где

$$\overset{\circ}{H} = F - kG.$$

При

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$
$$G(x, y) = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33}$$

условие соприкасания приобретает вид

$$(a_{11} - kb_{11})l^2 + 2(a_{12} - kb_{12})lm + (a_{22} - kb_{22})m^2 = 0,$$

а это означает, что направление $l : m$ является асимптотическим для линии $\overset{\circ}{H} = 0$. Таким образом, мы установили, что линии второго порядка $F = 0$ и $G = 0$, имеющие в точке (x_0, y_0) общую касательную, направление которой характеризуется отношением $l : m$, тогда и только тогда соприкасаются в этой точке, когда линия второго порядка $\overset{\circ}{H} = 0$ содержит несобственную точку $(l : m : 0)$.

Но ясно, что линия $\overset{\circ}{H} = 0$ как раз и является указанной в лемме 1 линией $\overset{\circ}{H} = 0$, имеющей в точке пересечения двойную точку. С другой стороны, мы знаем, что если некоторая прямая проходит через двойную точку линии второго порядка и еще через одну ее точку, то эта прямая целиком содержится в линии. Поэтому утверждение, что линия $\overset{\circ}{H} = 0$ содержит несобственную точку $(l : m : 0)$ касательной, равносильно утверждению, что эта касательная целиком принадлежит линии $\overset{\circ}{H} = 0$.

Сопоставляя все эти обстоятельства, мы немедленно получаем, что *собственная точка пересечения двух (вещественных) линий второго порядка является*

а) *простой точкой пересечения, если линии в этой точке не касаются*;

б) *двойной точкой пересечения, если линии в этой точке касаются, но не соприкасаются*;

в) *точкой пересечения кратности* 3 *или* 4, *если линии в этой точке соприкасаются.*

Вычисляя третьи производные, можно аналогичным образом различить точки пересечения кратности 3 и 4.

Упражнение. Докажите, что для точки пересечения кратности 3 производные $f'''(x_0)$ и $g'''(x_0)$ различны, а для точки пересечения кратности 4 они совпадают.

§ 3. ГЕОМЕТРИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Пучки линий второго порядка

Определение 1. Пусть

$$F = 0 \quad \text{и} \quad G = 0$$

—две различные линии второго порядка. *Пучком линий второго порядка* называется множество всех линий вида

$$\mu F + \nu G = 0, \qquad (1)$$

где μ и ν — произвольные числа, одновременно не равные нулю.

Замечание 1. Это определение пригодно в любой плоскости (аффинной, аффинно-проективной или проективной, вещественной, вещественно-комплексной, комплексной или над любым полем). В дальнейшем мы, как правило, будем предполагать плоскость аффинно-проективной и вещественно-комплексной (а все линии — вещественными). Конечно, все результаты будут справедливы (с соответствующими упрощениями) и на проективной или комплексной плоскости.

Замечание 2. Линия второго порядка полностью определена (в данной системе координат) шестью коэффициентами a_{ij} ее уравнения и, обратно, однозначно (с точностью до пропорциональности) их определяет (теорема единственности). Следовательно, эти коэффициенты можно рассматривать как *однородные координаты линии* (ср. определение 1 п. 1 § 1 гл. 4). Однако шесть однородных координат определяют точки «пятимерного» пространства. Поскольку концепцией многомерных пространств мы еще не владеем, возникающим отсюда изображением линий второго порядка как точек пятимерного (проективного) пространства мы пользоваться не можем. Наоборот, геометрию линий второго порядка мы можем истолковать как конкретное воплощение абстрактной пятимерной геометрии.

В частности, пучки линий второго порядка являются, с этой точки зрения, не чем иным, как *прямыми в пятимерном пространстве.*

Подобно точкам (проективной) прямой каждая линия пучка определяется отношением $\mu:\nu$. При $\mu:\nu=1:0$ получается линия $F=0$, а при $\mu:\nu=0:1$ — линия $G=0$.

Ясно, что (подобно прямой) *пучок однозначно определяется любыми двумя (различными) линиями, ему принадлежащими.*

Если $F(M_0)=0$ и $G(M_0)=0$, то

$$\mu F(M_0)+\nu G(M_0)=0.$$

Это показывает, что

любая линия пучка $\mu F+\nu G=0$ *проходит через каждую точку пересечения линий* $F=0$ *и* $G=0$.

Рассмотрим, например, случай, когда линии $F=0$ и $G=0$ имеют общую прямую $h=0$ (здесь h — сокращенное обозначение для левой части $Ax+By+C$ уравнения прямой). В этом случае обе линии $F=0$ и $G=0$ являются вырожденными линиями, т. е. распадаются в пару прямых. Пусть

$$h=0,\quad f=0$$

— прямые, составляющие линию $F=0$, а

$$h=0,\quad g=0$$

— прямые, составляющие линию $G=0$. Без ограничения общности мы можем, очевидно, считать, что

$$F=fh,\quad G=gh.$$

Поэтому уравнение любой линии пучка $\mu F+\nu G=0$ имеет вид

$$(\mu f+\nu g)\,h=0,$$

и потому эта линия также является вырожденной линией, состоящей из прямой $h=0$ и некоторой прямой $\mu f+\nu g=0$, принадлежащей пучку прямых, определенному прямыми $f=0$ и $g=0$.

Определение 2. Пучок линий второго порядка, получающийся из некоторого пучка прямых присоединением к каждой прямой пучка одной и той же прямой, называется *вырожденным.*

При выбранной дополнительной прямой $h=0$ вырожденные пучки находятся в биективном соответствии с пучками прямых.

Ясно, что точки пересечения любой пары линий невырожденного пучка — одни и те же для всех пар.

Определение 3. Общие точки всех линий невырожденного пучка называются *фундаментальными точками* этого пучка.

Ряд элементарных свойств (невырожденных) пучков мы уже фактически установили в леммах п. 4 § 2. Например, согласно лемме 3 п. 4 § 2,

кратность точки пересечения любой пары линий пучка — одна и та же для всех пар.

Определение 4. *Кратностью* фундаментальной точки пучка называется ее кратность как точки пересечения любой пары линий пучка.

Согласно только что сказанному, это определение корректно.

В силу теоремы Безу сумма кратностей всех фундаментальных точек пучка равна четырем. Поэтому возможны следующие типы пучков:

а) пучки с четырьмя простыми фундаментальными точками;

б) пучки с тремя фундаментальными точками — одной двойной и двумя простыми;

в) пучки с двумя двойными фундаментальными точками;

г) пучки с двумя фундаментальными точками — одной тройной и одной простой;

д) пучки с одной фундаментальной точкой кратности 4.

Определение 5. Пучки а) мы будем называть пучками *типа* [1111] (или пучками *общего типа*), пучки б) — пучками *типа* [211], пучки в) — пучками *типа* [22], пучки г) — пучками *типа* [31] и, наконец, пучки д) — пучками *типа* [4].

Согласно лемме 2 п. 4,

если две линии пучка имеют в некоторой (фундаментальной) точке общую касательную, то эта касательная является касательной (в той же точке) и любой другой линии пучка.

Определение 6. Общие касательные всех линий невырожденного пучка называются *фундаментальными прямыми* этого пучка.

Фундаментальные точки и фундаментальные прямые пучков не могут быть выбраны совершенно произвольно. Простое необходимое условие указывает следующее

Предложение 1. *Никакие три фундаментальные точки невырожденного пучка не коллинеарны. Никакая фундаментальная прямая не содержит двух фундаментальных точек.*

Доказательство. Прямая, проходящая через три (с учетом кратностей) фундаментальные точки, пересекаясь с любой линией пучка по трем точкам, должна этой линии принадлежать. Таким образом, все линии пучка содержат одну и ту же прямую, т. е. пучок является, вопреки предположению, вырожденным пучком.

Пучок общего типа не имеет фундаментальных прямых, пучок типа [211] имеет одну фундаментальную прямую (проходящую через двойную фундаментальную точку и не содержащую простых), пучок типа [22] имеет две (различные) фундаментальные прямые, и, наконец, пучок типа [31] имеет одну фундаментальную прямую (проходящую через тройную точку).

Что же касается пучков типа [4] то, как мы увидим ниже, они имеют либо одну фундаментальную прямую, либо любая прямая, проходящая через фундаментальную точку, является фундаментальной прямой.

Все сказанное выше с равным правом применимо как к комплексной, так и к вещественно-комплексной плоскостям. Рассмотрим теперь свойства пучков, имеющие место только в вещественно-комплексной плоскости (проективной или аффинно-проективной).

Определение 7. Пучок линий второго порядка на вещественно-комплексной плоскости называется *вещественным*, если он содержит по крайней мере две (а потому и бесконечно много) различных вещественных кривых.

Вещественные пучки общего типа (типа [1111]) распадаются на следующие классы:

а) класс пучков, все фундаментальные точки которых вещественны;

б) класс пучков, две фундаментальные точки которых вещественны, а другие две — мнимые комплексно-сопряженные;

в) класс пучков, все фундаментальные точки которых мнимы (и попарно комплексно-сопряжены).

Вещественные пучки типа [211] распадаются на два класса:

а) класс пучков, все фундаментальные точки которых вещественны;

б) класс пучков, простые фундаментальные точки которых — мнимые комплексно-сопряженные.

Заметим, что двойная фундаментальная точка вещественного пучка типа [211] всегда вещественна. Вещественна и его фундаментальная прямая.

Вещественные пучки типа [22] также распадаются на два класса:

а) класс пучков, обе фундаментальные точки которых вещественны;

б) класс пучков, фундаментальные точки которых комплексно-сопряжены.

В случае а) фундаментальные прямые вещественны, а в случае б) — комплексно-сопряжены.

Вещественные пучки типов [31] и [4] имеют только вещественные фундаментальные точки и прямые.

Предложение 2. *В произвольном пучке*

$$\mu F + \nu G = 0$$

линий второго порядка для любой точки M_0 плоскости, отличной от фундаментальных точек пучка, существует единственная линия

$$H \equiv \mu_0 F + \nu_0 G = 0,$$

проходящая через точку M_0.

Если пучок и точка вещественны, то линия $H = 0$ также вещественна.

Доказательство. Условие $H(M_0) = 0$ означает, что

$$\mu_0 F(M_0) + \nu_0 G(M_0) = 0.$$

Поскольку хотя бы одно из чисел $F(M_0)$ и $G(M_0)$ отлично от нуля (точка M_0 не фундаментальна), это соотношение однозначно определяет отношение $\mu_0 : \nu_0$, т. е. однозначно определяет линию $H = 0$. Если числа $F(M_0)$ и $G(M_0)$ вещественны, то отношение $\mu_0 : \nu_0$ также вещественно.

2. Описание пучков линий второго порядка

Теорема 1. *Каждый пучок общего типа* [1111] *состоит из всех линий второго порядка, проходящих через его фундаментальные точки.*

Доказательство. Пусть $F = 0$ — произвольная линия второго порядка, проходящая через фундаментальные точки M_1, M_2, M_3, M_4 данного пучка, и пусть M_0 — произвольная точка этой линии, отличная от точек M_1, M_2, M_3, M_4. Согласно предложению 2 п. 1, в пучке существует линия $H = 0$, проходящая через точку M_0. Линии $F = 0$ и $H = 0$ имеют, таким образом, пять общих точек, что согласно теореме Безу возможно тогда и только тогда, когда эти линии либо совпадают (и в этом случае все доказано), либо имеют общую прямую (и, следовательно, обе являются парами прямых). В последнем случае, мы, без ограничения общности, можем предполагать, что линия $H = 0$ состоит из прямых M_1M_2 и M_3M_4 и что прямая M_1M_2 является общей прямой линий $H = 0$ и $F = 0$. Но тогда линия $F = 0$, состоящая из двух прямых, одной из которых является прямая

M_1M_2, и проходящая через четыре точки M_1, M_2, M_3, M_4, никакие три из которых не коллинеарны (предложение 1 п. 1), обязательно должна содержать прямую M_3M_4. Следовательно, линии $F = 0$ и $H = 0$ совпадают и в этом случае.

Следствие. *Пучок общего типа однозначно определяется его фундаментальными точками.*

Чтобы описать все линии, принадлежащие пучку с фундаментальными точками

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4,$$

рассмотрим прямые M_1M_2, M_3M_4, M_1M_3 и M_2M_4. Пусть

$$f_1 = 0, \quad g_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad g_2 = 0$$

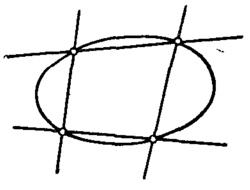
— уравнения этих прямых. Тогда линии второго порядка

$$f_1g_1 = 0 \quad \text{и} \quad f_2g_2 = 0$$

как линии, проходящие через все четыре точки, будут согласно теореме 1 принадлежать рассматриваемому пучку.

Этим доказано следующее

Предложение 1. *Любой пучок общего типа состоит из всех линий второго порядка, имеющих уравнения вида*



$$\mu f_1g_1 + \nu f_2g_2 = 0, \tag{1}$$

где μ и ν — произвольные числа, а

$$f_1 = 0, \quad g_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad g_2 = 0 \tag{2}$$

— уравнения прямых, никакие три из которых не имеют общей точки.

Фундаментальными точками пучка являются точки пересечения прямых $f_1 = 0$, $g_1 = 0$ с прямыми $f_2 = 0$, $g_2 = 0$.

Заметим, что

если пучок (1) — вещественный, то прямые (2) можно выбрать вещественными или комплексно-сопряженными.

Действительно, если все точки M_1, M_2, M_3, M_4 — вещественные, то все прямые (2) также будут вещественными. Если, скажем, точки M_1 и M_2 комплексно-сопряжены (а точки M_3 и M_4 вещественны или комплексно-сопряжены), то прямые $f_1 = 0$ и $g_1 = 0$ будут вещественными, а прямые $f_2 = 0$ и $g_2 = 0$ — комплексно-сопряженными.

Ясно, что формула (1) определяет пучок общего типа для любых точек M_1, M_2, M_3, M_4, никакие три из которых не лежат на одной прямой (причем этот пучок — вещественный тогда и только тогда, когда мнимые из точек M_1, M_2, M_3, M_4 попарно комплексно-сопряжены). Таким образом, *указанное в предложении* 1 п. 1 *необходимое условие для фундаментальных точек является (для пучков общего типа) также и достаточным.*

Пучки типа [211] изучаются совершенно аналогично.

Теорема 2. *Каждый пучок типа* [211] *состоит из всех линий второго порядка, проходящих через его фундаментальные точки и касающихся его фундаментальной прямой.*

Доказательство. Пусть M_1 — двойная фундаментальная точка, а M_2 и M_3 — простые фундаментальные точки, и пусть $h = 0$ — фундаментальная прямая (проходящая через точку M_1 и не проходящая через точки M_2 и M_3). Рассмотрим произвольную линию второго порядка $F = 0$, проходящую через точки M_1, M_2, M_3 и касающуюся (в точке M_1) прямой $h = 0$. Пусть M_0 — произвольная точка линии $F = 0$, отличная от точек M_1, M_2, M_3, и пусть $H = 0$ — линия пучка, проходящая через точку M_0 (предложение 2 п. 1). Линии второго порядка $F = 0$ и $H = 0$ имеют (с учетом кратностей) по крайней мере пять общих точек (двойную точку M_1 и еще три точки M_2, M_3, M_0 неизвестных кратностей); поэтому согласно теореме Безу эти линии либо совпадают (и тогда все доказано), либо имеют общую прямую (и, следовательно, обе являются парами прямых). В последнем случае точка M_1 должна быть единственной двойной точкой линии $H = 0$ (ибо согласно предложению 1 п. 1 точки M_1, M_2, M_3 не коллинеарны), и следовательно, эта линия состоит из различных прямых M_1M_2 и M_1M_3. При этом без ограничения общности мы можем считать, что в состав линии $F = 0$ входит прямая M_1M_2. С другой стороны, поскольку прямая $h = 0$ является, по условию, касательной к линии $F=0$, она должна либо совпадать с прямой M_1M_2, либо точка M_1 должна быть двойной точкой линии $F = 0$. Поскольку первый случай невозможен (фундаментальная прямая $h = 0$ не проходит через фундаментальную точку M_2), остается только второй случай. Но тогда второй прямой, входящей в состав линии $F = 0$, должна быть обязательно прямая M_1M_3. Поэтому и в этом случае линии $F = 0$ и $H = 0$ совпадают.

Следствие. *Пучок типа* [211] *однозначно определяется его фундаментальными точками и фундаментальной прямой.*

Пусть

$$f_1 = 0, \quad g = 0 \quad \text{и} \quad f_2 = 0$$

— уравнения прямых M_1M_2, M_1M_3 и M_2M_3. Тогда линии второго порядка

$$f_1 g = 0 \quad \text{и} \quad f_2 h = 0$$

принадлежат, согласно теореме 2, рассматриваемому пучку.

Этим доказано следующее

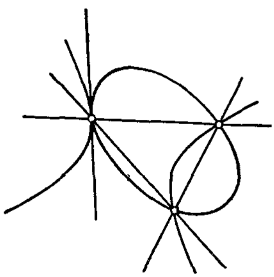
Предложение 2. *Каждый пучок типа* [211] *состоит из всех линий второго порядка, имеющих уравнения вида*

$$\mu f_1 g + \nu f_2 h = 0, \tag{3}$$

где μ и ν — произвольные числа, а

$$f_1 = 0, \quad g = 0, \quad f_2 = 0, \quad h = 0$$

— уравнения таких (различных) прямых, что прямые $f_1 = 0$, $g = 0$ и $h = 0$ проходят через одну точку, через которую не проходит прямая $f_2 = 0$.



Фундаментальными точками пучка являются точки попарного пересечения прямых $f_1 = 0$, $g = 0$ и $f_2 = 0$, а фундаментальной прямой — прямая $h = 0$.

При этом

если пучок (3) — вещественный, то прямые $f_2 = 0$ и $h = 0$ обязательно вещественны, а прямые $f_1 = 0$ и $g = 0$ либо вещественны, либо комплексно-сопряжены.

Действительно, как мы знаем, прямая $h = 0$ и двойная фундаментальная точка M_1 обязательно вещественны, а простые фундаментальные точки M_2 и M_3 либо вещественны, либо комплексно-сопряжены.

Ясно, что формула (3) определяет некоторый пучок типа [211] для любых неколлинеарных точек M_1, M_2, M_3 и любой прямой $h = 0$, проходящей через точку M_1 и не проходящей через точки M_2 и M_3 (причем этот пучок — вещественный тогда и только тогда, когда точка M_1 и прямая $h = 0$ вещественны, а точки M_2 и M_3 либо вещественны, либо комплексно-сопряжены). Таким образом, и *для пучков типа* [211] *необходимые условия из предложения* 1 п. 2 *оказываются достаточными.*

Рассмотрим теперь пучки типа [22].

Теорема 3. *Каждый пучок типа* [22] *состоит из всех линий второго порядка, проходящих через его фундаментальные точки и касающихся в этих точках его фундаментальных прямых.*

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теорем 1 и 2 и потому мы его опустим.

Задание. Докажите теорему 3.

Следствие. *Пучок типа* [22] *однозначно определяется его фундаментальными точками и прямыми.*

Пусть

$$h_1 = 0, \quad h_2 = 0$$

— фундаментальные прямые пучка типа [22] и пусть

$$f = 0$$

— прямая, соединяющая его фундаментальные точки. Поскольку линии второго порядка

$$f^2 = 0 \quad \text{и} \quad h_1 h_2 = 0$$

принадлежат, согласно теореме 3, пучку, справедливо следующее

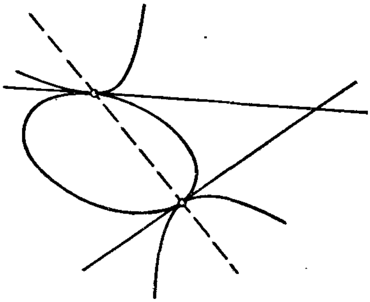
Предложение 3. *Каждый пучок типа* [22] *состоит из всех линий второго порядка, имеющих уравнения вида*

$$\mu f^2 + \nu h_1 h_2 = 0, \qquad (4)$$

где μ *и* ν *— произвольные числа, а*

$$f = 0, \quad h_1 = 0, \quad h_2 = 0 \qquad (5)$$

— уравнения трех прямых, не проходящих через одну точку.



Фундаментальными прямыми этого пучка являются прямые

$$h_1 = 0, \quad h_2 = 0,$$

а фундаментальными точками — точки пересечения этих прямых с прямой $f = 0$.

При этом,

если пучок (4) *— вещественный, то прямая* $f = 0$ *вещественна, а прямые* $h_1 = 0$ *и* $h_2 = 0$ *либо вещественны, либо комплексно-сопряжены.*

Формула (4) определяет, очевидно, некоторый пучок типа [22] для любых прямых (5), не проходящих через одну точку (причем этот пучок — вещественный тогда и только тогда, когда прямая $f = 0$ вещественна, а прямые $h_1 = 0$ и $h_2 = 0$ либо вещественны, либо комплексно-сопряжены). Таким образом, и *для пучков типа* [22] *необходимые условия из предложения* 1 п. 1 *оказываются достаточными.*

Для пучков типа [31] и [4] ситуация значительно сложнее.

Рассмотрим сначала пучки типа [31]. Каждый такой пучок имеет две фундаментальные точки M_1 и M_2 (тройную и простую) и одну фундаментальную прямую $h = 0$, проходящую через тройную точку M_1. Пусть $g = 0$ — прямая M_1M_2 и пусть $f = 0$ — произвольная прямая, проходящая через точку M_2 и отличная от прямой $g = 0$.

Будем пока предполагать, что мы находимся на проективной (вещественно-комплексной или комплексной) плоскости. Тогда без ограничения общности мы можем считать, что прямые $h = 0$, $g = 0$ и $f = 0$ имеют соответственно уравнения

$$X = 0, \quad Y = 0 \quad \text{и} \quad Z = 0.$$

Пусть

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + a_{33}Z^2 = 0$$

— уравнение произвольной линии рассматриваемого пучка в координатах $X : Y : Z$. Так как эта линия проходит через точку

M_1 с координатами $X_1:Y_1:Z_1=0:0:1$, то $a_{33}=0$, а так как она проходит через точку M_2 с координатами $X_2:Y_2:Z_2=1:0:0$, то $a_{11}=0$. Кроме того, эта линия касается, по условию, прямой $X=0$ в точке $M_1(0:0:1)$, откуда непосредственно вытекает (см. уравнение касательной (8) п. 2 § 2), что $a_{23}=0$.

Таким образом, уравнение произвольной линии нашего пучка имеет на самом деле вид

$$2a_{12}XY+a_{22}Y^2+2a_{13}XZ=0.$$

Заметим теперь, что в силу нашего выбора координат принадлежащая пучку линия второго порядка $\overset{\circ}{H}=0$, имеющая в точке M_1 двойную точку (см. лемму 1 п. 4 § 2), задается уравнением $XY=0$. Поэтому наш пучок содержит некоторую линию с уравнением

$$a_{22}Y^2+2a_{13}XZ=0.$$

Легко видеть, что коэффициенты a_{22} и a_{13} этого уравнения отличны от нуля. Действительно, если, например, $a_{13}=0$, то пучок содержит две распадающиеся линии $XY=0$ и $Y^2=0$ с общей прямой $Y=0$ и потому является вырожденным пучком. Аналогично, если $a_{22}=0$, то пучок также содержит две линии $XY=0$ и $XZ=0$ с общей прямой и потому снова является вырожденным пучком.

Следовательно, деля на a_{22} и полагая $p=-\dfrac{a_{13}}{a_{22}}$, мы окончательно получаем, что

рассматриваемый пучок типа [31] *содержит линию вида*

$$Y^2=2pXZ \qquad (6)$$

с $p\neq 0$.

В однородных аффинных координатах линия (6) является параболой. Однако в рассматриваемых сейчас произвольных однородных проективных координатах она может быть любой (невырожденной) линией второго порядка.

Легко видеть, что

двух различных линий вида (6) *данный пучок содержать не может.*

Действительно, в противном случае уравнение любой линии пучка было бы линейной комбинацией двух уравнений вида (6). Но ясно, что уравнение $XY=0$ вырожденной линии пучка получить таким образом невозможно.

Доказанное утверждение означает, что

число p *однозначно определяется пучком* (*при выбранной системе однородных проективных координат*).

Таким образом, мы видим, что в отличие от пучков предыдущих типов,

пучков типа [31] *с данными фундаментальными точками и данной фундаментальной прямой существует целое семейство,* *зависящее от одного параметра p (подчиненного единственному условию: быть не равным нулю).*

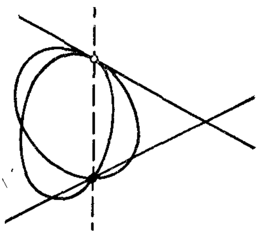
Поскольку пучок содержит линию (6) и линию $XY = 0$, любая принадлежащая ему линия второго порядка имеет уравнение вида

$$\mu XY + \nu (Y^2 - 2pXY) = 0.$$

Возвращаясь к произвольным координатам и учитывая, что прямые $Z = 0$ и $2pZ = 0$ совпадают, мы получаем, таким образом, следующее

Предложение 4. *Каждый пучок типа* [31] *состоит из всех линий второго порядка, имеющих уравнение вида*

$$\mu gh + \nu (g^2 - fh) = 0, \tag{7}$$



где μ и ν — произвольные числа, а

$$f = 0, \quad g = 0, \quad h = 0 \tag{8}$$

— уравнения трех прямых, не проходящих через одну точку.

Фундаментальной прямой этого пучка является прямая

$$h = 0,$$

а фундаментальными точками — точки пересечения прямых $h = 0$ и $f = 0$ с прямой $g = 0$.

При этом,

если пучок (7) — *вещественный, то прямые* (8) *также вещественны.*

Формула (7) определяет, очевидно, некоторый пучок типа [31] для л ю б ы х прямых (8), не проходящих через одну точку (причем этот пучок — вещественный тогда и только тогда, когда все прямые (8) вещественны). Таким образом, и *для пучков типа* [31] *необходимые условия из предложения* 1 п. 1 *оказываются достаточными.*

Итак, мы видим, что *условия предложгния* 1 п. 1 *достаточны во всех случаях* (для пучков типа [4] они выполнены тривиально).

Замечание 1. Чтобы от пучка (7) перейти к другому пучку типа [31] с теми же фундаментальными точками и той же фундаментальной прямой, достаточно под $h = 0$ понимать другое (пропорциональное) уравнение фундаментальной прямой.

Замечание 2. Хотя в доказательстве предложения 4 мы пользовались проективными координатами, ясно, что *предложение 4 справедливо и в аффинно-проективной плоскости.*

Рассмотрим, наконец, пучки типа [4].

Каждый такой пучок имеет единственную фундаментальную точку M_1. Если в пучке содержится линия $H = 0$, состоящая из двух различных прямых, то, во-первых, двойная точка этой линии должна совпадать с точкой M_1, а, во-вторых, любая другая линия пучка должна быть вырожденной линией с той же двойной точкой. Действительно, только при этих условиях каждая линия пучка пересекается с линией $\overset{\circ}{H}=0$ в точке M_1 кратности 4.

Таким образом, в этом случае

каждая линия пучка является парой прямых (пересекающихся в его фундаментальной точке).

Определение 1. Пучки типа [4], содержащие линии, являющиеся парами различных прямых, мы будем называть *пучками вырожденных линий* (не путать с вырожденными пучками!).

Выбрав в пучке вырожденных линий две линии, мы немедленно получаем следующее

Предложение 5. *Каждый пучок вырожденных линий состоит из всех линий второго порядка, имеющих уравнения вида*

$$\mu f_1 g_1 + \nu f_2 g_2 = 0, \tag{9}$$

где μ и ν — произвольные числа, а

$$f_1 = 0, \quad g_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad g_2 = 0 \tag{10}$$

— уравнения четырех прямых, проходящих через одну точку и обладающих тем свойством, что каждая из прямых $f_1 = 0$ и $g_1 = 0$ отлична от прямых $f_2 = 0$ и $g_2 = 0$ (совпадение прямых $f_1 = 0$ и $g_1 = 0$ или прямых $f_2 = 0$ и $g_2 = 0$ не исключается).

Фундаментальной точкой этого пучка является точка M_1 пересечения прямых (10), а фундаментальной прямой — произвольная прямая, проходящая через точку M_1.

Пучок (9) тогда и только тогда — вещественный, когда либо все прямые (10) вещественны, либо прямые $f_1 = 0$ и $g_1 = 0$ или прямые $f_2 = 0$ и $g_2 = 0$ комплексно-сопряжены (а остальные прямые вещественны).

Замечание 3. Не нужно думать, что пучок (9) содержит все вырожденные линии второго порядка с двойной точкой M_1. Напротив, из предложения 2 п. 1 непосредственно вытекает, что

каждая прямая, проходящая через точку M_1, входит в состав одной и только одной линии пучка (9).

Рассмотрим теперь пучки типа [4], содержащие невырожденные линии второго порядка. Согласно сказанному выше, содержащаяся в таком пучке вырожденная линия $\overset{\circ}{H}=0$ (см. лемму 3 п. 4 § 2) обязана быть двойной прямой, и эта прямая должна касаться в точке M_1 каждой линии пучка, т. е. должна быть фундаментальной прямой пучка. Поэтому, в частности, линия $\overset{\circ}{H}=0$ будет единственной вырожденной линией, содержащейся в пучке.

Мы выберем систему однородных проективных координат $X:Y:Z$ так, чтобы точка M_1 имела координаты $(1:0:0)$, а линия $\mathring{H}=0$ — уравнение $Z^2=0$. Тогда фундаментальная прямая пучка будет иметь уравнение

$$Z=0.$$

Пусть

$$a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2+2a_{13}XZ+2a_{23}YZ+a_{33}Z^2=0$$

— уравнение произвольной линии пучка. Так как эта линия проходит через точку $M_1(1:0:0)$, то $a_{11}=0$, а так как она касается в этой точке прямой $Z=0$, то $a_{12}=0$.

Таким образом, уравнение произвольной линии рассматриваемого пучка имеет на самом деле вид

$$a_{22}Y^2+2a_{13}XZ+2a_{23}YZ+a_{33}Z^2=0.$$

Поскольку линия $Z^2=0$ принадлежит, по условию, пучку, отсюда вытекает, что в пучке содержится линия с уравнением вида

$$a_{22}Y^2+2a_{13}XZ+2a_{23}YZ=0.$$

Ясно, что коэффициенты a_{22} и a_{13} этого уравнения отличны от нуля, поскольку в противном случае пучок будет содержать две вырожденные линии, что согласно сказанному выше невозможно.

Следовательно, деля на a_{22} и полагая

$$p=-\frac{a_{13}}{a_{22}},\quad q=-\frac{a_{23}}{a_{22}},$$

мы получаем, что

рассматриваемый пучок типа [4] *содержит линию вида*

$$Y^2=2pXZ+2qYZ, \tag{11}$$

где $p\neq 0$.

Так же как для пучков типа [31], немедленно доказывается, что при выбранной системе однородных проективных координат

числа $p\neq 0$ *и* q *однозначно определяются пучком.*

Таким образом,

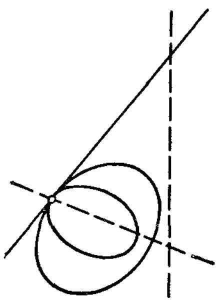
пучков типа [4] *с данной фундаментальной точкой и данной фундаментальной прямой существует целое семейство, зависящее от двух параметров* p *и* q *(подчиненных единственному условию:* $p\neq 0$*).*

Поскольку пучок содержит линию (11) и линию $Z^2=0$, любая принадлежащая ему линия второго порядка имеет уравнение вида

$$\mu Z^2+\nu(Y^2-2pXZ-2qYZ)=0.$$

Возвращаясь к произвольным координатам и обозначая через $f=0$, $g=0$ и $h=0$ прямые, имеющие в координатах $X:Y:Z$ уравнения $2pX+2qY=0$, $Y=0$ и $Z=0$, мы немедленно получаем отсюда следующее

Предложение 6. *Каждый пучок типа* [4], *не являющийся пучком вырожденных линий, состоит из всех линий второго порядка, имеющих уравнение вида*



$$\mu h^2+\nu(g^2-fh)=0, \tag{12}$$

где μ *и* ν — *произвольные числа, а*

$$f=0, \quad g=0, \quad h=0 \tag{13}$$

— *уравнения трех прямых, не проходящих через одну точку.*

Фундаментальной прямой пучка (12) *является прямая* $h=0$, *а его фундаментальной точкой — точка пересечения прямых* $h=0$ *и* $g=0$.

Пучок (12) *тогда и только тогда — вещественный, когда все прямые* (13) *вещественны.*

Замечание 4. Подобно предложению 4 *предложение* 6 *справедливо и в аффинно-проективной плоскости.*

Замечание 5. Сопоставляя все доказанные предложения, мы видим, что

каждый пучок линий второго порядка может быть представлен в одном из следующих трех видов:

$$\mu f_1g_1+\nu f_2g_2=0, \tag{14}$$

$$\mu gh+\nu(g^2-fh)=0, \tag{15}$$

$$\mu h^2+\nu(g^2-fh)=0, \tag{16}$$

где

$$f_1=0, \quad g_1=0, \quad f_2=0, \quad g_2=0 \tag{17}$$

и

$$f=0, \quad g=0, \quad h=0 \tag{18}$$

— *уравнения некоторых прямых.*

При этом, если из прямых (17) никакие три не проходят через одну точку, то пучок (14) является пучком общего типа [1111]; если три (и только три) из прямых (17) проходят через одну точку, то пучок (14) является пучком типа [211], когда все прямые (17) различны, и пучком типа [22], когда либо $f_1=g_1$, либо $f_2=g_2$; если все четыре прямые (17) проходят через одну точку (и ни одна из прямых $f_1=0$, $g_1=0$ не совпадает ни с одной из прямых $f_2=0$, $g_2=0$), то пучок (14) является пучком типа [4], состоящим из вырожденных линий; и, наконец, во всех остальных случаях пучок (14) вырожден.

Пучки (15) и (16) являются (при прямых (18), не проходящих через одну точку) соответственно пучками типа [31] и пучками типа [4], не являющимися пучками вырожденных линий.

Упражнение. Докажите, что

если прямые (18) *проходят через одну точку, то пучки* (15) *и* (16) *являются либо пучками вырожденных линий, либо вырожденными пучками*

Дополнение. **Еще раз о пучках окружностей**

Все сказанное выше справедливо и для линий второго порядка на евклидово-проективной (вещественно-комплексной или комплексной) плоскости, поскольку такую плоскость мы можем единственным образом превратить в аффинно-проективную плоскость (см. п. 4 § 1 гл. 4).

Как мы знаем (см. п. 6 § 3 гл. 4), любая окружность на евклидово-проективной вещественно-комплексной плоскости проходит через циклические точки $(\pm i : 1 : 0)$ (конечно, мы здесь пользуемся однородными евклидовыми координатами). Покажем, что и, обратно,

любая вещественная линия второго порядка на евклидово-проективной вещественно-комплексной плоскости, проходящая через циклические точки, является окружностью.

Действительно, если линия

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + a_{33}Z^2 = 0 \qquad (1)$$

проходит через точки $(\pm\, i : 1 : 0)$, то

$$-\,a_{11} + 2ia_{12} + a_{22} = 0$$

и, следовательно (поскольку числа a_{11}, a_{12}, a_{22}, по условию, вещественны),

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0.$$

Поэтому при $a_{11} = a_{22} \neq 0$ линия (1) — настоящая окружность (см. п. 6 § 3 гл. 4), а при $a_{11} = a_{22} = 0$ — прямая (плюс несобственная прямая $Z = 0$).

Отсюда вытекает, что *любой вещественный пучок линий второго порядка, среди фундаментальных точек которого содержатся обе циклические точки, состоит только из окружностей* (точнее, из окружностей состоит его подмножество вещественных линий).

Если этот пучок имеет еще две собственные фундаментальные точки (и потому является пучком общего типа), то он будет эллиптическим пучком окружностей, если эти точки вещественны, и гиперболическим пучком, если эти точки комплексно-сопряжены. Если этот пучок имеет одну двойную собственную фундаментальную точку, то он будет параболическим пучком окружностей. Если среди его фундаментальных точек имеется (кроме циклических) несобственная точка, то он будет вырожденным пучком с общей несобственной прямой, так что, удалив эту прямую, мы получим пучок прямых. Пучок типа [22], фундаментальными точками которого являются циклические точки (а фундаментальные прямые комплексно-сопряжены), является несобственным пучком концентрических окружностей (имеющих центры в точке пересечения фундаментальных прямых).

Таким образом, теория пучков окружностей естественным образом вкладывается в общую теорию пучков линий второго порядка.

3. Линии второго порядка, проходящие через пять точек

В этом и следующих пунктах мы применим теорию пучков линий второго порядка к доказательству некоторых важных теорем о линиях второго порядка. Конечно, эти теоремы можно доказывать, и не пользуясь пучками, но тогда их доказательства получаются гораздо более сложными.

Пусть нам даны пять различных точек

$$\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{5}$$

аффинно-проективной вещественно-комплексной плоскости, из которых никакие четыре не коллинеарны. Покажем, что

из этих пяти точек можно выбрать четыре, из которых никакие три не коллинеарны.

Действительно, рассмотрим точки **1**, **2**, **3**, **4**. Если никакие три из них не коллинеарны, то все доказано. Пусть среди этих точек имеются три точки (скажем, точки **1**, **2**, **3**), принадлежащие одной прямой. По условию точка **4** не принадлежит прямой **123** и потому определены три прямые **14**, **24** и **34**. Точка **5** может принадлежать не более чем одной из этих прямых. Пусть она не принадлежит прямым **14** и **24**. Тогда ясно, что никакие три из четырех точек **1**, **2**, **4** и **5** не коллинеарны.

Из этого утверждения немедленно вытекает следующее

Предложение 1. *Через любые пять точек* **1**, **2**, **3**, **4**, **5** *аффинно-проективной вещественно-комплексной плоскости, из которых никакие четыре не коллинеарны, проходит единственная линия второго порядка.*

Доказательство. Пусть **1**, **2**, **3**, **4** — те из данных точек, никакие три из которых не коллинеарны. Тогда существует единственный пучок линий второго порядка общего типа, фундаментальными точками которого являются эти точки, а в этом пучке существует единственная линия, проходящая через точку **5**. Поскольку этот пучок состоит из всех линий второго порядка, проходящих через точки **1**, **2**, **3** и **4**, никакой другой линии второго порядка, проходящей через точки **1**, **2**, **3**, **4** и **5**, существовать не может.

Чтобы найти эту линию, следует составить уравнения

$$f_{12}=0, \quad f_{34}=0, \quad f_{13}=0, \quad f_{24}=0 \tag{1}$$

прямых, проходящих соответственно через точки **1**, **2**, через точки **3**, **4**, через точки **1**, **3** и через точки **2**, **4**, а затем найти отношение $\mu:\nu$ из условия, чтобы линия

$$\mu f_{12}f_{34}+\nu f_{13}f_{24}=0$$

проходила через точку **5**.

Если точки **1**, **2**, **3**, **4** — вещественные, то прямые (1) — также вещественные. Если точки **1**, **4** — вещественные, а точки **2**, **3** — комплексно-сопряженные, то прямые $f_{12}=0$ и $f_{13}=0$, а также прямые $f_{34}=0$ и $f_{24}=0$ комплексно-сопряжены. Наконец, если точки 1, 2, а также точки 3, 4 — комплексно-сопряженные, то прямые $f_{12}=0$ и $f_{34}=0$ — вещественные, а прямые $f_{13}=0$ и $f_{23}=0$ — комплексно-сопряженные. Таким образом, во всех случаях пучок содержит две вещественные линии (линии $f_{12}f_{34}=0$, $f_{13}f_{24}=0$ — в первом и третьем случае, и линии $f_{12}f_{34}+f_{13}f_{24}=0$, $i(f_{12}f_{34}-f_{13}f_{24})=0$ — во втором случае) и потому является вещественным пучком.

Поэтому,

если среди пяти точек **1**, **2**, **3**, **4** *и* **5** *каждая мнимая содержится вместе со своей комплексно-сопряженной, то проходящая через них линия второго порядка вещественна.*

Если нам даны пять точек **1**, **2**, **3**, **4** и **5**, из которых четыре (скажем, точки **1**, **2**, **3** и **4**) принадлежат одной прямой, то линия второго порядка, проходящая через эти точки, все равно будет существовать (ею будет, например, пара прямых, состоящая из прямой **1234** и произвольной прямой, проходящей через точку **5**), но эта линия уже не будет единственной.

Замечание 1. Предложение 1 можно легко доказать, и не пользуясь понятием пучка (но зато используя более серьезные алгебраические соображения, чем те, которыми мы пользовались до сих пор). Действительно, линия второго порядка с уравнением

$$a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2+2a_{13}XZ+2a_{23}YZ+a_{33}Z^2=0$$

тогда и только тогда проходит через точку $(X_0\colon Y_0:Z_0)$, когда

$$a_{11}X_0^2+2a_{12}X_0Y_0+a_{22}Y_0^2+2a_{13}X_0Z_0+2a_{23}Y_0Z_0+a_{33}Z_0^2=0.$$

Но это равенство является линейным однородным уравнением относительно шести неизвестных

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ a_{13},\ a_{23},\ a_{33}.$$

Поэтому требование, чтобы линия проходила через пять точек, алгебраически выражается в виде системы пяти таких уравнений. А так как из алгебры известно, что система однородных уравнений, число уравнений которой меньше числа неизвестных, всегда имеет нетривиальное решение, то всегда существует линия второго порядка, проходящая через пять данных точек.

Чтобы на этом пути получить единственность линии, проходящей через пять точек, из которых никакие четыре не лежат на одной прямой, необходимо воспользоваться более точным алгебраическим фактом, а именно тем, что система линейно независимых однородных линейных уравнений от $n+1$ неизвестных, состоящая из n уравнений, имеет единственное (с точностью до пропорциональности) нетривиальное решение. Чтобы мы могли эту теорему использовать, нам нужно только доказать, что наши пять уравнений линейно независимы. Но это легко доказывается от противного.

Действительно, если, скажем, пятое уравнение является следствием четырех других уравнений, то любая линия второго порядка, проходящая через точки **1**, **2**, **3** и **4**, будет проходить и через точку **5**. В частности, точка **5** должна принадлежать линии, состоящей из прямых **12** и **34**, а также линии, состоящей из прямых **13** и **24**. Но если никакие три из точек **1**, **2**, **3** и **4** не коллинеарны, то эти две линии имеют общими только точки **1**, **2**, **3** и **4**, так что в этом случае мы приходим к противоречию. Если же, скажем, точки **1**, **2**, **3** коллинеарны, то чтобы прийти к противоречию, достаточно рассмотреть линию второго порядка, состоящую из прямой **123** и произвольной прямой, проходящей через точку **4** и не содержащей точку **5**.

Замечание 2. Обратим внимание на то, что последним способом мы доказали не только единственность линии, проходящей через точки **1**—**5**, но даже единственность (с точностью до пропорциональности) ее уравнения. Это позволяет нам немедленно получить теорему единственности для линий второго порядка в следующей формулировке:

Любые два уравнения произвольной линии второго порядка на аффинно-проективной вещественно-комплексной плоскости пропорциональны.

Действительно, если линия не является дважды взятой прямой, то на ней существует пять точек, из которых никакие четыре не коллинеарны, а согласно только что сказанному уравнение линии второго порядка, проходящей через эти точки, определено однозначно (с точностью до пропорциональности).

Если же линия является дважды взятой прямой, то ее уравнение имеет (с точностью до числового множителя) вид

$$(AX + BY + CZ)^2 = 0,$$

и его единственность немедленно вытекает из единственности (с точностью до пропорциональности) уравнения прямой.

Теорема единственности для линий второго порядка на аффинной (а значит, и на евклидовой) вещественно-комплексной плоскости (см. п. 4 § 1) вытекает отсюда немедленно, поскольку любая линия второго порядка на аффинной плоскости однозначно дополняется не более чем двумя точками до линии на аффинно-проективной плоскости.

Совершенно так же может быть доказана и теорема единственности для линий второго порядка (содержащих более одной точки) на вещественной плоскости.

Дополнение. Поверхности второго порядка, проходящие через девять точек

Уравнение поверхности второго порядка в пространстве имеет десять коэффициентов a_{ij}. Условие, что поверхность проходит через данную точку, накладывает на эти коэффициенты одно линейное соотношение. Следовательно, поскольку система десяти линейных однородных уравнений с десятью неизвестными всегда имеет хотя бы одно нетривиальное решение.

через любые девять точек (аффинно-проективного или проективного) пространства проходит хотя бы одна поверхность второго порядка.

Упражнение. Найдите необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять девять точек пространства, чтобы через них проходила единственная поверхность второго порядка.

Из доказанного утверждения непосредственно вытекает, что

через любые три прямые проходит хотя бы одна поверхность второго порядка.

Действительно, достаточно выбрать на каждой из данных прямых по три точки и провести через получающиеся девять точек поверхность второго порядка. Эта поверхность, имея с каждой из данных прямых три общие точки, будет эти прямые целиком содержать.

Построенная поверхность второго порядка не может быть ни эллипсоидом, ни двуполостным гиперболоидом, ни эллиптическим параболоидом, поскольку ни одна из этих поверхностей не может содержать ни одной прямой. Аналогично, если данные прямые скрещиваются, то она не может быть цилиндром (и, в частности, парой плоскостей). Поэтому для скрещивающихся прямых содержащая их поверхность второго порядка обязана быть либо однополостным гиперболоидом, либо гиперболическим параболоидом (заметим, что здесь мы существенно используем оставленный нами в дополнении к § 1 без доказательства факт, что перечисленными в этом дополнении семнадцатью классами поверхностей исчерпываются все поверхности второго порядка в пространстве). Но мы знаем, что прямые, лежащие на однополостном гиперболоиде или гиперболическом параболоиде, являются его прямолинейными образующими, причем три прямолинейные образующие тогда и только тогда скрещиваются, когда они принадлежат одному семейству образующих. Таким образом, наши три прямые являются прямолинейными образующими либо однополостного гиперболоида, либо гиперболического параболоида, принадлежащими одному семейству образующих. Поскольку три образующих одного семейства однозначно определяют поверхность (потому что эта поверхность может быть охарактеризована как геометрическое место всех точек прямых, проходящих через данные три образующие; см. пп. 4—5 § 2 гл. 5), тем самым доказано, что

через любые три скрещивающиеся прямые проходит единственная поверхность второго порядка (являющаяся однополостным гиперболоидом, если эти прямые не параллельны одной плоскости, и гиперболическим параболоидом — в противном случае).

Упражнение. Существуют ли не скрещивающиеся прямые, для которых содержащая их поверхность второго порядка все же единственна?

Одновременно мы также доказали, что

для любых трех скрещивающихся прямых существует линейчатая поверхность второго порядка (однополостный гиперболоид или гиперболический параболоид), прямолинейными образующими которой, принадлежащими одному семейству, они являются.

Это означает (см. пп. 4—5 § 2 гл. 5), что

какие бы три скрещивающиеся прямые мы ни взяли, геометрическое место точек всех прямых, пересекающих эти прямые, является либо однополостным гиперболоидом (если данные прямые не параллельны одной плоскости), либо гиперболическим параболоидом (если они параллельны некоторой плоскости).

4. Теорема Штурма

Пусть нам даны три линии второго порядка

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0,$$

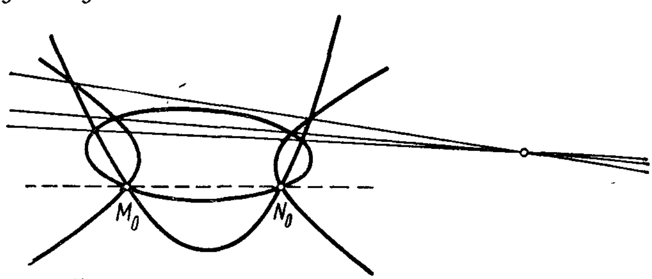
имеющие попарно лишь простые точки пересечения, и пусть эти кривые проходят через две данные точки M_0 и N_0. Тогда любые две из этих линий пересекаются еще в двух точках (отличных от точек M_0 и N_0). Пусть

M_1, N_1 — дополнительные точки пересечения линий $F_2 = 0$ и $F_3 = 0$;

M_2, N_2 — дополнительные точки пересечения линий $F_1 = 0$ и $F_3 = 0$;

M_3, N_3 — дополнительные точки пересечения линий $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$.

Теорема Штурма. *Прямые M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3 проходят через одну точку.*



Доказательство. Пусть

$g_0 = 0$ — уравнение прямой M_0N_0;
$g_1 = 0$ — уравнение прямой M_1N_1;
$g_2 = 0$ — уравнение прямой M_2N_2;
$g_3 = 0$ — уравнение прямой M_3N_3.

Если одна из данных линий (скажем, линия $F_3 = 0$) является парой прямых, одной из которых служит прямая $g_0 = 0$, то другой прямой, входящей в состав линии, будет прямая $g_1 = 0$ (поскольку линия $F_3 = 0$ содержит точки M_1 и N_1), а также прямая $g_2 = 0$ (поскольку линия $F_3 = 0$ содержит точки M_2 и N_2). Следовательно, прямые $g_1 = 0$ и $g_2 = 0$ совпадают, и потому в этом случае утверждение теоремы очевидно.

Пусть теперь ни одна из данных линий не является парой прямых, одной из которых служит прямая $g_0 = 0$. Рассмотрим пучок линий второго порядка

$$\mu F_1 + \nu F_2 = 0.$$

По условию, он является пучком общего типа с фундаментальными точками M_0, N_0, M_3, N_3 и потому содержит любую линию второго порядка, проходящую через эти точки. В частности, этот пучок содержит пару прямых

$$g_0 g_3 = 0.$$

Так как линии $F_1 = 0$ и $g_0 g_3 = 0$, по условию, различны, существуют такие числа μ и ν (оба отличные от нуля), что

$$F_2 = \mu F_1 + \nu g_0 g_3.$$

Поскольку все уравнения линий нам заданы только с точностью до пропорциональности, мы можем (заменяя, если нужно, F_2 на $\frac{1}{\mu} F_2$, а g_3 — на $\frac{\nu}{\mu} g_3$) без ограничения общности считать, что

$$F_2 = F_1 + g_0 g_3.$$

Аналогично показывается, что

$$F_3 = F_1 + g_0 g_2$$

(при соответствующей нормировке уравнений $F_3 = 0$ и $g_2 = 0$).

Поэтому

$$F_2 - F_3 = g_0 (g_3 - g_2),$$

так что линия $F_2 - F_3 = 0$ является парой прямых $g_0 = 0$ и $g_3 - g_2 = 0$.

Но линия $F_2 - F_3 = 0$ принадлежит пучку $\mu F_2 + \nu F_3 = 0$ и потому проходит через точки M_0, N_0, M_1, N_1. Поскольку прямой $M_0 N_0$ является прямая $g_0 = 0$, это показывает, что прямая $M_1 N_1$ (т. е. прямая $g_1 = 0$) имеет уравнение

$$g_3 - g_2 = 0.$$

Следовательно, прямая $g_1 = 0$ принадлежит пучку, определенному прямыми $g_2 = 0$, $g_3 = 0$, и потому проходит через точку их пересечения.

Тем самым теорема Штурма полностью доказана.

Рассмотрим частный случай, когда точки M_0 и N_0 являются циклическими точками. Тогда линии второго порядка

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

будут окружностями, а прямые $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = 0$ — общими хордами этих окружностей, т. е. их радикальными осями (см. п. 1 § 3 гл. 4).

В этом случае теорема Штурма переходит в уже известную нам теорему о том, что для любых трех окружностей их радикальные оси пересекаются в одной точке (радикальном центре этих трех окружностей; см. определение 3 п. 1 § 3 гл. 4).

Другие варианты теоремы Штурма получаются, когда некоторые из рассмотренных выше точек совпадают.

Пусть, например, совпадают точки M_0 и N_0, т. е. пусть линии второго порядка

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

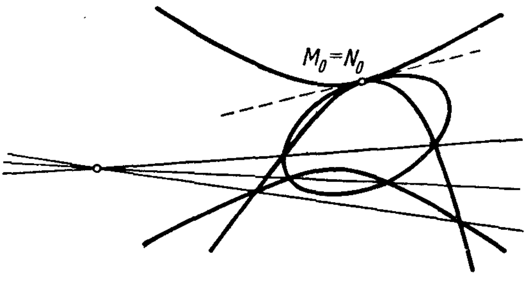
проходят через точку M_0, причем эта точка является двойной точкой пересечения любых двух из этих линий. Другими словами, пусть в точке M_0 все три линии имеют одну и ту же касательную

$$g_0 = 0.$$

Предполагая по-прежнему, что все другие точки пересечения этих линий различны (и отличны от точки M_0), мы можем повторить все изложенные выше рассуждения. Единственное отличие будет теперь в том, что пучок $\mu F_1 + \nu F_2 = 0$ будет теперь пучком типа [211] с фундаментальной прямой $g_0 = 0$, но распадающаяся на прямые линия $g_0 g_3 = 0$ будет, как и раньше, ему принадлежать.

Таким образом,

для трех линий второго порядка, касающихся друг друга в некоторой точке, прямые, проходящие через другие точки их пересечения, проходят через одну точку.



Точно так же, теорема Штурма сохраняется и тогда, когда, например, точки M_1 и N_1 совпадают (т. е. когда в точке M_1 линии $F_2 = 0$ и $F_3 = 0$ касаются друг друга). Естественно, что в этом случае под прямой $g_1 = 0$ следует понимать общую касательную линий $F_2 = 0$ и $F_3 = 0$ в точке M_1.

Задание. Разберите все возможные здесь случаи (когда совпадают точки пересечения одной пары линий, двух пар и т. д.) и сформулируйте соответствующие теоремы.

5. Теорема Паскаля

Пусть на некоторой линии второго порядка

$$F = 0$$

дано шесть ее простых точек. Обозначим их (в произвольном порядке) символами

1, 2, 3, 4, 5, 6.

Определение 1. О шести прямых

12, 23, 34, 45, 56, 61

мы будем говорить, что они образуют *шестиугольник, вписанный в линию* $F = 0$.

Обратим внимание на то, что термин «шестиугольник» здесь используется в смысле, отличном от элементарно-геометрического («сторонами» шестиугольника являются не отрезки, а прямые, и эти стороны могут как угодно пересекаться).

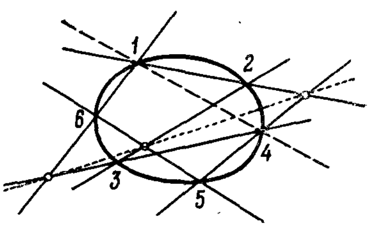
Стороны, между которыми лежит по одной «свободной вершине», т. е. стороны

12 и **45**, **23** и **56**, **34** и **61**,

мы будем называть *противоположными* сторонами нашего шестиугольника.

Теорема Паскаля. *Точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в линию второго порядка, коллинеарны.*

Доказательство. Рассмотрим три линии второго порядка:



1) данную линию,

2) вырожденную линию, состоящую из прямых **12** и **34**,

3) вырожденную линию, состоящую из прямых **16** и **45**.

Эти линии пересекаются в двух точках **1** и **4** (имеют общую хорду **14**), и потому к ним применима теорема Штурма.

Соответствующими прямыми

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = 0$$

являются здесь, как легко видеть, прямые **23**, **65** и прямая, соединяющая точку **12·45** пересечения прямых **12** и **45** с точкой пересечения **34·61** прямых **34** и **61**. Поскольку эти прямые пересекаются в одной точке, мы получаем, что три точки:

а) точка **12·45** пересечения прямых **12** и **45**,

б) точка **23·56** пересечения прямых **23** и **56**,

в) точка **34·61** пересечения прямых **34** и **61**,

действительно лежат на одной прямой.

Теорема Паскаля позволяет по пяти данным точкам (невырожденной) линии второго порядка строить (с помощью одной только линейки) любое число других ее точек. Действительно, пусть

$$\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{5}$$

— данные точки (из которых никакие четыре не коллинеарны). Построим точку $\mathbf{12}\cdot\mathbf{45}$ пересечения прямых $\mathbf{12}$ и $\mathbf{45}$ и через эту точку проведем произвольную прямую $f = 0$. Пусть эта прямая пересекает прямую $\mathbf{23}$ в точке M, а прямую $\mathbf{34}$ — в точке N. Соединив прямыми точку M с точкой $\mathbf{5}$, а точку N — с точкой $\mathbf{1}$, рассмотрим точку $\mathbf{6}$ пересечения этих прямых. Легко видеть, что

точка $\mathbf{6}$ *принадлежит линии второго порядка* $F = 0$, *проходящей через точки* $\mathbf{1}$—$\mathbf{5}$.

Действительно, пусть $\mathbf{6}'$ — точка пересечения прямой $M\mathbf{5}$ с линией $F = 0$, отличная от точки $\mathbf{5}$. Применим к точкам

$$\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{5},\ \mathbf{6}'$$

теорему Паскаля. Согласно этой теореме три точки пересечения

$$\mathbf{12}\cdot\mathbf{45},\ \mathbf{23}\cdot\mathbf{56}',\ \mathbf{34}\cdot\mathbf{6}'\mathbf{1}$$

лежат на одной прямой. Но поскольку прямая $\mathbf{56}'$ совпадает с прямой $M\mathbf{5}$, то $M = \mathbf{23}\cdot\mathbf{56}'$. Следовательно, указанная прямая совпадает с прямой $f = 0$ (проходящей, по построению, через точки $\mathbf{12}\cdot\mathbf{45}$ и M), и потому точка N (являясь точкой пересечения прямой $f = 0$ с прямой $\mathbf{34}$) совпадает с точкой $\mathbf{34}\cdot\mathbf{6}'\mathbf{1}$. Это показывает, что точка $\mathbf{6}'$ расположена на прямой $N\mathbf{1}$. Будучи точкой прямой $M\mathbf{5}$, она является, следовательно, точкой пересечения этих прямых, т. е. совпадает с точкой $\mathbf{6}$. Поэтому точка $\mathbf{6}$ принадлежит линии $F = 0$.

Правду сказать, в этом доказательстве допущена небольшая неточность, поскольку не рассмотрены различные «вырожденные случаи», например, случай, когда прямая $M\mathbf{5}$ касается линии $F = 0$ и потому точка $\mathbf{6}'$ совпадает с точкой $\mathbf{5}$. Малоприятный труд рассмотрения всех возможных здесь вырождений мы предоставим читателю. Для этого необходимы, конечно, соответствующие «вырожденные варианты» теоремы Паскаля, простейшим из которых является следующее утверждение (получающееся, когда две вершины сливаются в одну):

две пары несмежных сторон вписанного в линию второго порядка пятиугольника пересекаются в двух точках, коллинеарных с точкой пересечения пятой стороны и касательной к линии в противоположной вершине.

Для доказательства этого утверждения достаточно повторить изложенное выше доказательство теоремы Паскаля, только вместо теоремы Штурма следует воспользоваться соответствующим ее вариантом.

Аналогично доказывается, что

в четырехугольнике, вписанном в линию второго порядка, противоположные стороны пересекаются в двух точках, коллинеарных с точкой пересечения касательных к линии в любой паре противоположных вершин,

а также, что

в треугольнике, вписанном в линию второго порядка, точки пересечения каждой из сторон с касательной к линии в противоположной вершине коллинеарны.

Задание. Докажите эти утверждения.

Замечание 1. В справедливости последних утверждений можно непосредственно убедиться, заметив, что они получаются из теоремы Паскаля о шестиугольнике предельным переходом, когда некоторые вершины шестиугольника сливаются в одну точку, поскольку предельным положением секущей является касательная. Однако такого рода соображения «по непрерывности» носят эвристический характер и не могут рассматриваться как доставляющие строгое доказательство.

Рассмотрим теорему Паскаля в частном случае, когда линия $F=0$ является парой различных прямых (парой совпадающих прямых она быть не может, поскольку на такой линии нет простых точек). Если на одной из прямых, составляющих линию $F=0$, находятся вершины **1**—**6** с номерами разной четности, то, как легко убедиться, по крайней мере две из рассматриваемых в теореме Паскаля трех точек пересечения совпадают, и потому эта теорема сводится к тавтологии. Напротив, если точки **1**, **3**, **5** расположены на одной прямой, а точки **2**, **4**, **6** — на другой, то, сравнивая формулировки, мы немедленно получим, что в этом случае теорема Паскаля превращается в уже известную нам теорему Паппа — Паскаля (см. п. 6 § 1 гл. 4). Таким образом, общую теорему Паскаля можно рассматривать как обобщение теоремы Паппа — Паскаля на любые линии второго порядка.

6. Квадратичные пучки прямых

Принцип двойственности на проективной плоскости (см. п. 6 § 1 гл. 4) мотивирует следующее

Определение 1. Множество всех прямых $(A:B:C)$, координаты которых удовлетворяют некоторому однородному алгебраическому уравнению

$$\Phi(A, B, C)=0,$$

называется *алгебраическим пучком прямых.* Степень n этого уравнения называется *порядком* пучка.

В этой терминологии пучки прямых в смысле п. 1 § 1 гл. 4 являются не чем иным, как *пучками первого порядка.*

Для *пучков второго порядка* (которые будем также называть *квадратичными пучками*) может быть развита теория, полностью параллельная (или, лучше сказать, двойственная) развитой выше теории кривых второго порядка.

Например, через любую точку (аффинно-проективной вещественно-комплексной) плоскости проходят, вообще говоря, две прямые данного пучка второго порядка, определяемые корнями некоторого квадратного уравнения. Если это уравнение имеет двойной корень, то точка называется *касательной* к пучку, а единственная прямая пучка, проходящая через эту точку, называется *прямой касания* (о точке говорят также, что она *касается* пучка в этой прямой).

Прямая пучка второго порядка называется *двойной*, если любая ее точка касается пучка в этой прямой. Остальные прямые пучка называются *простыми*. На каждой простой прямой пучка существует единственная точка, касающаяся пучка в этой прямой.

Пучок второго порядка называется *вырожденным*, если он имеет двойную прямую. Каждый такой пучок состоит из двух пучков первого порядка. Если эти пучки различны, то единственной двойной прямой является прямая, соединяющая их центры. Если же они совпадают, то любая прямая данного пучка второго порядка является его двойной прямой.

Если пучок второго порядка имеет уравнение

$$b_{11}A^2+2b_{12}AB+b_{22}B^2+2b_{13}AC+2b_{23}BC+b_{33}C^2=0, \qquad (1)$$

то он вырожден тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}=0$$

(как и в аналогичной ситуации для линий, мы считаем, что $b_{ij}=b_{ji}$ для любых i, j). Его двойные прямые $(A:B:C)$ определяются в этом случае из уравнений

$$\begin{aligned} b_{11}A+b_{12}B+b_{13}C&=0, \\ b_{21}A+b_{22}B+b_{23}C&=0, \\ b_{31}A+b_{32}B+b_{33}C&=0. \end{aligned}$$

В любой простой прямой $(A_0:B_0:C_0)$ пучка (1) касательная является центром пучка первого порядка, состоящего из прямых $(A:B:C)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(b_{11}A_0+b_{12}B_0+b_{13}C_0)\,A+(b_{21}A_0+b_{22}B_0+b_{23}C_0)\,B+ \\ +(b_{31}A_0+b_{32}B_0+b_{33}C_0)\,C=0,$$

т. е. является точкой с координатами

$$(b_{11}A_0+b_{12}B_0+b_{13}C_0):(b_{21}A_0+b_{22}B_0+b_{23}C_0):(b_{31}A_0+b_{32}B_0+b_{33}C_0).$$

Любые (не совпадающие и не имеющие общего пучка первого порядка) пучки второго порядка

$$\Phi=0,\quad \Psi=0$$

имеют не более четырех общих прямых. Каждой такой общей прямой можно приписать некоторую *кратность* так, чтобы сумма всех их кратностей была равна четырем. Общие прямые кратности 1 называются *простыми прямыми пересечения* двух пучков второго порядка. Если все общие прямые двух пучков второго порядка (не имеющих общего пучка первого порядка) являются простыми прямыми пересечения, то их ровно четыре.

Пусть нам даны три пучка второго порядка

$$\Phi_1=0,\quad \Phi_2=0,\quad \Phi_3=0,$$

имеющие попарно лишь простые прямые пересечения, и пусть эти пучки содержат две данные прямые α_0 и β_0. Тогда любые два из этих пучков содержат еще по паре прямых (отличных от прямых α_0 и β_0). Пусть

α_1, β_1 — дополнительные прямые пересечения пучков $\Phi_2=0$ и $\Phi_3=0$,

α_2, β_2 — дополнительные прямые пересечения пучков $\Phi_1=0$ и $\Phi_3=0$,

α_3, β_3 — дополнительные прямые пересечения пучков $\Phi_1=0$ и $\Phi_2=0$,

и пусть

M_1 — точка пересечения прямых α_1 и β_1,

M_2 — точка пересечения прямых α_2 и β_2,

M_3 — точка пересечения прямых α_3 и β_3.

Теорема, двойственная теореме Штурма, утверждает, что *точки M_1, M_2, M_3 расположены на одной прямой.*

Аналогично, пусть в произвольном пучке второго порядка

$$\Phi=0$$

даны шесть простых прямых

1, 2, 3, 4, 5, 6,

и пусть

12, 23, 34, 45, 56, 61

— их точки пересечения. Рассмотрим прямые

12 · 45, 23 · 56, 34 · 61,

соединяющие точку **12** с точкой **45**, точку **23** — с точкой **56** и точку **34** — с точкой **61**. Тогда теорема, двойственная теореме Паскаля, утверждает, что

прямые **12·34, 23·56** *и* **34·61** *проходят через одну точку.*

Иногда эту теорему называют *теоремой Брианшона для пучков второго порядка.*

Доказанная в п. 6 § 1 гл. 4 теорема Паппа — Брианшона является, очевидно, частным случаем теоремы Брианшона, получающимся, когда пучок $\Phi = 0$ вырожден, а прямые **1—6**, имеющие номера разной четности, не принадлежат одному из пучков первого порядка, составляющих пучок $\Phi = 0$.

Подчеркнем, что все эти результаты немедленно вытекают из соответствующих результатов для линий второго порядка и того факта, что для проективной плоскости существует хотя бы один поляритет (см. п. 3 § 2). Тем не менее, прямые доказательства этих результатов очень полезны, поскольку только таким образом можно полностью осознать их геометрический смысл.

Задание. Дайте прямые доказательства всех перечисленных выше утверждений.

Между невырожденными линиями и пучками второго порядка существует замечательное взаимоотношение, позволяющее интерпретировать результаты о пучках как результаты о линиях. Поэтому теория пучков второго порядка является не просто теорией, двойственной к теории линий второго порядка, но и представляет собой мощное орудие доказательства новых теорем об этих линиях.

Пусть нам дан произвольный *невырожденный* квадратичный пучок прямых

$$\Phi(A, B, C) \equiv b_{11}A^2 + 2b_{12}AB + b_{22}B^2 + 2b_{13}AC + \\ + 2b_{23}BC + b_{33}C^2 = 0. \quad (2)$$

Поскольку этот пучок невырожден, в любой его прямой $(A : B : C)$ существует единственная касательная, имеющая координаты

$$\begin{aligned} X &= b_{11}A + b_{12}B + b_{13}C, \\ Y &= b_{21}A + b_{22}B + b_{23}C, \\ Z &= b_{31}A + b_{32}B + b_{33}C. \end{aligned} \quad (3)$$

Определение 2. Множество всех касательных к невырожденному пучку второго порядка называется *огибающей* этого пучка.

Предложение 1. *Огибающая произвольного невырожденного пучка второго порядка является невырожденной линией второго порядка.*

Доказательство. Чтобы найти уравнение, которому удовлетворяют координаты касательной, следует из соотношений (2) и (3) исключить переменные A, B, C. Это делается следующим образом.

Поскольку пучок (2) невырожден, соотношения (3) можно единственным образом разрешить относительно A, B, C.

В результате мы получим формулы вида

$$\begin{aligned} A &= a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z, \\ B &= a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z, \\ C &= a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

— матрица, обратная к матрице

$$V = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (2), мы получим уравнение

$$F(X, Y, Z) = 0, \tag{5}$$

которому должны удовлетворять точки, являющиеся касательными. При этом ясно, что любая точка $X : Y : Z$, удовлетворяющая этому уравнению, является касательной к пучку (2) в некоторой его прямой (а именно, в прямой $(A : B : C)$, определяемой соотношениями (4)).

Поскольку уравнение (5) является, очевидно, однородным уравнением второй степени, для завершения доказательства осталось лишь доказать, что линия (5) невырождена, т. е. что невырождена матрица коэффициентов многочлена $F(X, Y, Z)$.

Мы докажем даже большее, а именно, что

матрицей коэффициентов многочлена $F(X, Y, Z)$ является матрица U, обратная матрице V коэффициентов многочлена $\Phi(A, B, C)$.

Это утверждение можно, конечно, проверить прямым вычислением. Однако поскольку такого рода вычисление весьма длинно и утомительно, мы предпочтем обходной путь, использующий символику матричного исчисления.

Введем в рассмотрение столбец x, составленный из координат X, Y, Z, и столбец a, составленный из координат A, B, C:

$$x = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношения (3) мы можем записать в виде одного матричного равенства

$$x = Va,$$

где, как и выше, V — матрица коэффициентов однородного многочлена Φ.

Умножая это равенство слева на $U = V^{-1}$, мы немедленно получим соотношения (4), записанные в виде одного матричного равенства:

$$a = Ux. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь матрицу

$$a^{\top}Va.$$

По правилам матричного умножения это должна быть некоторая 1×1-матрица, т. е. число. Произведя умножение, мы немедленно получим, что это число равно $\Phi(A, B, C)$. Таким образом,

$$\Phi(A, B, C) = a^{\top}Va.$$

По определению, если мы выразим здесь столбец a через столбец x, т. е. положим $a = Ux$ (см. формулу (6)), то получим многочлен $F(X, Y, Z)$. Следовательно,

$$F(X, Y, Z) = (Ux)^{\top} V (Ux) = x^{\top}U^{\top}VUx = x^{\top}Ux,$$

поскольку, как известно из алгебры,

$$U^{\top} = (V^{-1})^{\top} = (V^{\top})^{-1} = V^{-1} = U$$

(матрица V — симметрическая, и потому $V^{\top} = V$).

Так как однородный многочлен $F(X, Y, Z)$ второй степени единственным образом записывается в виде

$$F(X, Y, Z) = x^{\top}Ux,$$

с симметрической матрицей U, то тем самым наше утверждение полностью доказано.

Вместе с тем полностью доказано и предложение 1.

Пусть теперь, обратно,

$$F(X, Y, Z) \equiv a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + \\ + 2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ + a_{33}Z^2 = 0 \tag{7}$$

— произвольная невырожденная линия второго порядка. В каждой точке $(X : Y : Z)$ этой линии существует единственная касательная $(A : B : C)$ с координатами

$$\begin{aligned} A &= a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z, \\ B &= a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z, \\ C &= a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z. \end{aligned} \tag{8}$$

Определение 3. Множество всех этих касательных мы будем называть *пучком касательных* к линии (7).

Предложение 2. *Для произвольной невырожденной линии второго порядка пучок касательных является невырожденным пучком второго порядка.*

Доказательство. Пусть, как и выше, x — столбец координат X, Y, Z, а a — столбец координат A, B, C. Тогда

$$F(X, Y, Z) = x^{\mathsf{T}} U x$$

и (см. формулы (8))

$$a = Vx.$$

Поэтому при подстановке в многочлен $F(X, Y, Z)$ вместо X, Y, Z их выражений через A, B, C, получающихся из соотношений (8), мы получим однородный многочлен второй степени

$$\Phi(A, B, C) = a^{\mathsf{T}} (U^{-1})^{\mathsf{T}} U U^{-1} a = a^{\mathsf{T}} U^{-1} a,$$

матрицей коэффициентов которого является матрица U^{-1}.

Поскольку прямая $(A : B : C)$ тогда и только тогда является касательной к линии (7), когда

$$\Phi(A, B, C) = 0$$

(в одну сторону это следует из определения многочлена $\Phi(A, B, C)$, а в другую — из того, что если $\Phi(A, B, C) = 0$, то числа X, Y, Z, определенные уравнениями (8), удовлетворяют уравнению (7) и имеет место равенство $AX + BY + CZ = 0$), тем самым предложение 2 полностью доказано.

На самом деле мы доказали даже большее, а именно, что *соответствия*

«пучок» $\mapsto$ «огибающая»,

«линия» $\mapsto$ «пучок касательных»

являются взаимно обратными биективными соответствиями между множеством всех невырожденных линий второго порядка и множеством всех невырожденных пучков второго порядка.

Действительно, в силу полной симметричности полученных выше формул, пучок касательных к огибающей является исходным пучком, а огибающая пучка касательных является исходной линией.

Таким образом,

каждый невырожденный пучок второго порядка является пучком касательных к некоторой невырожденной линии второго порядка,

и обратно,

каждая невырожденная линия второго порядка является огибающей некоторого невырожденного пучка второго порядка.

Замечание 1. В п. 3 § 2 мы вывели формулу (см. п. 3 § 2, формула (6)), выражающую необходимое и достаточное условие того, что данная прямая касается данной линии второго порядка. С нашей теперешней точки зрения эта формула является не чем иным, как уравнением пучка касательных. Таким образом, *пучок касательных к линии второго порядка* (7) *задается уравнением*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Сравнив это уравнение с полученным выше уравнением $\Phi(A, B, C) = 0$, мы немедленно получаем тождество

$$a^{\mathsf{T}} U^{-1} a = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}, \tag{10}$$

где k — некоторый (отличный от нуля) множитель.

Задание. Проверьте тождество (10) прямым вычислением (и, в частности, найдите множитель k).

Ясно, что уравнение, аналогичное уравнению (9), имеет место и для огибающих, т. е.

огибающая к пучку второго порядка (2) *задается уравнением*

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & X \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & Y \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Упражнение. Докажите это утверждение тем же методом, которым была доказана формула (8) п. 3 § 2.

Установленные биективные соответствия между линиями и пучками второго порядка позволяют доказывать новые теоремы о линиях второго порядка (или очень просто доказывать уже известные).

Например (см. следствие 1 в п. 3 § 2), мы немедленно получаем, что

через каждую точку (вещественно-комплексной) плоскости, не принадлежащую данной невырожденной линии второго порядка, проходит точно две различных касательных к этой линии.

Действительно, так как пучок касательных является пучком второго порядка, то через каждую точку плоскости проходят две (возможно, совпадающие) касательные. Если эти касательные совпадают, то рассматриваемая точка является, по определению, касательной к пучку, т. е. принадлежит его огибающей. Для завершения доказательства остается заметить, что огибающей пучка касательных как раз и является данная линия.

Аналогично, применив теорему, двойственную теореме Штурма, к пучкам касательных линий второго порядка, мы немедленно получим, что

если три невырожденные линии второго порядка имеют две общие касательные, то три точки пересечения трех пар прямых, являющихся касательными к двум из данных линий, лежат на одной прямой.

Эта теорема известна как теорема Штурма для касательных.

Чтобы сформулировать теорему, получающуюся подобным образом из теоремы Брианшона, мы для невырожденной линии второго порядка будем называть *описанным вокруг нее шестисторонником* произвольную систему из шести ее касательных («сторон» шестисторонника). Считая эти касательные занумерованными в произвольном порядке, мы будем называть две его «вершины» (точки пересечения соседних сторон) *противоположными*, если между ними расположена «свободная сторона». Таким образом, если **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** — это стороны, то противоположные вершины — это вершины

12 и **45**

23 и **56**

34 и **61**.

Прямые, соединяющие противоположные вершины, мы будем называть *главными диагоналями* описанного шестисторонника.

В этой терминологии теорема, получающаяся применением теоремы Брианшона к пучку касательных, утверждает, что

три главные диагонали произвольного шестисторонника, описанного вокруг невырожденной линии второго порядка, пересекаются в одной точке.

Эта теорема обычно называется теоремой Брианшона для линий второго порядка.

Подобно теореме Паскаля, теорема Брианшона обладает рядом «предельных случаев» (теоремы Брианшона для пятиугольника, для четырехсторонника и т. д.).

Задание. Сформулируйте и докажите эти теоремы.

Аналогично тому как теорема Паскаля позволила нам указать построение любого числа точек линии второго порядка по ее пяти точкам, из теоремы Брианшона непосредственно вытекает способ построения (одной только линейкой) любого числа касательных к (невырожденной) линии второго порядка по ее пяти касательным.

Задание. Сформулируйте этот способ и докажите его правильность.

7. Фокусы линий второго порядка

Вернемся к формуле (9) п. 6 (т. е. к формуле (6) п. 2 § 2). При фиксированных a_{ij} эта формула является уравнением пучка касательных к данной линии второго порядка. Однако ее можно читать и «наоборот», предполагая коэффициенты A, B, C фиксированными, а коэффициенты a_{ij} — переменными. Тогда она будет уравнением совокупности линий второго порядка, касающихся данной прямой.

Обратим внимание на то, что уравнение (9) п. 6 является (относительно a_{ij}) уравнением второй степени[1]), тогда как условие, что линия второго порядка проходит через данную точку, линейно (см. п. 3). Это кажется странным, ибо условие, что линия второго порядка касается данной прямой, означает, что ее пучок касательных содержит данную прямую, а по соображениям двойственности условие, что квадратичный пучок прямых содержит данную прямую, линейно. Это кажущееся противоречие разрешается легко: коэффициенты уравнения пучка касательных квадратично выражаются через коэффициенты уравнения линии, и поэтому линейное условие на коэффициенты уравнения пучка оказывается квадратичным условием на коэффициенты уравнения линии.

Можно сказать, что совокупность всех линий второго порядка, проходящих через данную точку, изображается в пятимерном пространстве коэффициентов (см. п. 1) некоторой *гиперплоскостью*, а совокупность всех линий второго порядка, касающихся данной прямой, изображается *гиперповерхностью второго порядка*.

Поэтому, в то время как семейство всех линий второго порядка, проходящих через четыре фиксированные точки, изображается линией пересечения четырех гиперплоскостей, т. е. некоторой прямой (и потому является пучком), семейство всех линий второго порядка, касающихся четырех данных прямых, изображается линией пересечения четырех гиперповерхностей второго порядка, и потому представляет собой весьма сложную кривую.

По этой причине изучение семейств линий второго порядка, касающихся четырех фиксированных прямых, несравненно сложнее изучения пучков. Поэтому мы их рассматривать не будем.

Любопытно все же отметить, что одно такое семейство (правда, очень специального вида) выше мы уже изучали. Именно, оказывается, что рассмотренное в п. 4 § 2 гл. 5 *семейство софокусных эллипсов и гипербол может быть охарактеризовано* (*на евклидовой вещественно-комплексной плоскости*) *как семейство линий второго порядка, касающихся четырех прямых.*

Чтобы показать это, мы напомним (см. пп. 1—3 § 1 гл. 5), что фокусом невырожденной линии второго порядка (эллипса, гиперболы или параболы) является точка, обладающая тем свойством, что для любой точки линии отношение ее расстояния до

---

[1]) На первый взгляд даже третьей! Однако, ввиду нуля в правом нижнем углу определителя, члены третьей степени (по a_{ij}) в его разложении отсутствуют.

этой точки к ее расстоянию до некоторой фиксированной прямой (директрисы) постоянно (равно эксцентриситету e линии).

Если в некоторой системе прямоугольных координат фокус имеет координаты (x_0, y_0), а директриса — уравнение

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

то это характеристическое свойство фокуса может быть записано в виде соотношения

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \frac{e}{\sqrt{A^2 + B^2}} \, | Ax + By + C |.$$

Предполагая, что уравнение директрисы (1) нормировано так, что

$$\sqrt{A^2 + B^2} = e,$$

мы (после возведения в квадрат) можем это уравнение переписать в следующем виде:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (Ax + By + C)^2. \tag{2}$$

Поскольку это уравнение является алгебраическим эквивалентом описания линии второго порядка как геометрического места точек, отношение расстояния которых до точки (x_0, y_0) к расстоянию до прямой (1) равно e, мы видим, что *уравнение* (2) *является уравнением невырожденной линии второго порядка с фокусом в точке* (x_0, y_0) *и директрисой* (1), *причем любое уравнение такого вида (для которого прямая* (1) *не проходит через точку* (x_0, y_0)) *является уравнением невырожденной линии второго порядка с фокусом в точке* (x_0, y_0), *директрисой* (1) *и эксцентриситетом* $e = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Задание. Покажите, что если прямая (1) проходит через точку (x_0, y_0), то линия (2) является парой прямых, проходящих через точку (x_0, y_0).

Уравнение (2) показывает, что выражаемая этим уравнением линия принадлежит пучку линий второго порядка, определенному окружностью нулевого радиуса

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0 \tag{3}$$

и двойной прямой

$$(Ax + By + C)^2 = 0. \tag{4}$$

Фундаментальными точками этого пучка являются точки пересечения (имеющие, очевидно, кратность 2) окружности (3) и двойной прямой (4). (Таким образом, рассматриваемый пучок имеет тип [22].)

Но тогда, согласно общей теории пучков линий второго порядка, каждая линия пучка (и, в частности, данная линия (2)) будет иметь эти точки двойными точками пересечения с окружностью (3). Поскольку тот факт, что точка пересечения — двойная, равносилен, по определению, тому, что линии в этой точке касаются (имеют общую касательную), тем самым доказано, что

если точка (x_0, y_0) *является фокусом линии второго порядка, то окружность нулевого радиуса с центром в этой точке касается линии в двух точках.*

Задание. Могут ли эти точки касания совпадать?

Обратно,

если окружность нулевого радиуса с центром в точке (x_0, y_0) *касается в двух точках некоторой невырожденной линии второго порядка, то точка* (x_0, y_0) *является фокусом этой линии.*

Действительно, пусть

$$F=0 \qquad (5)$$

— уравнение данной линии. По условию пучок линий второго порядка, определенный линией (5) и окружностью (3), имеет две двойные фундаментальные точки. Поэтому содержащаяся в нем вырожденная линия второго порядка является двойной прямой, проходящей через эти точки. Следовательно, уравнение (5) является линейной комбинацией уравнения окружности (3) и уравнения некоторой линии вида (4). Пользуясь тем, что уравнения (5) и (4) нам заданы только с точностью до пропорциональности (а также учитывая, что по условию линия (5) невырождена), мы, следовательно, без ограничения общности можем считать, что

$$F=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-(Ax+By+C)^2,$$

т. е. что уравнение линии имеет вид (2). Поэтому точка (x_0, y_0) является фокусом (а прямая $Ax+By+C=0$ — директрисой).

Таким образом, фокус невырожденной линии второго порядка мы можем определить как точку, обладающую тем свойством, что окружность нулевого радиуса с центром в этой точке касается кривой в двух точках. При этом прямая, проходящая через точки касания, является соответствующей директрисой.

Но мы знаем (см. п. 6 § 3 гл. 4), что окружность нулевого радиуса является парой изотропных прямых, проходящих через ее центр. С другой стороны, если пара прямых касается линии второго порядка в двух точках, то это значит, что каждая из этих прямых касается линии (в соответствующей точке).

Все эти соображения мотивируют следующее общее

Определение 1. Точка вещественно-комплексной (евклидовой или евклидово-проективной) плоскости называется *фокусом* линии второго порядка, если проходящие через эту точку изотропные прямые касаются этой линии (вообще говоря, в точках, отличных от фокуса).

В частности, мы видим, что

изотропные прямые, проходящие через центр произвольной окружности, касаются этой окружности в циклических точках.

Как мы знаем, через любую точку плоскости (не принадлежащую данной линии второго порядка) проходят две касательные к этой линии. В частности, это верно для циклических точек.

***Определение* 2.** Касательные, проходящие через циклические точки, называются *изотропными касательными.*

Вообще говоря, линия второго порядка имеет четыре изотропные касательные (по две для каждой циклической точки). Если же линия проходит через циклические точки, то число ее изотропных касательных соответственно уменьшается. Например, окружность имеет только две изотропные касательные (пересекающиеся в ее центре).

Пользуясь понятием изотропной касательной, мы можем сказать, что

фокус линии второго порядка является точкой пересечения изотропных касательных этой линии.

Следовательно,

линия второго порядка имеет, вообще говоря, четыре фокуса.

Действительно, две пары изотропных касательных пересекаются, вообще говоря, в четырех точках.

Если линия второго порядка вещественна, то ее изотропные касательные попарно комплексно-сопряжены и потому пересекаются в двух вещественных и двух мнимых (комплексно-сопряженных) точках. Таким образом,

вещественная линия второго порядка имеет, вообще говоря, два вещественных и два комплексно-сопряженных фокуса.

Найдем, например, фокусы эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Пучок его касательных имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & A \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & B \\ 0 & 0 & -1 & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}=0,$$

т. е. уравнение

$$a^2A^2+b^2B^2=C^2.$$

Чтобы найти прямые этого пучка, проходящие через циклическую точку $(1:i:0)$, надо решить это уравнение совместно с уравнением

$$A+iB=0.$$

Сделав это, мы получим, что

$$B=iA,$$

$$C=\pm cA,$$

где, как всегда, $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Следовательно, изотропные касательные эллипса, проходящие через циклическую точку $(1:i:0)$, имеют уравнения

$$x+iy\pm c=0.$$

Аналогично показывается, что изотропными касательными эллипса, проходящими через циклическую точку $(1:-i:0)$, являются прямые

$$x-iy\pm c=0.$$

Из четырех точек попарного пересечения этих четырех прямых имеем две вещественные:

$$(-c,\ 0),\quad (c,\ 0)$$

(это — известные из элементарной теории фокусы эллипса) и две мнимые:

$$(0,\ -ic),\quad (0,\ ic)$$

(эти фокусы в элементарной теории не рассматриваются).

Аналогично находятся фокусы гиперболы и параболы.

В частности, мнимыми фокусами любой параболы являются циклические точки, а из вещественных фокусов один является известным элементарным фокусом $(p/2, 0)$, а другой — несобственной точкой ее оси.

Для окружности имеется один («четырехкратный») фокус — ее центр.

Теперь мы видим, что

семейство всех (вещественных) линий второго порядка, касающихся четырех (попарно комплексно-сопряженных) изотропных прямых, является не чем иным, как семейством софокусных эллипсов и гипербол.

Понятие фокуса (и директрисы) имеет красивую интерпретацию и в терминах теории поляр.

Например, легко понять, что

директриса является полярой (одноименного) фокуса.

Упражнение. Докажите это утверждение.

Назовем две прямые *взаимно полярными* (по отношению к данной невырожденной линии второго порядка), если каждая из них проходит через полюс другой прямой (см. предложение 1 п. 3 § 2). Оказывается, что

точка (проективно-евклидовой вещественно-комплексной или вещественной плоскости) тогда и только тогда является фокусом невырожденной линии второго порядка, когда любые две взаимно полярные прямые, проходящие через эту точку, перпендикулярны.

Упражнение. Докажите это утверждение.

Заметим, что это утверждение дает, в частности, проективно-евклидову интерпретацию фокуса на вещественной плоскости (без выхода в комплексную область).

Упражнение. Докажите директориальное свойство эллипса, гиперболы и параболы (предложение 2 п. 1 § 1 гл. 5, предложение 3 п. 2 § 1 гл. 5 и предложение 3 п. 3 § 1 гл. 5), основываясь на материале этого пункта.