2 = 0$ |

## 2. Пересечение прямой и линии второго порядка

Пересечение прямой и линии второго порядка мы исследовали до сих пор (см., например, п. 2 § 2 гл. 5) на аффинной (или евклидовой) плоскости. Рассмотрим теперь этот вопрос на аффинно-проективной и проективной плоскостях. Естественно, что мы получим аналогичные результаты, но несколько более простые (поскольку нам не придется различать асимптотических и неасимптотических направлений).

Исследование мы будем вести одновременно на аффинно-проективной и проективной плоскостях. В первом случае координаты $X:Y:Z$ будут предполагаться, естественно, однородными аффинными координатами, а во втором — произвольными проективными координатами.

Для определенности мы будем предполагать плоскость вещественно-комплексной.

В аффинно-проективной (и проективной) плоскости прямая, проходящая через (фиксированные) точки $M_0(X_0:Y_0:Z_0)$ и $M_1(X_1:Y_1:Z_1)$, имеет параметрические уравнения вида

$$\begin{aligned} X &= \mu X_0 + \nu X_1, \\ Y &= \mu Y_0 + \nu Y_1, \\ Z &= \mu Z_0 + \nu Z_1, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mu$, $\nu$ — произвольные параметры, одновременно не равные нулю.

Пусть

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + a_{33}Z^2 = 0 \tag{2}$$

— произвольная линия второго порядка.

***Обозначения.*** Для упрощения формул введем следующие сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned} F(M) &= a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + a_{33}Z^2, \\ F_1(M) &= a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z, \\ F_2(M) &= a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z, \\ F_3(M) &= a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z, \end{aligned} \tag{3}$$

где $M$ — точка с координатами $X:Y:Z$. Аналогично,

$$\begin{aligned} F(M_0, M_1) = a_{11}X_0X_1 + a_{12}X_0Y_1 + a_{13}X_0Z_1 + \\ + a_{21}Y_0X_1 + a_{22}Y_0Y_1 + a_{23}Y_0Z_1 + \\ + a_{31}Z_0X_1 + a_{32}Z_0Y_1 + a_{33}Z_0Z_1, \end{aligned}$$

где $M_0$ и $M_1$ — точки с координатами $X_0 : Y_0 : Z_0$ и $X_1 : Y_1 : Z_1$. Таким образом,

$$F(M) = F(M, M) = F_1(M)X + F_2(M)Y + F_3(M)Z,$$

и

$$F(M_0, M_1) = F_1(M_0)X_1 + F_2(M_0)Y_1 + F_3(M_0)Z_1 = \\ = F_1(M_1)X_0 + F_2(M_1)Y_0 + F_3(M_1)Z_0.$$

Обратим внимание на то, что, скажем, число $F_1(M)$ зависит от выбора координат точки $M$ (при переходе от координат $X$, $Y$, $Z$ к пропорциональным координатам $\rho X$, $\rho Y$, $\rho Z$ оно умножается на $\rho$).

*Замечание 1.* (Для читателей, знакомых с дифференциальным исчислением функций многих переменных.) Ясно, что

$$F_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X}, \quad F_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Y}, \quad F_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial Z}.$$

Чтобы найти точки пересечения прямой (1) с линией (2), следует, как мы знаем, подставить выражения (1) в уравнение (2) и решить получающееся уравнение относительно $\mu : \nu$.

В обозначениях (3) и (3′) это уравнение имеет, очевидно, вид

$$\mu^2 F(M_0) + 2\mu\nu F(M_0, M_1) + \nu^2 F(M_1) = 0. \tag{4}$$

Если

$$F(M_0) = F(M_0, M_1) = F(M_1) = 0,$$

то уравнение (4) удовлетворяется тождественно, т. е. прямая (1) целиком содержится в линии (2).

В противном случае уравнение (4) имеет два решения, выражающиеся формулами

$$\mu : \nu = \left(-F(M_0, M_1) \pm \sqrt{F(M_0, M_1)^2 - F(M_0)F(M_1)}\right) : F(M_0),$$

$$\mu : \nu = F(M_1) : \left(-F(M_0, M_1) \mp \sqrt{F(M_0, M_1)^2 - F(M_0)F(M_1)}\right).$$

(Если $F(M_0) \neq 0$ и $F(M_1) \neq 0$, то эти формулы равносильны; при $F(M_0) = 0$ или $F(M_1) = 0$ следует пользоваться той из этих формул — в зависимости от знака корня,— которая имеет смысл.)

Таким образом,

*в аффинно-проективной (проективной) вещественно-комплексной плоскости каждая линия второго порядка, не содержащая данную прямую, пересекается с этой прямой не более чем в двух точках.*

***Определение 1.*** В случае, когда имеются две точки пересечения, они, по определению, считаются *точками пересечения кратности* 1, а в случае, когда точка пересечения только одна, она, по определению, считается *точкой пересечения кратности* 2.

Точки кратности 1 называются также *простыми точками пересечения*, а точки кратности 2 — *двойными точками пересечения.*

Прямая, имеющая с линией второго порядка двойную точку пересечения (или целиком принадлежащая линии) называется *касательной* к линии в этой точке (соответственно — в любой своей точке). Для прямой (1) это имеет место тогда и только тогда, когда

$$F(M_0,\ M_1)^2 - F(M_0)F(M_1) = 0. \tag{5}$$

Если данные прямая и линия второго порядка вещественны, то их точки пересечения либо вещественны, либо комплексно-сопряжены.

Если точка $M_0(X_0 : Y_0 : Z_0)$ принадлежит линии (2), т. е. если $F(M_0) = 0$, то условие (5) выполнено тогда и только тогда, когда

$$F(M_0,\ M_1) = 0,$$

т. е. когда

$$F_1(M_0)X_1 + F_2(M_0)Y_1 + F_3(M_0)Z_1 = 0. \tag{6}$$

Таким образом, соотношению (6) удовлетворяют координаты $X_1 : Y_1 : Z_1$ любой точки $M_1$ каждой касательной, проходящей через точку $M_0$.

***Определение 2.*** Если хотя бы одно из чисел $F_1(M_0)$, $F_2(M_0)$, $F_3(M_0)$ отлично от нуля, то точка $M_0$ называется *простой точкой* линии (2). Если же

$$F_1(M_0) = F_2(M_0) = F_3(M_0) = 0, \tag{7}$$

то точка $M_0$ называется *двойной точкой* линии (2).

Если (фиксированная) точка $M_0$ — простая, то уравнение

$$F_1(M_0)X + F_2(M_0)Y + F_3(M_0)Z = 0 \tag{8}$$

определяет на плоскости некоторую прямую. Поскольку уравнению (8) должны удовлетворять, согласно сказанному выше, координаты любой точки каждой касательной в точке $M_0$, мы получаем, что

*в каждой простой точке $M_0$ линия второго порядка* (2) *имеет единственную касательную, выражающуюся уравнением* (8).

В обозначениях (3) уравнение (8) имеет вид

$$F(M_0,\ M) = 0 \tag{8$'$}$$

(где точка $M_0$ — фиксированная, а точка $M$ — переменная), т. е. вид

$$(a_{11}X_0 + a_{12}Y_0 + a_{13}Z_0)X + (a_{21}X_0 + a_{22}Y_0 + a_{23}Z_0)Y +$$
$$+ (a_{31}X_0 + a_{32}Y_0 + a_{33}Z_0)Z = 0. \tag{8$''$}$$

Если точка $M_0$ — двойная, условие (6) выполнено для любой точки $M_1$. Это означает, что

*каждая прямая, проходящая через двойную точку линии* (2), *является касательной к этой линии.*

Таким образом,

*точка линии второго порядка тогда и только тогда является ее простой точкой, когда в этой точке существует единственная касательная.*

Уравнения (7), определяющие двойные точки, т. е. уравнения

$$\begin{aligned} a_{11}X_0 + a_{12}Y_0 + a_{13}Z_0 &= 0, \\ a_{21}X_0 + a_{22}Y_0 + a_{23}Z_0 &= 0, \\ a_{31}X_0 + a_{32}Y_0 + a_{33}Z_0 &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

тогда и только тогда имеют нетривиальное решение $(X_0, Y_0, Z_0) \neq \neq (0, 0, 0)$, когда определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

равен нулю.

***Определение 3.*** Линия второго порядка (2) называется *вырожденной*, если $\Delta = 0$, и *невырожденной*, если $\Delta \neq 0$.

Умножив равенства (9) соответственно на $X_0$, $Y_0$, $Z_0$ и сложив, мы получим соотношение

$$F(X_0, Y_0, Z_0) = 0,$$

показывающее, что

*любая точка, координаты* $X_0 : Y_0 : Z_0$ *которой удовлетворяют уравнениям* (9), *принадлежит линии* (2) (*и потому является ее двойной точкой*).

Следовательно,

*линия второго порядка тогда и только тогда вырождена, когда она имеет двойные точки.*

Это, в частности, показывает, что определение 3 корректно.

Пусть $M_0$ — двойная точка линии (2) и $M_1$ — другая ее точка (безразлично, простая или двойная). Прямая $M_0M_1$ является касательной в точке $M_0$ и проходит через точку $M_1$. Но если касательная не содержится в линии (2), то она имеет с ней только одну общую точку. Поэтому прямая $M_0M_1$ целиком содержится в линии (2), что, как мы знаем, возможно тогда и только тогда, когда линия (2) является парой прямых (быть может, совпадающих).

Обратно, пусть линия (2) является парой прямых, т. е. имеет уравнение вида

$$(A_1X + B_1Y + C_1Z)(A_2X + B_2Y + C_2Z) = 0.$$

Тогда

$$a_{11}=A_1A_2,\quad a_{12}=\frac{A_1B_2+A_2B_1}{2},\quad a_{13}=\frac{A_1C_2+A_2C_1}{2}.$$

$$a_{22}=B_1B_2,\quad a_{23}=\frac{B_1C_2+B_2C_1}{2},$$

$$a_{33}=C_1C_2$$

и

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1A_2 & \frac{A_1B_2+A_2B_1}{2} & \frac{A_1C_2+A_2C_1}{2} \\ \frac{A_1B_2+A_2B_1}{2} & B_1B_2 & \frac{B_1C_2+B_2C_1}{2} \\ \frac{A_1C_2+A_2C_1}{2} & \frac{B_1C_2+B_2C_1}{2} & C_1C_2 \end{vmatrix}=0.$$

Таким образом,

*линия второго порядка тогда и только тогда вырождена (обладает двойными точками), когда она является парой прямых.*

***Задание.*** Покажите, что если прямые, составляющие линию (2), различны, то эта линия обладает единственной двойной точкой и этой точкой будет точка пересечения этих прямых. Покажите также, что если линия (2) является двойной прямой, то любая ее точка будет двойной точкой.

Для линии (2), являющейся парой прямых, касательной в любой ее простой точке является та из прямых, составляющих линию, которая проходит через эту точку. Касательной в двойной точке является (согласно сказанному выше) любая прямая, проходящая через эту точку.

В частности, для двойной прямой каждая прямая на плоскости является касательной.

На аффинно-проективной плоскости эллипс и гипербола пересекают, как мы знаем, несобственную прямую в двух различных точках, а парабола — в одной. Следовательно,

*на аффинно-проективной плоскости параболы могут быть охарактеризованы как невырожденные линии второго порядка, касающиеся несобственной прямой.*

Точкой касания является, очевидно, несобственная точка оси параболы.

Далее,

*собственная прямая тогда и только тогда касается эллипса, параболы или гиперболы, когда она является либо асимптотой (если точка касания — несобственная), либо касательной в смысле* п. 6 § 1 гл. 5 *(если точка касания — собственная).*

***Задание.*** Докажите это утверждение.

Таким образом, в частности,

*асимптоты линии второго порядка могут быть охарактеризованы (на аффинно-проективной плоскости) как прямые (собственные), касающиеся линий в несобственной точке.*

## 3. Поляры и полюсы

Обратим внимание на то, что уравнение (8) п. 2, т. е. уравнение

$$F(M_0, M)=0 \tag{1}$$

(с фиксированной точкой $M_0$ и переменной точкой $M$), определяет некоторую прямую и тогда, когда точка $M_0$ не принадлежит линии второго порядка.

***Определение 1.*** Прямая (1) называется *полярой* точки $M_0$ (по отношению к линии $F=0$), а точка $M_0$ называется ее *полюсом*.

***Замечание 1.*** Так как $F_1(M_0)=F_2(M_0)=F_3(M_0)=0$ тогда и только тогда, когда точка $M_0$ является двойной точкой линии $F=0$ (см. п. 2), то для любой точки $M$ плоскости, не являющейся двойной точкой линии $F=0$, уравнение (1) действительно определяет некоторую прямую.

Таким образом,

*поляра существует (и однозначно определена) для любой точки, не являющейся двойной точкой линии $F=0$.*

При этом

*полярой любой простой точки линии $F=0$ является касательная к линии $F=0$ в этой точке.*

Короче: *касательная есть поляра точки касания.*

В частности, мы видим, что

*касательная является полярой, содержащей свой полюс.*

Обратно,

*если поляра содержит свой полюс, то она является касательной (в полюсе).*

Действительно, так как

$$F(M_0)=F(M_0, M_0),$$

точка $M_0$, принадлежащая своей поляре, принадлежит линии $F=0$.

Пусть

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{2}$$

— произвольная линия второго порядка на а ф ф и н н о й плоскости. Согласно определению 1 п. 6 § 1 диаметром, сопряженным с неасимптотическим направлением $l:m$, называется прямая

$$(a_{11}l+a_{12}m)x+(a_{12}l+a_{22}m)y+(a_{13}l+a_{23}m)=0.$$

В однородных аффинных координатах $X:Y:Z=x:y:1$ это уравнение имеет вид

$$(a_{11}l+a_{12}m)X+(a_{12}l+a_{22}m)Y+(a_{13}l+a_{23}m)Z=0.$$

Сравнив это уравнение с уравнением поляры несобственной точки $X_0:Y_0:Z_0=l:m:0$, мы немедленно получим, что эти два уравнения совпадают.

Следовательно,

*каждый диаметр линии* (2) (*пополненный, конечно, своей несобственной точкой*) *является полярой несобственной точки сопряженного направления.*

Таким образом, поляры можно рассматривать как обобщения диаметров.

***Предложение 1.*** *Если точка $M_1$ принадлежит поляре точки $M_0$, то точка $M_0$ принадлежит поляре точки $M_1$.*

Доказательство. Точка $M_1$ тогда и только тогда принадлежит поляре точки $M_0$, когда

$$F(M_0,\ M_1) = 0,$$

а точка $M_0$ тогда и только тогда принадлежит поляре точки $M_1$, когда

$$F(M_1,\ M_0) = 0.$$

Остается заметить, что

$$F(M_0,\ M_1) = F(M_1,\ M_0)$$

для любых точек $M_0$ и $M_1$.

Конечно, в предложении 1 предполагается, что ни точка $M_0$, ни точка $M_1$ не являются двойными точками линии $F = 0$.

Чтобы избежать подобного рода оговорок, будем далее предполагать, что линия $F = 0$ невырождена (не является парой прямых). Тогда поляра будет существовать для любой точки плоскости.

Более того, легко видеть, что

*относительно невырожденной линии второго порядка $F = 0$ любая прямая является полярой некоторой однозначно определенной точки.*

Действительно, пусть

$$AX + BY + CZ = 0$$

— произвольная прямая. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z &= A, \\ a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z &= B, \\ a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z &= C. \end{aligned}$$

Поскольку определитель $\Delta$ этой системы отличен, по условию, от нуля, она имеет единственное решение $(X_0, Y_0, Z_0) \neq (0, 0, 0)$. Тогда полярой точки $M_0(X_0 : Y_0 : Z_0)$ и будет, очевидно, данная прямая.

Найдем, в частности, на аффинно-проективной плоскости полюс несобственной прямой. Согласно предложению 1 через этот полюс проходят поляры всех несобственных точек, т. е. (см. выше) диаметры рассматриваемой линии второго порядка. Следовательно,

*полюсом несобственной прямой относительно некоторой (невырожденной) линии второго порядка является (в случае, когда этот полюс представляет собой собственную точку) центр данной линии.*

Мы видим, что

*отображение*

$$\text{«полюс»} \longmapsto \text{«поляра»} \qquad (3)$$

*определяет биективное соответствие между множеством всех точек и множеством всех прямых, сохраняющее отношение инцидентности точек и прямых.*

***Определение 2.*** Соответствие (3) называется *поляритетом* (относительно данной невырожденной линии второго порядка $F = 0$).

В терминологии, введенной определением 3 п. 7 § 1 гл. 4, любой поляритет представляет собой *антиавтоморфизм* (коррелятивное преобразование) проективной плоскости.

Заметим, что построенный в п. 7 § 1 гл. 4 антиизоморфизм проективной плоскости над произвольным полем $\mathbb{K}$ является не чем иным, как поляритетом относительно линии второго порядка

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0.$$

(Ясно, что понятия поляры, полюса и поляритета имеют смысл в проективной геометрии над любым полем.)

Не нужно думать, что любой антиизоморфизм проективной плоскости является поляритетом.

***Упражнение.*** Докажите, что

*антиавтоморфизм проективной (вещественно-комплексной) плоскости тогда и только тогда является поляритетом относительно некоторой невырожденной линии второго порядка, когда он инволютивен, т. е. обладает тем свойством, что если точке $M$ сопоставлена прямая $\lambda$, то и, наоборот, прямой $\lambda$ сопоставлена точка $M$.*

Существует красивый геометрический способ отыскания полюсов (доказывающий еще раз их существование). Так как для любой прямой $\lambda_0$, являющейся касательной, полюсом служит точка касания, то достаточно рассмотреть случай, когда прямая $\lambda_0$ пересекает (невырожденную) линию $F = 0$ в двух различных точках $M_1$ и $M_2$.

Пусть $\lambda_1$ — касательная в точке $M_1$, а $\lambda_2$ — касательная в точке $M_2$. Эти касательные различны и потому пересекаются в единственной точке $M_0$. Оказывается, что

*точка $M_0$ является полюсом прямой $\lambda_0$.*

Действительно, пусть $\mu_0$ — поляра точки $M_0$. Так как касательная $\lambda_1$ является полярой точки $M_1$ и содержит точку $M_0$, то согласно предложению 1 поляра $\mu_0$ точки $M_0$ содержит точку $M_1$. По аналогичным соображениям поляра $\mu_0$ содержит и точку $M_2$. Поэтому $\mu_0 = M_1M_2 = \lambda_0$.

***Следствие 1.*** *Через любую точку $M_0$ плоскости, не принадлежащую невырожденной линии второго порядка $F = 0$, проходят две и только две касательные к этой линии.*

Действительно, поскольку каждая прямая имеет единственный полюс, точка $M_0$ является точкой пересечения касательных к линии $F=0$, касающихся этой линии в точках ее пересечения с полярой $\lambda_0$ точки $M_0$. Никакой третьей касательной через точку $M_0$ проходить не может, поскольку ее точка касания была бы третьей точкой пересечения прямой $\lambda_0$ с линией $F=0$.

***Следствие 2.*** *Полярой произвольной точки $M_0$, не принадлежащей невырожденной линии второго порядка $F=0$, является прямая, проходящая через точки касания двух касательных к линии $F=0$, проходящих через точку $M_0$.*

***Замечание 1.*** Предусмотренные следствием 1 касательные могут быть мнимыми (комплексно-сопряженными), даже если точка $M_0$ вещественна. Это позволяет разбить совокупность всех вещественных точек проективной (или аффинно-проективной) вещественно-комплексной плоскости, не принадлежащих данной невырожденной (вещественной) линии второго порядка, на две области: *внешнюю*, для которой эти касательные вещественны, и *внутреннюю*, для которой эти касательные мнимы (для нулевых линий последняя область пуста).

***Замечание 2.*** Следствие 2 показывает, что понятие поляры не зависит от выбора системы координат (ее определение корректно).

Рассмотрим в заключение вопрос: как найти предусмотренные следствием 1 касательные?

Пусть невырожденная линия второго порядка

$$F(X, Y, Z)\equiv a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2+2a_{13}XZ+2a_{23}YZ+a_{33}Z^2=0$$

касается в некоторой (заранее не фиксированной) точке $(X_0:Y_0:Z_0)$ прямой

$$AX+BY+CZ=0. \tag{4}$$

Сравнивая уравнение (4) с уравнением касательной (уравнение (8) п. 2), мы немедленно получаем, что это возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} a_{11}X_0+a_{12}Y_0+a_{13}Z_0&=\rho_0A,\\ a_{21}X_0+a_{22}Y_0+a_{23}Z_0&=\rho_0B,\\ a_{31}X_0+a_{32}Y_0+a_{33}Z_0&=\rho_0C, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\rho_0$ — некоторый множитель пропорциональности (отличный от нуля).

Кроме соотношений (5), должно иметь место также равенство

$$AX_0+BY_0+CZ_0=0,$$

означающее, что точка $(X_0:Y_0:Z_0)$ принадлежит прямой (4).

Таким образом, мы видим, что если прямая (4) касается линии второго порядка $F=0$, то система однородных уравнений

$$\begin{aligned}
a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z - A\rho &= 0,\\
a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z - B\rho &= 0,\\
a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z - C\rho &= 0,\\
AX + BY + CZ \qquad &= 0
\end{aligned} \tag{6}$$

имеет нетривиальное решение $(X_0, Y_0, Z_0, \rho_0)$ и потому ее определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} \tag{7}$$

равен нулю.

Обратно, если определитель (7) равен нулю и потому система уравнений (6) имеет нетривиальное решение

$$(X_0, Y_0, Z_0, \rho_0),$$

то, во-первых, $\rho_0 \neq 0$, поскольку в противном случае определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

был бы равен нулю и линия $F=0$ была бы вырожденной, и, во-вторых, хотя бы одно из чисел $X_0$, $Y_0$, $Z_0$ также не равно нулю, ибо в противном случае имели бы место равенства $A = B = C = 0$. Таким образом, числа $X_0$, $Y_0$, $Z_0$ являются однородными координатами некоторой точки $M_0$, принадлежащей прямой (4) и удовлетворяющей соотношениям (5). Умножая эти соотношения на $X_0$, $Y_0$, $Z_0$ и складывая, мы немедленно получим, что

$$\begin{aligned}
F(M_0) &= F_1(M_0)X_0 + F_2(M_0)Y_0 + F_3(M_0)Z_0 = \\
&= \rho_0(AX_0 + BY_0 + CZ_0) = 0,
\end{aligned}$$

т. е. что точка $M_0$ принадлежит линии $F=0$. Поэтому в этой точке существует единственная касательная, совпадающая в силу соотношений (5) с данной прямой (4).

Тем самым доказано, что

*линия $F=0$ тогда и только тогда касается прямой* (4) *в некоторой* (*заранее не фиксированной*) *точке, когда*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

*Задание*. Проверьте, что это утверждение верно для любых (а не только невырожденных) линий второго порядка.

Теперь уже ясно, как искать касательную, проходящую через точку $M_0(X_0, Y_0, Z_0)$ (безразлично, лежащую или не лежащую на линии $F=0$). Для этого нужно решить (относительно $A:B:C$) систему двух уравнений, состоящую из уравнения (8) и уравнения

$$AX_0 + BY_0 + CZ_0 = 0,$$

выражающего тот факт, что касательная проходит через точку $M_0$. Соответствующие числа $A$, $B$, $C$ и будут коэффициентами уравнения искомой касательной.

### Дополнение. Поляры в пространстве

Совершенно аналогичным образом можно определить относительно произвольной поверхности второго порядка *поляру точки* в пространстве, являющуюся некоторой плоскостью. Если поверхность невырождена ($D \neq 0$), то эта поляра определена для любой точки (проективного пространства) и отображение

«точка» $\longmapsto$ «ее поляра»

определяет биективное соответствие, сохраняющее инцидентность.

Наглядно, поляру можно определить, рассмотрев для любой точки $M_0$ *конус касательных* с вершиной в точке $M_0$, образующими которого являются касательные к данной (невырожденной) поверхности второго порядка, проходящие через точку $M_0$. Если точка $M_0$ не принадлежит поверхности, то, как можно показать, этот конус касается поверхности по некоторой плоской линии второго порядка. Плоскость, содержащая эту линию, и является полярой точки $M_0$.

Далее, оказывается, что поляры всех точек, принадлежащих некоторой прямой $\lambda$, проходят через вполне определенную прямую $\mu$, называемую *полярой прямой* $\lambda$. При этом полярой прямой $\mu$ оказывается исходная прямая $\lambda$.

***Упражнение.*** Покажите (см. п. 6 § 3 гл. 4), что

*если пучок окружностей изображается в* (*евклидово-проективном*) *пространстве прямой $\lambda$, то сопряженный пучок окружностей изображается полярой прямой $\lambda$ относительно параболоида*

$$X^2 + Y^2 + 2ZT = 0$$

Таким образом, понятие поляры прямой в пространстве обобщает понятие сопряженного пучка окружностей.

## 4. Теорема Безу

Пусть

$$F=0 \quad \text{и} \quad G=0$$

— две линии второго порядка. Отыскание точек пересечения этих линий на аффинной плоскости сводится к решению системы двух уравнений второй степени с двумя неизвестными $x$, $y$. Вообще говоря, такая система имеет четыре решения, так что данные линии пересекаются в четырех точках. Поскольку решения могут оказаться комплексными, мы при этом с неизбежностью должны выйти в вещественно-комплексную плоскость (или просто в комплексную, если мы не хотим ограничиваться вещественными линиями). Однако и в комплексной (аффинной) плоскости число точек пересечения может оказаться меньше четырех (например, пара сопряженных гипербол вообще не имеет общих точек). Суть дела здесь в том, что точки пересечения «могут уходить в бесконечность». Это показывает, что для того, чтобы добиться «правильного» числа точек пересечения, необходимо перейти в аффинно-проективную (или просто проективную) плоскость.

Все это объясняет, почему мы будем рассматривать задачу о точках пересечения двух линий второго порядка *на аффинно-проективной вещественно-комплексной плоскости*. Конечно, все результаты будут справедливы (с соответствующими упрощениями) и для линий второго порядка на проективной, или комплексной, плоскости.

Однако и в аффинно-проективной вещественно-комплексной плоскости число точек пересечения двух линий второго порядка может оказаться меньшим четырех (примером является та же пара сопряженных гипербол, имеющих только две общие точки — несобственные точки их общих асимптот). Здесь уже дело в том, что некоторые точки пересечения (аналогично корням алгебраических уравнений) могут иметь кратность и такие точки нужно считать столько раз, какова их кратность.

Оказывается, что для двух алгебраических линий можно так определить кратность точки их пересечения (собственной или несобственной, вещественной или мнимой), что будет справедлива следующая теорема:

***Теорема Безу.*** *Число точек пересечения двух алгебраических линий соответственно порядков $m$ и $n$ либо бесконечно (и в этом случае данные линии имеют общую часть, также являющуюся алгебраической линией*[1]*), либо это число, подсчитанное с учетом кратностей всех точек (иными словами — сумма кратностей всех общих точек наших линий), равно $mn$.*

---

[1]) Порядка, не превосходящего меньшего из чисел $m$ и $n$.

В частности,

*число точек пересечения произвольной прямой с данной алгебраической линией (не содержащей этой прямой) равно порядку этой линии.*

Таким образом, теорема Безу позволяет, в частности, дать *геометрическую характеристику понятия порядка алгебраической линии.*

Для линии второго порядка мы получаем из теоремы Безу правильное число точек их пересечения (четыре).

Доказать теорему Безу не очень сложно после того, как дано определение кратности точки пересечения. Однако дать такое определение, пригодное во всех случаях, оказывается очень деликатной и трудной задачей[1]). Мы ограничимся здесь тем, что определим кратности точек пересечения *только для линий порядка не выше второго* (и докажем в этом случае теорему Безу).

В первую очередь мы рассмотрим случай, когда одна из рассматриваемых линий является прямой.

Если и вторая линия является прямой, то никакой проблемы нет: кратность точки пересечения двух (различных) прямых по определению считается равной единице. Теорема Безу при этом, конечно, автоматически справедлива (на аффинно-проективной плоскости).

Кратности точек пересечения прямой и линии второго порядка мы уже определили в п. 2 (определение 1). Ясно, что согласно этому определению теорема Безу справедлива и в этом случае (число точек пересечения, с учетом кратности, всегда равно двум).

Рассмотрим теперь точки пересечения двух вырожденных линий второго порядка:

$$f_1g_1 = 0 \quad \text{и} \quad f_2g_2 = 0,$$

т. е. линий, распадающихся в пары прямых

$$f_1 = 0, \quad g_1 = 0 \tag{1}$$

и

$$f_2 = 0, \quad g_2 = 0. \tag{2}$$

Мы будем предполагать, что *эти линии не имеют общей прямой*, т. е. что ни одна из прямых (1) не совпадает ни с одной из прямых (2).

Тогда возможны следующие четыре случая:

Случай 1. *Никакие три из прямых* (1) *и* (2) *не имеют общей точки.*

[1]) Ее решение использует, в частности, известное из алгебры понятие результанта двух многочленов.

Тогда они пересекаются в четырех различных точках. Мы, по определению, будем считать эти точки *простыми* точками пересечения.

Случай 2. *Три и только три из прямых* (1) *и* (2) *имеют общую точку* $M_0$.

Пусть, для определенности, эта точка принадлежит прямым $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $g_1 = 0$ (и потому является двойной точкой линии $f_1 g_1 = 0$). Тогда прямая $g_1 = 0$ пересекает кривую $f_2 g_2 = 0$ в двух различных точках. Эти точки мы, по определению, будем считать *простыми* точками пересечения данных линий второго порядка, а точку $M_0$ — их *двойной* точкой пересечения.

Случай 3. *Одна из данных линий (скажем, первая) является двойной прямой и эта прямая не проходит через двойную точку другой линии.*

В этом случае наши линии пересекаются в двух точках (каждая из которых является двойной точкой первой линии). Мы, по определению, будем считать эти точки *двойными* точками пересечения.

Случай 4. *Все четыре прямые* (1) *и* (2) *проходят через одну точку.*

Тогда эта точка является единственной точкой пересечения данных кривых (и на каждой из них является двойной точкой). Мы, по определению, будем считать ее точкой пересечения *кратности* 4.

Мы видим, что в каждом из этих четырех случаев теорема Безу справедлива (общее число точек пересечения с учетом кратности всегда равно четырем).

Сопоставим каждой точке первой кривой число $p = 1$, если эта точка — простая, и число $p = 2$, если эта точка — двойная. Аналогично, любой точке второй кривой сопоставим число $q = 1$, если эта точка — простая, и число $q = 2$, если эта точка — двойная.

Тогда все четыре случая можно объединить следующим общим определением:

***Определение 1.*** *Кратностью* произвольной точки пересечения двух вырожденных линий второго порядка называется произведение $pq$.

Для точек пересечения вырожденной и невырожденной линий второго порядка дело обстоит сложнее.

Пусть

$$fg = 0$$

— произвольная вырожденная линия второго порядка, и пусть

$$F = 0$$

— произвольная невырожденная линия второго порядка.

Возможны следующие шесть случаев:

Случай 1. *Общая точка $M_0$ прямых $f = 0$ и $g = 0$ не принадлежит линии $F = 0$ и ни одна из прямых $f = 0$ и $g = 0$ не касается линии $F = 0$.*

В этом случае имеется четыре точки пересечения, все, по определению, *простые.*

Случай 2. *Точка $M_0$ не принадлежит линии $F = 0$, но одна (и только одна) из прямых $f = 0$ и $g = 0$ касается линии $F = 0$.*

В этом случае имеется три точки пересечения: две *простые* и одна *двойная* (точка касания).

Случай 3. *Точка $M_0$ не принадлежит линии $F = 0$ и обе прямые $f = 0$ и $g = 0$ касаются линии $F = 0$.*

Имеется только две точки пересечения, обе, по определению, *двойные.*

Случай 4. *Точка $M_0$ принадлежит линии $F = 0$, но прямые $f = 0$ и $g = 0$ не касаются линии $F = 0$ в этой точке.*

В этом случае каждая из прямых $f = 0$ и $g = 0$ пересекает линию $F = 0$ еще в одной точке. Эти точки, по определению, считаются *простыми* точками пересечения обеих линий второго порядка, а точка $M_0$ — их *двойной* точкой пересечения.

Случай 5. *Одна (и только одна) из прямых $f = 0$ и $g = 0$ касается линии $F = 0$ в точке $M_0$.*

Тогда другая прямая пересекает линию $F = 0$ еще в одной точке. Эта точка, по определению, считается *простой* точкой пересечения, а точка $M_0$ — *тройной* точкой пересечения (*кратности* 3).

Случай 6. *Обе прямые $f = 0$ и $g = 0$ касаются линии $F = 0$ в точке $M_0$ (и, следовательно, совпадают).*

В этом случае никаких других точек пересечения нет и точка $M_0$, по определению, считается точкой пересечения *кратности* 4.

Снова теорема Безу во всех случаях автоматически выполнена.

Условно считая, что точка, не являющаяся общей точкой двух кривых второго порядка, является их точкой пересечения *нулевой кратности*, мы можем все шесть случаев объединить в следующей формулировке:

***Определение 2.*** Пусть $p$ — кратность точки $M$ как точки пересечения прямой $f = 0$ и линии $F = 0$, и пусть $q$ — кратность точки $M$ как точки пересечения прямой $g = 0$ и линии $F = 0$. Тогда *кратностью* точки $M$ как точки пересечения линий $fg = 0$ и $F = 0$ называется сумма $p + q$.

Определим теперь кратности точек пересечения двух невырожденных линий второго порядка

$$F = 0, \quad G = 0. \tag{3}$$

Случай 1. *В точке пересечения $M_0$ данные линии имеют различные касательные.*

В этом случае мы, по определению, будем считать точку $M_0$ *простой* точкой пересечения.

Пусть линии $F=0$ и $G=0$ имеют в точке $M_0$ совпадающие касательные.

***Лемма 1.*** *Линии* (3) *тогда и только тогда имеют общую касательную в их точке пересечения $M_0$, когда существуют такие числа $\mu_0$ и $\nu_0$ (не равные одновременно нулю), что линия второго порядка*

$$\overset{\circ}{H} \equiv \mu_0 F + \nu_0 G = 0 \tag{4}$$

*имеет точку $M_0$ своей двойной точкой.*

*Этим условием линия $\overset{\circ}{H}=0$ однозначно определена.*

Доказательство. Если касательные к линиям (3) в точке $M_0$ совпадают, то

$$\frac{F_1(M_0)}{G_1(M_0)} = \frac{F_2(M_0)}{G_2(M_0)} = \frac{F_3(M_0)}{G_3(M_0)} \tag{5}$$

(см. в п. 2 уравнение касательной (8)), и потому существуют такие числа $\mu_0$ и $\nu_0$ (одновременно не равные нулю), что

$$\begin{aligned} &\mu_0 F_1(M_0) + \nu_0 G_1(M_0) = 0, \\ &\mu_0 F_2(M_0) + \nu_0 G_2(M_0) = 0, \\ &\mu_0 F_3(M_0) + \nu_0 G_3(M_0) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда для линии $\overset{\circ}{H}=0$ будут иметь место равенства

$$\overset{\circ}{H}_1(M_0) = \overset{\circ}{H}_2(M_0) = \overset{\circ}{H}_3(M_0) = 0, \tag{7}$$

т. е. точка $M_0$ будет двойной точкой этой линии.

Обратно, если линия вида (4) с двойной точкой $M_0$ существует, то имеют место равенства (7), т. е. равенства (6), означающие справедливость пропорции (5). Поэтому касательные к линиям (3) в точке $M_0$ совпадают.

Наконец, ясно, что поскольку точка $M_0$ не является двойной точкой линий $F=0$ и $G=0$ (по условию, эти линии вообще не имеют двойных точек), соотношения (6) однозначно определяют отношение $\mu_0:\nu_0$, а значит, и линию (4).

Поскольку линия $\overset{\circ}{H}=0$ обладает двойной точкой $M_0$, она распадается в пару прямых, пересекающихся в точке $M_0$.

Случай 2. *Ни одна из прямых, составляющих линию $\overset{\circ}{H}=0$, не касается в точке $M_0$ линий $F=0$ и $G=0$ (т. е. не совпадает с их общей касательной).*

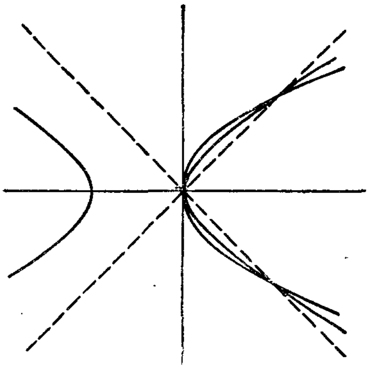
В этом случае, мы, по определению, будем считать точку $M_0$ *двойной* точкой пересечения линий $F=0$ и $G=0$.

Случай 3. *Одна и только одна прямая из прямых, составляющих линию $\overset{\circ}{H}=0$, совпадает с общей касательной линий $F=0$ и $G=0$.*

В этом случае мы, по определению, будем считать точку $M_0$ *тройной* точкой пересечения линий $F=0$ и $G=0$.

Случай 4. *Обе прямые, составляющие линию $\overset{\circ}{H} = 0$, совпадают с общей касательной линий $F = 0$ и $G = 0$.*

В этом случае мы, по определению, будем считать точку $M_0$ точкой пересечения кратности 4.



Например, парабола

$$Y^2 - 2XZ = 0$$

и гипербола

$$X^2 - 2Y^2 + 2XZ = 0$$

имеют в собственной точке $(0:0:1)$ общую касательную

$$X = 0.$$

Кривая $\overset{\circ}{H} = 0$ имеет вид

$$(Y^2 - 2XZ) + (X^2 - 2Y^2 + 2XZ) = 0,$$

т. е. вид

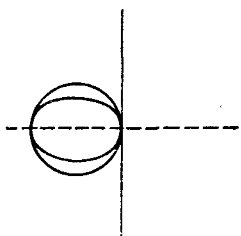
$$X^2 - Y^2 = 0,$$

и потому является парой прямых

$$X + Y = 0 \quad \text{и} \quad X - Y = 0.$$

Поскольку эти прямые отличны от общей касательной $X = 0$, точка $(0:0:1)$ является двойной точкой пересечения.

Аналогично, два эллипса



$$X^2 + Y^2 + 2XZ = 0$$

и

$$X^2 + 2Y^2 + 2XZ = 0$$

имеют в точке $(0:0:1)$ общую касательную

$$X = 0.$$

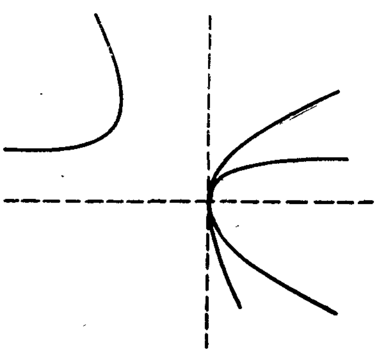
Кривая $\overset{\circ}{H} = 0$ теперь имеет вид

$$(X^2 + Y^2 + 2XZ) - (X^2 + 2Y^2 + 2XZ) = 0,$$

т. е. вид

$$Y^2 = 0,$$

и потому является двойной прямой $Y = 0$. Поскольку эта прямая не совпадает с касательной $X = 0$, точка $(0:0:1)$ также является двойной точкой пересечения.



Парабола

$$Y^2 - 2XZ = 0$$

и гипербола

$$2XY + Y^2 - 2XZ = 0$$

также имеют в точке $(0:0:1)$ общую касательную

$$X = 0.$$

Но кривая $\overset{\circ}{H} = 0$ для них имеет вид

$$(Y^2 - 2XZ) - (2XY + Y^2 - 2XZ) = 0$$

или

$$XY = 0,$$

т. е. представляет собой пару различных прямых, одной из которых является прямая $X = 0$, а потому точка $(0:0:1)$ является тройной точкой пересечения.

Наконец, эллипс

$$X^2 + Y^2 - 2XZ = 0$$

и парабола

$$Y^2 - 2XZ = 0$$

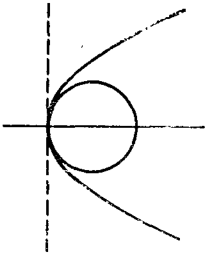
обладают в точке $(0:0:1)$ общей касательной

$$X = 0;$$

эта точка является их точкой пересечения кратности 4, поскольку соответствующая кривая $\overset{\circ}{H} = 0$ имеет вид

$$(X^2 + Y^2 - 2XZ) - (Y^2 - 2XZ) = 0$$

и потому является дважды взятой общей касательной $X = 0$.



Сравнивая изложенные определения с определением 2, мы немедленно получаем, что в каждом из случаев 2—4 кратность точки $M_0$ как точки пересечения линий $F = 0$ и $G = 0$ равна ее кратности как точки пересечения линий $F = 0$ и $\overset{\circ}{H} = 0$ (или, что то же самое, — линий $G = 0$ и $\overset{\circ}{H} = 0$). Поэтому все сказанное можно объединить в следующем общем определении:

***Определение 3.*** Пусть для общей точки $M_0$ двух невырожденных линий второго порядка $F = 0$ и $G = 0$ существует линия $\overset{\circ}{H} = 0$ вида (4), имеющая точку $M_0$ своей двойной точкой. Тогда *кратностью* точки $M_0$ как точки пересечения линий $F = 0$ и $G = 0$ называется ее кратность как точки пересечения линий $F = 0$ и $\overset{\circ}{H} = 0$ (см. определение 2). Если такой линии $\overset{\circ}{H} = 0$ не существует, точка $M_0$, по определению, считается *простой* точкой пересечения (кратности 1).

Докажем теперь для линий (3) теорему Безу. Для этого нам понадобятся три вспомогательные леммы.

***Лемма 2.*** *Если линии $F = 0$ и $G = 0$ имеют в их общей точке $M_0$ общую касательную, то эта касательная будет касательной в точке $M_0$ и для любой линии вида*

$$H \equiv \mu F + \nu G = 0,$$

*где $\mu$ и $\nu$ — произвольные числа, не равные одновременно нулю.*

Доказательство. Тот факт, что линии $F = 0$ и $G = 0$ имеют в точке $M_0$ общую касательную, означает (см. доказательство леммы 1), что имеет место пропорция

$$\frac{F_1(M_0)}{G_1(M_0)} = \frac{F_2(M_0)}{G_2(M_0)} = \frac{F_3(M_0)}{G_3(M_0)}.$$

Но тогда ясно, что для любых $\mu$ и $\nu$ будет иметь место и пропорция

$$\frac{H_1(M_0)}{G_1(M_0)} = \frac{H_2(M_0)}{G_2(M_0)} = \frac{H_3(M_0)}{G_3(M_0)}$$

(ибо, например, $H_1 = \mu F_1 + \nu G_1$).

*Лемма 3. Кратность точки пересечения $M_0$ любых двух невырожденных линий второго порядка $F=0$ и $G=0$ равна ее кратности и как точки пересечения линии $F=0$ и любой линии вида*

$$H \equiv \mu F + \nu G = 0,$$

*где $\mu$ и $\nu$ — произвольные числа (причем $\nu \neq 0$).*

Доказательство. Пусть $M_0$ является простой точкой пересечения, т. е. пусть касательные к линиям $F=0$ и $G=0$ в точке $M_0$ различны. Применим лемму 2 к линиям $F=0$ и $H=0$. Так как

$$G = -\frac{\mu}{\nu}F + \frac{1}{\nu}H$$

(напомним, что, по условию, $\nu \neq 0$), то согласно этой лемме касательные к линиям $F=0$ и $H=0$ различны. Поэтому точка $M_0$ является их простой точкой пересечения.

Пусть кратность точки пересечения $M_0$ больше единицы. Тогда эта кратность, по определению, равна ее кратности как точки пересечения линий $F=0$ и $\overset{\circ}{H}=0$, где $\overset{\circ}{H}=0$ — линия вида (4), являющаяся парой прямых. Но ясно (в силу единственности линии $\overset{\circ}{H}=0$), что если мы составим аналогичную линию для линий $F=0$ и $H=0$ (напомним, что согласно лемме 2 эти линии также имеют в точке $M_0$ общую касательную), то она совпадет с линией $\overset{\circ}{H}=0$. Поэтому кратность точки $M_0$ как точки пересечения линий $F=0$ и $H=0$ и в этом случае равна ее кратности как точки пересечения линий $F=0$ и $G=0$.

*Лемма 4. Для любых двух линий второго порядка $F=0$ и $G=0$ существуют такие числа $\mu$ и $\nu$ (не равные одновременно нулю), что линия*

$$H \equiv \mu F + \nu G = 0 \tag{8}$$

*вырождена (является парой прямых).*

Доказательство. Пусть

$$F(X, Y, Z) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + a_{33}Z^2,$$
$$G(X, Y, Z) = b_{11}X^2 + 2b_{12}XY + b_{22}Y^2 + 2b_{13}XZ + 2b_{23}YZ + b_{33}Z^2.$$

Тогда условие вырожденности линии

$$\mu F + \nu G = 0$$

имеет вид

$$\begin{vmatrix} \mu a_{11} + \nu b_{11} & \mu a_{12} + \nu b_{12} & \mu a_{13} + \nu b_{13} \\ \mu a_{21} + \nu b_{21} & \mu a_{22} + \nu b_{22} & \mu a_{23} + \nu b_{23} \\ \mu a_{31} + \nu b_{31} & \mu a_{32} + \nu b_{32} & \mu a_{33} + \nu b_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Это уравнение (относительно $\mu:\nu$) либо удовлетворяется тождественно, либо имеет три (возможно, совпадающих) корня, каждый из которых отвечает некоторой вырожденной линии вида (8).

В случае комплексной плоскости этим все доказано. В случае вещественно-комплексной плоскости достаточно заметить, что уравнение (9), являясь (для вещественных линий $F=0$ и $G=0$) уравнением третьей степени с вещественными коэффициентами, обязательно имеет вещественный корень.

Теперь у нас уже все готово для доказательства теоремы Безу (в оставшемся случае, когда линии $F=0$ и $G=0$ невырождены). Действительно, для этих линий согласно лемме 4 существует вырожденная линия $H=0$ вида (8), а согласно лемме 3 кратность любой точки пересечения линий $F=0$ и $G=0$ равна ее кратности как точки пересечения линий $F=0$ и $H=0$. Поэтому сумма кратностей всех точек пересечения линий $F=0$ и $G=0$ равна сумме кратностей всех точек пересечения линий $F=0$ и $H=0$. Но, поскольку линия $H=0$ вырождена, последняя сумма, как мы знаем, равна четырем.

Тем самым теорема Безу (для линий второго порядка) полностью доказана.

Легко видеть, что

*если вещественные линии $F=0$ и $G=0$ (на вещественно-комплексной плоскости) имеют две мнимые (комплексно-сопряженные) точки пересечения, то кратности этих точек совпадают.*

***Задание.*** Докажите это утверждение.

Отсюда (и из теоремы Безу) вытекает, что

*любая мнимая точка пересечения двух (вещественных) линий второго порядка (на вещественно-комплексной плоскости) является либо простой, либо двойной точкой пересечения (в последнем случае линии пересекаются только в двух точках: в данной и в комплексно-сопряженной).*

### Дополнение. Дифференциально-геометрическое истолкование кратности точки пресечения

Для читателей, знакомых с основными понятиями дифференциального исчисления, мы напомним, что для любой линии вида

$$y = f(x)$$

ее касательная в точке $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ имеет уравнение

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Если функция $y = f(x)$ задана неявным уравнением

$$F(x, y) = 0,$$

то по правилу дифференцирования неявной функции $y' = -\frac{F_x}{F_y}$, и потому уравнение касательной может быть переписано в виде

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Для линии второго порядка

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

это вполне согласуется с полученными выше результатами, поскольку уравнение касательной (уравнение (8) п. 2) в неоднородных координатах

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}$$

имеет вид

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})\,x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})\,y + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}) = 0$$

и, очевидно, равносильно уравнению

$$2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})(x - x_0) + 2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})(y - y_0) = 0.$$

По определению, две линии

$$y = f(x), \quad y = g(x),$$

проходящие через точку $(x_0, y_0)$, *касаются* друг друга в этой точке, если их касательные совпадают, т. е. если

$$f'(x_0) = g'(x_0).$$

Поэтому линии

$$F(x, y) = 0, \quad G(x, y) = 0,$$

заданные неявными уравнениями, касаются друг друга в точке $(x_0, y_0)$, если

$$\frac{F_x(x_0, y_0)}{G_x(x_0, y_0)} = \frac{F_y(x_0, y_0)}{G_y(x_0, y_0)}.$$

Линии

$$y = f(x), \quad y = g(x)$$

называются *соприкасающимися* (в точке $(x_0, y_0)$), если они касаются и, кроме того,

$$f''(x_0) = g''(x_0).$$

По правилу дифференцирования неявных функций вторая производная $f''(x)$ функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением

$$F(x, y) = 0,$$

выражается формулой

$$f''(x) = -\frac{F_{xx}(F_y)^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}(F_x)^2}{F_y^3}.$$

Поэтому, полагая

$$l = F_y(x_0, y_0), \quad m = -F_x(x_0, y_0), \quad k = \frac{F_y(x_0, y_0)}{G_y(x_0, y_0)},$$

мы можем для функций, заданных неявно, условие $f''(x_0) = g''(x_0)$ записать (при выполнении условия $f'(x_0) = g'(x_0)$, т. е. при $F_x(x_0, y_0) = kG_x(x_0, y_0)$) в следующем виде:

$$\mathring{H}_{xx}(x_0, y_0)\,l^2 + 2\mathring{H}_{xy}(x_0, y_0)\,lm + \mathring{H}_{yy}(x_0, y_0)\,m^2 = 0,$$

где

$$\overset{\circ}{H} = F - kG.$$

При

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$
$$G(x, y) = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33}$$

условие соприкасания приобретает вид

$$(a_{11} - kb_{11})\,l^2 + 2(a_{12} - kb_{12})\,lm + (a_{22} - kb_{22})\,m^2 = 0,$$

а это означает, что направление $l : m$ является асимптотическим для линии $\overset{\circ}{H} = 0$. Таким образом, мы установили, что линии второго порядка $F = 0$ и $G = 0$, имеющие в точке $(x_0, y_0)$ общую касательную, направление которой характеризуется отношением $l : m$, тогда и только тогда соприкасаются в этой точке, когда линия второго порядка $\overset{\circ}{H} = 0$ содержит несобственную точку $(l : m : 0)$.

Но ясно, что линия $\overset{\circ}{H} = 0$ как раз и является указанной в лемме 1 линией $\overset{\circ}{H} = 0$, имеющей в точке пересечения двойную точку. С другой стороны, мы знаем, что если некоторая прямая проходит через двойную точку линии второго порядка и еще через одну ее точку, то эта прямая целиком содержится в линии. Поэтому утверждение, что линия $\overset{\circ}{H} = 0$ содержит несобственную точку $(l : m : 0)$ касательной, равносильно утверждению, что эта касательная целиком принадлежит линии $\overset{\circ}{H} = 0$.

Сопоставляя все эти обстоятельства, мы немедленно получаем, что *собственная точка пересечения двух (вещественных) линий второго порядка является*

а) *простой точкой пересечения, если линии в этой точке не касаются;*

б) *двойной точкой пересечения, если линии в этой точке касаются, но не соприкасаются;*

в) *точкой пересечения кратности* 3 *или* 4, *если линии в этой точке соприкасаются.*

Вычисляя третьи производные, можно аналогичным образом различить точки пересечения кратности 3 и 4.

***Упражнение.*** Докажите, что для точки пересечения кратности 3 производные $f'''(x_0)$ и $g'''(x_0)$ различны, а для точки пересечения кратности 4 они совпадают.

## § 3. ГЕОМЕТРИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

### 1. Пучки линий второго порядка

***Определение 1.*** Пусть

$$F = 0 \quad \text{и} \quad G = 0$$

—две различные линии второго порядка. *Пучком линий второго порядка* называется множество всех линий вида

$$\mu F + \nu G = 0, \tag{1}$$

где $\mu$ и $\nu$ — произвольные числа, одновременно не равные нулю.