Глава 7

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. АФФИННЫЕ, ПРОЕКТИВНЫЕ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Аффинные преобразования

Основным понятием аффинной геометрии является, конечно, понятие прямой. Поэтому естественно возникает вопрос о наиболее общих преобразованиях (вещественной) аффинной плоскости или (вещественного) аффинного пространства, переводящих прямые в прямые. Такого рода преобразования будут в этой главе изучены в рамках элементарного содержательного понимания геометрии. Уточнения аксиоматического плана предоставляются инициативе читателя.

Определение 1. Преобразование (биективное отображение на себя; см. п. 1 § 7 гл. 1) аффинной плоскости или аффинного пространства называется *аффинным*, если любые три коллинеарные точки оно переводит в три коллинеарные точки («сохраняет отношение коллинеарности»).

Замечание 1. Для «плоскостного случая» можно рассматривать также биективные отображения одной плоскости на другую, сохраняющие отношение коллинеарности точек. Такие отображения называются *аффинными отображениями.* Читателю предлагается самостоятельно продумать, что́ из доказываемых ниже утверждений об аффинных преобразованиях сохраняется для аффинных отображений (и в какой форме).

Как и для произвольного преобразования, для любого аффинного преобразования Φ существует обратное преобразование Φ^{-1}.

Оказывается, что

преобразование Φ^{-1}, обратное к аффинному преобразованию Φ, также является аффинным преобразованием.

Рассуждая «от противного», предположим, что существует коллинеарная тройка точек M_1', M_2', M_3', которую преобразование Φ^{-1} переводит в неколлинеарную тройку точек M_1, M_2, M_3. Пусть α' — прямая $M_1'M_2'M_3'$, P — плоскость $M_1M_2M_3$, а α_{12}, α_{13} и α_{23} — прямые M_1M_2, M_1M_3 и M_2M_3 соответственно. По условию

все три прямые α_{12}, α_{13} и α_{23} попарно различны (и не проходят через одну точку).

Пусть M — произвольная точка прямой α_{12} и пусть M' — ее образ при преобразовании Ф. Поскольку тройка M_1, M_2, M коллинеарна, тройка M_1', M_2', M' также коллинеарна, т. е. точка M' принадлежит прямой $\alpha' = M_1'M_2'$. Таким образом, всю прямую α_{12} преобразование Ф переводит в прямую α'. Аналогично доказывается, что преобразование Ф переводит в прямую α' также и прямые α_{13} и α_{23}.

Пусть теперь M — произвольная точка плоскости P, отличная от точек прямых α_{12}, α_{13} и α_{23}. Проведем через эту точку произвольную прямую, пересекающую, скажем, прямые α_{12} и α_{13} в двух различных точках N_2 и N_3. По только что доказанному, образы N_2' и N_3' точек N_2 и N_3 при преобразовании Ф принадлежат прямой α'. С другой стороны, так как точки N_2, N_3, M по построению коллинеарны, то точки N_2', N_3', M' также коллинеарны. Следовательно, точка $M' = \Phi(M)$ принадлежит прямой $\alpha' = N_2'N_3'$. Этим доказано, что преобразование Ф всю плоскость P отображает в прямую α'.

В «плоскостном случае» (Ф является преобразованием плоскости) мы тем самым уже пришли к противоречию (всю плоскость преобразование Ф отображает в ее часть — прямую α', что в силу условия биективности преобразования невозможно).

В «пространственном случае» (Ф является преобразованием пространства) нам следует сделать еще один шаг. Пусть M_0 — произвольная точка пространства, не принадлежащая плоскости P. Рассмотрим плоскость P', содержащую прямую α' и образ M_0' точки M_0 при преобразовании Ф (если точка M_0' не принадлежит прямой α', эта плоскость однозначно определена; в противном случае мы за нее принимаем произвольную плоскость, проходящую через прямую α').

Пусть M — произвольная точка пространства, отличная от точки M_0. Рассмотрим сначала случай, когда прямая M_0M пересекает плоскость P. Пусть N — соответствующая точка пересечения. Поскольку точки M_0, M, N коллинеарны, их образы M_0', M', N' также коллинеарны. Но, по построению, точки M_0' и N' принадлежат плоскости P'. Поэтому точка M' также принадлежит этой плоскости.

Пусть, наконец, прямая M_0M параллельна плоскости P, т. е. пусть точка M принадлежит плоскости P_0, проходящей через точку M_0 параллельно плоскости P. Проведем через точку M произвольную прямую, не лежащую в плоскости P_0, и выберем на ней две точки N_1, N_2, отличные от точки M (и потому не принадлежащие плоскости P_0). По уже доказанному образы N_1' и N_2' точек N_1 и N_2 принадлежат плоскости P'. Следовательно, поскольку точки N_1, N_2, M, а значит, и точки N_1', N_2', M' коллинеарны, точка M' также принадлежит плоскости P'.

Таким образом, преобразование Φ переводит все пространство в плоскость P', что невозможно. Следовательно, преобразование Φ^{-1} не может не быть аффинным.

Ясно, что композиция двух аффинных преобразований также является аффинным преобразованием. Поэтому (см. п. 1 § 7 гл. 1) справедливо следующее

Предложение 1. *Совокупность всех аффинных преобразований плоскости или пространства является группой преобразований.*

Эту группу мы будем обозначать символом Aff(2) в случае плоскости и символом Aff(3) — в случае пространства.

Докажем теперь несколько простейших свойств аффинных преобразований.

Пусть Φ — произвольное аффинное преобразование (плоскости или пространства) и пусть α — произвольная прямая. Выбрав на прямой α две точки M_1 и M_2, рассмотрим прямую α', проходящую через точки M_1' и M_2', являющиеся образами точек M_1 и M_2 при преобразовании Φ. Ясно, что прямая α' содержит образ M' любой точки M прямой α (и потому, в частности, не зависит от выбора точек M_1 и M_2).

Определение 2. Мы будем говорить, что прямая α' *соответствует* прямой α в аффинном преобразовании Φ.

Свойство 1. *Аффинное преобразование* Φ *каждую прямую* α *отображает на соответствующую прямую* α'.

Доказательство. В обратном преобразовании Φ^{-1} прямой α' соответствует, очевидно, прямая α (ибо точки M_1' и M_2' преобразование Φ^{-1} переводит в точки M_1 и M_2). Это означает, что каждая точка M' прямой α' преобразованием Φ^{-1} переводится в некоторую точку M прямой α (напомним, что преобразование Φ^{-1} аффинно). Поскольку $M' = \Phi(M)$, то, следовательно, образом прямой α при преобразовании Φ является вся прямая α'.

Предположим теперь, что Φ является аффинным преобразованием пространства, и рассмотрим произвольную плоскость P. Выбрав на этой плоскости три неколлинеарные точки M_1, M_2, M_3, рассмотрим их образы M_1', M_2', M_3' при преобразовании Φ. По доказанному выше точки M_1', M_2', M_3' не коллинеарны, и потому определяют единственную плоскость P'.

Пусть M — произвольная точка плоскости P и пусть M' — ее образ при преобразовании Φ. Если точка M принадлежит прямой M_1M_2, то точка M' принадлежит прямой $M_1'M_2'$, а значит, и плоскости P'. Аналогично доказывается, что точка M' принадлежит плоскости P' и тогда, когда точка M расположена на прямых M_1M_3 и M_2M_3.

Пусть точка M не принадлежит ни одной из прямых M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3. Проведем через эту точку произвольную прямую, пересекающую, скажем, прямые M_1M_2 и M_1M_3. Пусть N_2 и

N_3 — соответствующие точки пересечения. По уже доказанному, образы N_2' и N_3' этих точек принадлежат плоскости P′. Поэтому точка M', будучи коллинеарной с точками N_2' и N_3', также принадлежит плоскости P′. Таким образом, мы доказали, что

плоскость P′ *содержит образ* M' *произвольной точки* M *плоскости* P.

Это показывает, в частности, что плоскость P′ зависит только от плоскости P и преобразования Φ (но не зависит от выбора точек M_1, M_2, M_3).

Определение 2′. О плоскости P′ мы будем говорить, что она *соответствует* плоскости P в аффинном преобразовании Φ.

Свойство 1′. *Аффинное преобразование* Φ *каждую плоскость* P *отображает на соответствующую плоскость* P′.

Доказательство по существу дословно совпадает с доказательством свойства 1, и потому мы его опустим.

Задание. Докажите свойство 1′.

Замечание 2. Определим отображение Φ_P плоскости P на плоскость P′, считая, что каждую точку M оно переводит в ту же точку M', что и исходное преобразование Φ. (Таким образом, отображения Φ и Φ_P действуют на точках одинаковым образом; их различие состоит только в том, что отображение Φ_P определено лишь для точек M плоскости P, а соответствующие точки M' считаются точками плоскости P′). Свойство 1′ утверждает, что отображение Φ_P является биективным отображением плоскости P на плоскость P′. Кроме того, это отображение сохраняет, очевидно, отношение коллинеарности точек (плоскости P). Таким образом,

отображение Φ_P *является аффинным отображением плоскости* P *на плоскость* P′.

Определение 3. Мы будем говорить, что отображение Φ_P *индуцировано* преобразованием Φ.

Согласно сказанному выше каждое аффинное преобразование Φ определяет некоторое биективное отображение (преобразование) множества всех прямых (плоскости или пространства) на себя, а в «пространственном случае» — и множества всех плоскостей. Мы будем эти преобразования обозначать тем же самым символом Φ.

Свойство 2. *Преобразование* Φ *переводит параллельные прямые в параллельные.*

Доказательство. Параллельные прямые — это непересекающиеся прямые, расположенные в одной плоскости. Поскольку любое аффинное преобразование переводит прямые, расположенные в одной плоскости, в прямые, также расположенные в одной плоскости (для аффинных преобразований плоскости это верно автоматически, а для аффинных преобразований пространства вытекает из свойства 1′), для доказательства свойства 2 достаточно поэтому доказать, что любое аф-

финное преобразование Φ переводит непересекающиеся прямые α и β в прямые α' и β', также не пересекающиеся.

Рассуждая «от противного», предположим, что прямые α' и β' имеют общую точку M'. Пусть $M = \Phi^{-1}(M')$. Поскольку (свойство 1) преобразование Φ отображает прямую α на прямую α', точка M принадлежит прямой α. Но по тем же соображениям точка M принадлежит и прямой β. Таким образом, вопреки предположению, прямые α и β пересекаются.

Свойство 2'. *Преобразование Φ переводит параллельные плоскости в параллельные.*

Задание. Докажите свойство 2'.

Чтобы сформулировать следующее свойство аффинных преобразований, мы рассмотрим две различные точки M_1, M_2 и проходящую через них прямую α. Пусть k — отношение, в котором некоторая точка M прямой α делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ (см. п. 3 § 1 гл. 2). При произвольном аффинном преобразовании Φ коллинеарные точки M_1, M_2, M перейдут в коллинеарные точки M_1', M_2', M', и потому будет определено отношение k', в котором точка M' делит отрезок $\overrightarrow{M_1'M_2'}$.

Свойство 3. *Имеет место равенство*

$$k' = k,$$

т. е. аффинное преобразование сохраняет отношение, в котором данная точка делит данный отрезок.

Поскольку внутренние точки отрезка $\overline{M_1M_2}$ характеризуются условием $0 < k < \infty$, из этого свойства вытекает

Следствие. *Преобразование Φ каждую внутреннюю точку отрезка $\overline{M_1M_2}$ переводит во внутреннюю точку отрезка $\overline{M_1'M_2'}$.*

В отличие от первых двух свойств свойство 3 требует для своего доказательства довольно глубоких соображений. Мы докажем его в следующем пункте, связав аффинные преобразования с линейными операторами.

2. Линейный оператор, индуцированный аффинным преобразованием

Определение 1. Оператором (см. определение 1 п. 1 § 7 гл. 1), *индуцированным* аффинным преобразованием Φ, называется оператор $\boldsymbol{\Phi}$, определенный формулой

$$\boldsymbol{\Phi}(\overrightarrow{M_1M_2}) = \overrightarrow{M_1'M_2'},$$

где $M_1' = \Phi(M_1)$ и $M_2' = \Phi(M_2)$.

Это определение нуждается, конечно, в проверке корректности, т. е. нужно доказать, что

если направленные отрезки $\overrightarrow{M_1M_2}$ *и* $\overrightarrow{N_1N_2}$ *эквиполлентны, то направленные отрезки* $\overrightarrow{M_1'M_2'}$ *и* $\overrightarrow{N_1'N_2'}$ *также эквиполлентны.*

Если бы свойство 3 из п. 1 нами уже было доказано, доказательство этого факта не составляло бы никакого труда. Действительно, по определению, отрезки $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{N_1N_2}$ эквиполлентны, если середина отрезка $\overline{M_1N_2}$ совпадает с серединой отрезка $\overline{M_2N_1}$. Поскольку в силу свойства 3 (примененного к случаю $k = 1/2$) середина отрезка переходит при преобразовании Ф в середину отрезка, то середина отрезка $\overline{M_1'N_2'}$ совпадает с серединой отрезка $\overline{M_2'N_1'}$ и потому направленные отрезки $\overrightarrow{M_1'M_2'}$ и $\overrightarrow{N_1'N_2'}$ эквиполлентны.

Однако к доказательству свойства 3 мы по существу и стремимся. Чтобы разорвать получающийся порочный круг, мы заметим, что в изложенном доказательстве свойство 3 использовалось не в полном объеме, а лишь при $k = 1/2$. Поэтому все будет в порядке, если мы этот частный случай свойства 3 независимо докажем.

Таким образом, все свелось к доказательству того, что

при любом аффинном преобразовании Ф (*плоскости или пространства*) *середина* C *произвольного отрезка* $\overline{M_1M_2}$ *переходит в середину* C' *отрезка* $\overline{M_1'M_2'}$.

Мы сначала докажем это утверждение для случая, когда Ф является аффинным преобразованием плоскости.

С этой целью мы проведем в рассматриваемой плоскости через точки M_1 и M_2 две различные пары параллельных прямых, отличных от прямой M_1M_2. Эти прямые образуют параллелограмм с вершинами в точках M_1, M_2 и еще в двух точках N_1 и N_2. Согласно известному свойству диагоналей параллелограмма, прямые M_1M_2 и N_1N_2 пересекаются в середине C отрезка $\overline{M_1M_2}$. При аффинном преобразовании Ф точки M_1, M_2, N_1 и N_2 перейдут в некоторые точки M_1', M_2', N_1', N_2', причем согласно свойству 2 из п. 1 прямая $M_1'N_1'$ останется параллельна прямой $M_2'N_2'$, а прямая $M_1'N_2'$—прямой $M_2'N_1'$. Другими словами, четырехугольник с вершинами M_1', M_2', N_1', N_2' по-прежнему останется параллелограммом. Следовательно, прямые $M_1'M_2'$ и $N_1'N_2'$ будут пересекаться в точке C', являющейся серединой отрезка $\overrightarrow{M_1'M_2'}$.

Но согласно свойству 1 из п. 1 прямая M_1M_2 отображается на прямую $M_1'M_2'$, а прямая N_1N_2 — на прямую $N_1'N_2'$. Следовательно, точка C пересечения этих прямых перейдет в точку C' пересечения прямых $M_1'M_2'$ и $N_1'N_2'$. Другими словами, середина отрезка $\overline{M_1M_2}$ перейдет в середину отрезка $\overline{M_1'M_2'}$.

В случае, когда Ф представляет собой аффинное преобразование пространства, достаточно рассмотреть произвольную

плоскость, содержащую точки M_1, M_2, и применить уже доказанное утверждение к аффинному отображению этой плоскости, индуцированному преобразованием Φ.

Тем самым корректность определения 1 полностью доказана.

Предложение 1. *Оператор Φ, индуцированный аффинным преобразованием Φ, является линейным оператором.*

Доказательство. Свойство аддитивности

$$\Phi(x+y)=\Phi x+\Phi y$$

означает, что для любых трех точек M_1, M_2, M_3 имеет место равенство

$$\overrightarrow{M_1'M_2'}+\overrightarrow{M_2'M_3'}=\overrightarrow{M_1'M_3'}.$$

Но это очевидно.

Труднее доказывается свойство однородности

$$\Phi(kx)=k\Phi x. \tag{1}$$

В первую очередь мы заметим, что

если $x=0$, то $\Phi x=0$.

Действительно, если $x=\overrightarrow{MM}$, то $\Phi x=\overrightarrow{M'M'}$.

Поэтому соотношение (1) нам нужно доказать только при $x\neq 0$ и $k\neq 0$.

Это соотношение при $x\neq 0$ означает, во-первых, что

векторы Φx и $\Phi(kx)$ коллинеарны,

а во-вторых, что

отношение $\Phi(kx):\Phi x$ коллинеарных векторов $\Phi(kx)$ и Φx равно k.

Первое утверждение доказывается без труда. Действительно, пусть $x=\overrightarrow{OM}$ и $kx=\overrightarrow{ON}$. Тогда $\Phi x=\overrightarrow{O'M'}$ и $\Phi(kx)=\overrightarrow{O'N'}$. Поскольку векторы x и kx коллинеарны, точки O, M, N также коллинеарны. Но тогда коллинеарны и точки O', M', N', что и означает, что векторы $\Phi x=\overrightarrow{O'M'}$ и $\Phi(kx)=\overrightarrow{O'M'}$ коллинеарны.

Таким образом, нам нужно только доказать, что отношение векторов $\Phi(kx)$ и Φx равно k. Для этого мы предварительно докажем, что

отношение $\Phi(kx):\Phi x$ не зависит от вектора x, т. е. для любых двух векторов $x\neq 0$ и $y\neq 0$ имеет место равенство

$$\Phi(kx):\Phi x=\Phi(ky):\Phi y.$$

Предположим сначала, что векторы x и y не коллинеарны. Пусть, как и выше,

$$x=\overrightarrow{OM},\quad kx=\overrightarrow{ON}$$

и пусть

$$y=\overrightarrow{OM_1},\quad ky=\overrightarrow{ON_1}.$$

По условию, прямые $OM = ON$ и $OM_1 = ON_1$ (пересекающиеся в точке O) различны. В этом случае тот факт, что отношение $k\boldsymbol{y} : \boldsymbol{y}$ вектора $k\boldsymbol{y}$ к вектору $\boldsymbol{y}$ равно отношению $k\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x}$ вектора $k\boldsymbol{x}$ к вектору $\boldsymbol{x}$, означает, что прямые MM_1 и NN_1 параллельны. Но тогда (свойство 2 из п. 1) прямые $M'M_1'$ и $N'N_1'$ также параллельны. Следовательно, отношение вектора $\Phi(k\boldsymbol{y}) = \overrightarrow{O'N_1'}$ к вектору $\Phi\boldsymbol{y} = \overrightarrow{O'M_1'}$ равно отношению вектора $\Phi(k\boldsymbol{x}) = \overrightarrow{O'N'}$ к вектору $\Phi\boldsymbol{x} = \overrightarrow{O'M'}$.

В случае, когда векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ коллинеарны, мы введем в рассмотрение третий вспомогательный вектор $\boldsymbol{z}$, им не коллинеарный. Поскольку векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{z}$ не коллинеарны, то по уже доказанному

$$\Phi(k\boldsymbol{x}) : \Phi\boldsymbol{x} = \Phi(k\boldsymbol{z}) : \Phi\boldsymbol{z}.$$

Аналогично,

$$\Phi(k\boldsymbol{y}) : \Phi\boldsymbol{y} = \Phi(k\boldsymbol{z}) : \Phi\boldsymbol{z}.$$

Следовательно,

$$\Phi(k\boldsymbol{x}) : \Phi\boldsymbol{x} = \Phi(k\boldsymbol{y}) : \Phi\boldsymbol{y}.$$

Тем самым независимость отношения $\Phi(k\boldsymbol{x}) : \Phi\boldsymbol{x}$ от выбора вектора $\boldsymbol{x} \neq 0$ полностью доказана.

Это отношение является, таким образом, некоторой функцией только числа k:

$$\Phi(k\boldsymbol{x}) : \Phi\boldsymbol{x} = f(k),$$

и наша задача состоит в том, чтобы доказать, что эта функция тождественно равна k.

Пусть $\boldsymbol{e}$ — произвольный отличный от нуля вектор. Так как для любых чисел k и l

$$(k + l)\,\boldsymbol{e} = k\boldsymbol{e} + l\boldsymbol{e},$$

то в силу уже доказанного свойства аддитивности

$$\Phi((k + l)\,\boldsymbol{e}) = \Phi(k\boldsymbol{e}) + \Phi(l\boldsymbol{e}),$$

и потому

$$\Phi((k + l)\,\boldsymbol{e}) : \Phi\boldsymbol{e} = \Phi(k\boldsymbol{e}) : \Phi\boldsymbol{e} + \Phi(l\boldsymbol{e}) : \Phi\boldsymbol{e},$$

т. е.

$$f(k + l) = f(k) + f(l).$$

Далее,

$$\Phi((kl)\,\boldsymbol{e}) = \Phi(k(l\boldsymbol{e})) = f(k)\,\Phi(l\boldsymbol{e}) = f(k)\,f(l)\,\Phi(l\boldsymbol{e}),$$

т. е.

$$f(kl) = f(k)\,f(l).$$

Наконец, поскольку аффинное преобразование Φ переводит равные векторы в равные, то

$$f(1) = 1.$$

Таким образом, мы доказали, что
функция $f(k)$ обладает следующими тремя свойствами:

$$f(k+l)=f(k)+f(l),$$
$$f(kl)=f(k)f(l),$$
$$f(1)=1.$$

Любая числовая функция $f(k)$, обладающая этими свойствами, называется *автоморфизмом поля* $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Пользуясь этой терминологией, мы можем, следовательно, сказать, что

функция $f(k)$ является автоморфизмом поля $\mathbb{R}$.

Функция $f(k)=k$ является, конечно, автоморфизмом. Этот автоморфизм называется *тождественным.*

Для доказательства предложения 1 нам достаточно теперь доказать следующую лемму:

Лемма Дарбу. *Поле вещественных чисел не имеет автоморфизмов, отличных от тождественного.*

Доказательство. Пусть f — произвольный автоморфизм. Нам нужно доказать, что для любого числа $x\in\mathbb{R}$ имеет место равенство

$$f(x)=x.$$

Мы это сделаем в семь этапов.

1°. *Для любых чисел x_1, x_2 имеет место равенство*

$$f(x_2-x_1)=f(x_2)-f(x_1).$$

Действительно, $x_1+(x_2-x_1)=x_2$, и потому

$$f(x_1)+f(x_2-x_1)=f(x_2).$$

2°. *Если $x_1\leqslant x_2$, то $f(x_1)\leqslant f(x_2)$.*

Действительно,

$$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)=f\left(\left(\sqrt{x_2-x_1}\right)^2\right)=\left(f\left(\sqrt{x_2-x_1}\right)\right)^2\geqslant 0.$$

3°. $f(0)=0$.

Действительно,

$$f(0)=f(1-1)=f(1)-f(1)=0.$$

4°. $f(-x)=-f(x)$.

Действительно,

$$f(-x)=f(0-x)=f(0)-f(x)=0-f(x)=-f(x).$$

5°. $f(x)=x$, *если x — целое.*

Согласно свойству 4° мы без ограничения общности можем предполагать, что целое число x положительно, т. е. является натуральным числом n. Тогда

$$f(n)=f(\underbrace{1+\ldots+1}_{n\text{ раз}})=\underbrace{f(1)+\ldots+f(1)}_{n\text{ раз}}=\underbrace{1+\ldots+1}_{n\text{ раз}}=n.$$

6°. $f(x)=x$, *если* x *рационально.*

Для рационального числа x существует такое натуральное n, что число nx—целое. По уже доказанному $f(nx)=nx$ и $f(n)=n$, а по условию

$$f(nx)=f(n)f(x).$$

Следовательно,

$$f(x)=\frac{f(nx)}{f(x)}=\frac{nx}{n}=x.$$

7°. $f(x)=x$ *для любого вещественного* x.

Действительно, пусть для некоторого x имеет место неравенство $f(x)\neq x$. Предположим для определенности, что $x<f(x)$. Тогда существует такое рациональное число r, что

$$x<r<f(x).$$

В частности, $x<r$, и потому согласно свойствам 2° и 6°

$$f(x)\leqslant f(r)=r,$$

что противоречит неравенству $r<f(x)$. Следовательно, неравенство $x<f(x)$ невозможно.

Аналогично показывается, что невозможно и неравенство $f(x)<x$. Следовательно, $f(x)=x$ для всех x.

Тем самым лемма Дарбу, а вместе с ней и предложение 1, полностью доказаны.

Ясно, что соотношение (1) в точности равносильно сформулированному в конце предыдущего пункта свойству 3 аффинных преобразований. Таким образом, это свойство мы также можем считать доказанным.

Замечание 1. Поскольку аффинное преобразование Φ биективно, оператор $\mathbf{\Phi}$ также биективен. Другими словами (см. п. 4 § 7 гл. 1), *оператор, индуцированный аффинным преобразованием, обратим.*

В п. 3 § 3 гл. 2 мы подробно рассмотрели автоморфизмы аффинной плоскости и показали, в частности, что они совпадают с преобразованиями по равенству координат в двух аффинных координатных системах (для понимания дальнейшего текста знакомство с § 3 гл. 2 необязательно; термин «автоморфизм» можно далее понимать просто как синоним термина «преобразование по равенству координат в двух аффинных координатных системах»).

Аналогичным образом можно, конечно, говорить об автоморфизмах аффинного пространства.

Тот факт, что понятие коллинеарности троек точек имеет смысл в аффинной геометрии, означает, что

любой автоморфизм аффинной плоскости (аффинного пространства) является аффинным преобразованием.

Замечательно, что обратное тоже верно.

Теорема 1. *Любое аффинное преобразование* Φ *аффинной (вещественной) плоскости (аффинного пространства) является ее автоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $Oe_1 \ldots e_n$ — произвольный аффинный координатный репер (где, как всегда, $n = 3$ в случае пространства и $n = 2$ в случае плоскости) и пусть

$$O' = \Phi(O), \quad e'_1 = \Phi e_1, \ \ldots, \ e'_n = \Phi e_n.$$

Поскольку оператор Φ обратим, векторы $e'_1, \ldots, e'_n$ составляют базис, т. е. мы имеем аффинный координатный репер $O'e'_1 \ldots e'_n$.

Пусть M — произвольная точка и $M' = \Phi(M)$ — ее образ при преобразовании Φ. По определению, координаты $x^1, \ldots, x^n$ точки M в репере $Oe_1 \ldots e_n$ определяются из разложения

$$\overrightarrow{OM} = x^1 e_1 + \ \ldots \ + x^n e_n$$

ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ по векторам базиса $e_1, \ldots, e_n$. Применив к обеим частям этого соотношения оператор Φ и воспользовавшись его линейностью, мы получим соотношение

$$\overrightarrow{O'M'} = x^1 e'_1 + \ \ldots \ + x^n e'_n,$$

показывающее, что точка M имеет в репере $O'e'_1 \ldots e'_n$ те же самые координаты $x^1, \ldots, x^n$.

Следовательно, преобразование Φ действительно является преобразованием по равенству аффинных координат, т. е. является автоморфизмом.

Теорема 1 объясняет, почему аффинная геометрия играет такую роль во всех вопросах, связанных с прямыми линиями: она является самой общей геометрией (на обычной плоскости), в которой еще имеет смысл понятие прямой линии.

По аналогии, автоморфизмы аффинной прямой, а также аффинной плоскости (аффинного пространства) над любым полем $\mathbb{K}$ также называются «аффинными преобразованиями».

Подчеркнем, что в случае произвольного поля $\mathbb{K}$ так понимаемые аффинные преобразования уже не будут самыми общими преобразованиями, сохраняющими коллинеарность точек. Например, в случае поля $\mathbb{C}$ преобразование, переводящее каждую точку в точку, имеющую (в данной координатной системе) комплексно-сопряженные координаты, сохраняет, очевидно, отношение коллинеарности, но автоморфизмом (преобразованием по равенству аффинных координат) не является.

Суть дела здесь в том, что для произвольного поля лемма Дарбу неверна.

Задание. Покажите, что преобразование (вещественной) прямой тогда и только тогда является аффинным преобразованием, когда оно сохраняет отношение, в котором данная точка делит данный отрезок.

Поскольку преобразование по равенству координат вполне определено, когда известны реперы $Oe_1 \ldots e_n$ и $O'e'_1 \ldots e'_n$, мы видим, что

аффинное преобразование однозначно определяется репером $O'e'_1 \dots e'_n$, *в который оно переводит данный репер* $Oe_1 \dots e_n$.

Другими словами,

аффинные преобразования, одинаково преобразующие некоторый репер, совпадают.

При этом, поскольку для любых двух реперов $Oe_1 \dots e_n$ и $O'e'_1 \dots e'_n$ существует (единственное) преобразование по равенству координат, мы видим также, что

для любых двух реперов $Oe_1 \dots e_n$ и $O'e'_1 \dots e'_n$ *существует единственное аффинное преобразование, переводящее первый репер во второй.*

Вместо реперов $Oe_1 \dots e_n$ мы можем рассматривать соответствующие системы точек общего положения, состоящие из $n+1$ точек (см. определение 3 п. 1 § 4 гл. 1). Поэтому справедливо следующее

Предложение 2. *Для любых двух троек точек плоскости общего положения (пар точек прямой и четверок точек пространства) существует единственное аффинное преобразование, переводящее первую тройку (пару или четверку) во вторую.*

Замечание 2. Не любую коллинеарную тройку точек плоскости (компланарную четверку точек пространства) можно аффинным преобразованием перевести в данную коллинеарную тройку (компланарную четверку). Когда это все же возможно, соответствующее аффинное преобразование не единственно.

3. Общий вид аффинных преобразований

Предположим теперь, что нами выбрана и зафиксирована некоторая точка O («начало»). Тогда точкам M будут взаимно однозначно соответствовать их радиус-векторы $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OM}$, что позволит нам отождествлять точки и векторы.

В силу этого отождествления каждое аффинное преобразование Φ (прямой, плоскости или пространства) мы можем рассматривать как преобразование соответствующих радиус-векторов. Иными словами, вместо того, чтобы рассматривать точки M и $M' = \Phi(M)$, мы можем рассматривать векторы $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OM}$ и $\boldsymbol{x}' = \overrightarrow{OM'}$. При этом последний вектор естественно обозначать также через $\Phi(\boldsymbol{x})$:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \overrightarrow{OM'}.$$

Замечание 1. Обратим внимание на различие между векторами $\Phi(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{\Phi x}$. Первый зависит от выбора точки O, а второй не зависит.

По определению,

$$\boldsymbol{\Phi x} = \overrightarrow{O'M'}, \quad \text{где} \quad O' = \Phi(O).$$

Поэтому

$$\Phi(x) = \Phi x + b, \tag{1}$$

где

$$b = \overrightarrow{OO'}.$$

Таким образом, мы видим, что

аффинное преобразование Φ *полностью известно* (*при выбранной точке* O), *если известны линейный оператор* Φ *и вектор* b.

Обратно, пусть нам дан произвольный линейный оператор A и произвольный вектор b. Определим отображение Φ (прямой, плоскости или пространства) в себя формулой

$$\Phi(x) = Ax + b, \tag{2}$$

где x — радиус-вектор произвольной точки относительно выбранной точки O.

В соответствии со сказанным выше эта формула означает, что отображение Φ точку M с радиус-вектором $x = \overrightarrow{OM}$ переводит в точку M' с радиус-вектором $OM' = Ax + b$.

Легко видеть, что

если точки с радиус-векторами x_1, x_2, x_3 *коллинеарны, то точки с радиус-векторами* $\Phi(x_1)$, $\Phi(x_2)$, $\Phi(x_3)$ *также коллинеарны.*

Задание. Докажите это утверждение.

Таким образом, мы видим, что рассматриваемое отображение Φ сохраняет отношение коллинеарности точек.

Однако утверждать, что отображение Φ будет аффинным преобразованием, было бы неосторожно, поскольку для этого нужно, чтобы оно было биективным.

Очевидно, что отображение Φ обладает последним свойством (и, следовательно, является аффинным преобразованием) тогда и только тогда, когда линейный оператор A обратим.

Заметим еще, что для аффинного преобразования Φ, определенного формулой (2), индуцированный линейный оператор Φ совпадает с исходным оператором A, а вектор $\overrightarrow{OO'}$ совпадает с вектором b.

Резюмируя все сказанное, мы получаем следующее

Предложение 1. *Выбор точки* O *определяет биективное соответствие между аффинными преобразованиями* Φ *и парами* (A, b), *состоящими из обратимого линейного оператора* A *и произвольного вектора* b. *Оператор* A *и вектор* b, *соответствующие преобразованию* Φ, *определяются формулами*

$$\begin{aligned} A &= \Phi, \\ b &= \overrightarrow{OO'}. \end{aligned} \tag{3}$$

Аффинное преобразование Φ, *соответствующее паре* $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, *определяется формулой*

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{x}$ — *радиус-вектор произвольной точки* (*относительно выбранной точки* O).

Замечание 2. Иногда полезно рассматривать отображения Φ, задаваемые формулой (2), и в случае, когда оператор необратим. Такие отображения называются *вырожденными аффинными преобразованиями.*

Замечание 3. В случае геометрии над произвольным полем $\mathbb{K}$ предложение 1 описывает лишь аффинные автоморфизмы.

Предложение 1 по существу полностью сводит теорию аффинных преобразований к теории линейных операторов. Например, вспомнив формулы (2) п. 3 § 7 гл. 1, выражающие линейный оператор в координатах, мы немедленно получаем, что

в произвольной аффинной координатной системе $Ox^1 \dots x^n$ *каждое аффинное преобразование* Φ *записывается в координатах формулами вида*

$$\begin{aligned} y^1 &= a^1_1 x^1 + \dots + a^1_n x^n + b^1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^n &= a^n_1 x^1 + \dots + a^n_n x^n + b^n, \end{aligned} \tag{4}$$

где $x^1, \dots, x^n$ — *координаты произвольной точки* M (*т. е. координаты ее радиус-вектора* $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OM}$), $y^1, \dots, y^n$ — *координаты преобразованной точки* $M' = \Phi(M)$ (*т. е. координаты радиус-вектора* $\Phi(\boldsymbol{x}) = \overrightarrow{OM'}$),

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a^n_1 & \dots & a^n_n \end{pmatrix}$$

— *матрица обратимого линейного оператора* $\boldsymbol{\Phi}$, *индуцированного аффинным преобразованием* Φ, $b^1, \dots, b^n$ — *координаты точки* $O' = \Phi(O)$ (*т. е. координаты радиус-вектора* $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OO'}$).

Без ссылки на линейные операторы матрица

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a^n_1 & \dots & a^n_n \end{pmatrix}$$

может быть описана как матрица, столбцы которой состоят из координат точек $E'_1, \dots, E'_n$, являющихся образами при преобразовании Φ единичных точек $E_1, \dots, E_n$ координатных осей (т. е. при $n = 3$ — точек $E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$, $E_3(0, 0, 1)$; при $n = 2$ — точек $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$ и при $n = 1$ — точки $E_1(1)$).

Обратно,
любое неоднородное линейное преобразование

$$y^1 = a_1^1 x^1 + \ldots + a_n^1 x^n + b^1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^n = a_1^n x^1 + \ldots + a_n^n x^n + b^n$$

с невырожденной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}$$

задает (в данной аффинной координатной системе) некоторое аффинное преобразование Φ.

Действительно, преобразование Φ можно записать в виде

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{A}$ — линейный оператор с матрицей A, а $\boldsymbol{b}$ — вектор с координатами $b^1, \ldots, b^n$. Поэтому это преобразование аффинно.

Замечание 4. Установленные результаты утверждают изоморфизм группы аффинных преобразований $\mathrm{Aff}(n)$ с группой $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ неоднородных линейных преобразований. Очевидно, что это в точности изоморфизм

$$\Phi \longmapsto \alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1},$$

рассмотренный в п. 3 § 3 гл. 2.

Определение 1. Аффинное преобразование Φ называется *сохраняющим ориентации*, если индуцированный им линейный оператор $\boldsymbol{\Phi}$ сохраняет ориентации (см. п. 6 § 7 гл. 1), т. е. если оно является преобразованием по равенству координат в двух одноименных координатных системах.

Ясно, что
совокупность $\mathrm{Aff}^+(n)$ *всех сохраняющих ориентации аффинных преобразований является подгруппой (даже нормальным делителем) группы* $\mathrm{Aff}(n)$.

Аналогично,
совокупность $\mathrm{Aff}^-(n)$ *аффинных преобразований, обращающих ориентации, является смежным классом группы* $\mathrm{Aff}(n)$ *по подгруппе* $\mathrm{Aff}^+(n)$.

Определение 2. Аффинное преобразование называется *параллельным переносом*, если оно индуцирует тождественный линейный оператор $\boldsymbol{E}$.

Согласно сказанному выше любой параллельный перенос Φ записывается (в радиус-векторах относительно некоторой точки O) формулой вида

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OO'}$. Но, если точка M имеет радиус-вектор $\boldsymbol{x}$, а точка $M' = \Phi(M)$ — радиус-вектор $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, то вектор $\overrightarrow{MM'}$ равен $\boldsymbol{b}$. Следовательно, параллельный перенос Φ произвольную точку M переводит в такую точку M', что

$$\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{b}.$$

Обратно, ясно, что если преобразование Φ таково, что для любой точки M имеет место равенство

$$\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{b}$ — некоторый фиксированный вектор, то это преобразование является параллельным переносом. Таким образом, мы могли бы о п р е д е л и т ь параллельный перенос как преобразование, обладающее этим свойством.

С последним определением читатель, без сомнения, уже знаком из элементарного курса геометрии.

Ясно, что, сопоставив параллельному переносу $\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ вектор $\boldsymbol{b}$, мы получим биективное соответствие между переносами и векторами из $\mathrm{Vect}(n)$. Более того, легко видеть, что композиция $\Phi_2 \circ \Phi_1$ двух параллельных переносов Φ_1 и Φ_2 также является параллельным переносом, причем, если переносам Φ_1 и Φ_2 соответствуют векторы $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$, то переносу $\Phi_2 \circ \Phi_1$ соответствует вектор $\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$. Это означает, во-первых, что

совокупность $\mathrm{Trans}(n)$ *всех параллельных переносов является подгруппой группы* $\mathrm{Aff}(n)$ (*и даже подгруппы* $\mathrm{Aff}^+(n)$), и, во-вторых, что

соответствие

$$\text{«параллельный перенос»} \longmapsto \text{«вектор } \overrightarrow{OO'}\text{»}$$

определяет изоморфизм группы $\mathrm{Trans}(n)$ *на линеал* $\mathrm{Vect}(n)$, *рассматриваемый как группа относительно операции сложения векторов.*

В частности, мы видим, что

группа $\mathrm{Trans}(n)$ — *абелева, т. е. композиция любых двух параллельных переносов* Φ_1 *и* Φ_2 *не зависит от их порядка*:

$$\Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1.$$

Замечание 5. Очевидно, что отображение

$$\Phi \longmapsto \boldsymbol{\Phi}$$

является эпиморфизмом группы $\mathrm{Aff}(n)$ на группу $\mathrm{Op}(n)$ (отображающим подгруппу $\mathrm{Aff}^+(n)$ на подгруппу $\mathrm{Op}^+(n)$, а смежный класс $\mathrm{Aff}^-(n)$ — на смежный класс $\mathrm{Op}^-(n)$).

Поскольку ядром этого эпиморфизма является, по определению, группа $\mathrm{Trans}(n)$, мы видим, что

группа $\mathrm{Trans}(n)$ *является не только подгруппой, но даже нормальным делителем группы* $\mathrm{Aff}(n)$ (*а также группы* $\mathrm{Aff}^+(n)$), *причем имеют место изоморфизмы*:

$$\mathrm{Aff}(n)/\mathrm{Trans}(n) \approx \mathrm{Op}(n), \quad \mathrm{Aff}^+(n)/\mathrm{Trans}(n) \approx \mathrm{Op}^+(n).$$

4. Проективные преобразования

По аналогии с определением 1 п. 1 мы принимаем следующее

Определение 1. Преобразование вещественной проективной плоскости (или вещественного проективного пространства) называется *проективным*, если каждую тройку коллинеарных точек оно переводит в тройку коллинеарных точек.

Таким образом, различие между аффинными и проективными преобразованиями состоит формально только в том, что первые действуют на аффинной плоскости (аффинном пространстве), а вторые — на проективной плоскости (проективном пространстве).

Точно так же, как и для аффинных преобразований, показывается, что

преобразование, обратное к проективному, проективно.

Задание. Докажите это утверждение.

Отсюда непосредственно вытекает, что

совокупность всех проективных преобразований плоскости или пространства является группой.

Эту группу мы будем обозначать символом $\mathrm{Proj}(2)$ в случае плоскости и символом $\mathrm{Proj}(3)$ в случае пространства.

Пусть Π — произвольное проективное преобразование проективной плоскости $\mathfrak{M}$ и пусть α — произвольная прямая плоскости $\mathfrak{M}$. Эту прямую преобразование Π отображает на некоторую прямую α', а множество $\mathfrak{M} \setminus \alpha$ точек плоскости $\mathfrak{M}$, не принадлежащих прямой α, — на множество $\mathfrak{M} \setminus \alpha'$ точек, не принадлежащих прямой α'. Но мы знаем (п. 5 § 1 гл. 4), что при удалении из проективной плоскости некоторой прямой остается аффинная плоскость. Таким образом, проективное преобразование Π индуцирует некоторое отображение аффинной плоскости $\mathfrak{M} \setminus \alpha$ на аффинную плоскость $\mathfrak{M} \setminus \alpha'$. Это отображение биективно и сохраняет коллинеарность троек точек, т. е. является аффинным отображением.

Тем самым доказано, что

проективное преобразование Π *проективной плоскости* $\mathfrak{M}$, *переводящее прямую* α *в прямую* α', *индуцирует некоторое аффинное отображение* Π' *аффинной плоскости* $\mathfrak{M} \setminus \alpha$ *на аффинную плоскость* $\mathfrak{M} \setminus \alpha'$.

Докажем теперь следующее

Предложение 1. *Соответствие*

$$\Pi \longmapsto \Pi' \tag{1}$$

является биективным соответствием между множеством всех проективных преобразований проективной плоскости $\mathfrak{M}$, *переводящих прямую* α *в прямую* α', *и множеством всех аффинных отображений аффинной плоскости* $\mathfrak{M} \setminus \alpha$ *на аффинную плоскость* $\mathfrak{M} \setminus \alpha'$.

Доказательство. Чтобы доказать инъективность соответствия (1), нужно доказать, что аффинное отображение Π' однозначно определяет соответствующее проективное преобразование Π.

Но для точек M, не принадлежащих прямой α, это очевидно, ибо для таких точек по определению

$$\Pi(M) = \Pi'(M).$$

Поэтому вопрос может стоять только для точек M прямой α.

Пусть M — произвольная такая точка. Проведем через эту точку произвольную прямую β, отличную от прямой α, и выберем на прямой β две точки N_1 и N_2, отличные от точки M. Прямая β' плоскости $\mathfrak{M}$, в которую преобразование Π переводит прямую β, однозначно характеризуется как прямая, проходящая через точки $N_1' = \Pi(N_1)$ и $N_2' = \Pi(N_2)$. С другой стороны, поскольку точки N_1 и N_2 не принадлежат, очевидно, прямой α, то

$$N_1' = \Pi'(N_1), \quad N_2' = \Pi'(N_2).$$

Следовательно, прямая β' однозначно определяется отображением Π', т. е. может быть полностью восстановлена, когда известно это отображение. Но точка $M' = \Pi(M)$ является, очевидно, точкой пересечения прямых α' и β', и потому также однозначно определяется отображением Π'. Таким образом, аффинное отображение Π' однозначно определяет проективное преобразование Π, т. е. соответствие (1) инъективно.

Чтобы доказать его надъективность, мы «обратим» предыдущее рассуждение. Именно для любого аффинного отображения Φ плоскости $\mathfrak{M} \setminus \alpha$ на плоскость $\mathfrak{M} \setminus \alpha'$ мы для точек M, не принадлежащих прямой α, определим преобразование Π формулой

$$\Pi(M) = \Phi(M),$$

а для точек M, принадлежащих этой прямой, — следующим построением: выберем произвольную прямую β, проходящую через точку M, на этой прямой выберем две точки N_1 и N_2, отличные от точки M, рассмотрим прямую β', проходящую через точки $N_1' = \Phi(N_1)$, $N_2' = \Phi(N_2)$, и примем за точку $M' = \Pi(M)$ точку пересечения прямых α' и β'.

Конечно, здесь нужно проверить, во-первых, корректность, т. е. независимость точки M' от выбора прямой β и точек N_1 и N_2, а во-вторых, — что получающееся отображение П является проективным преобразованием. Все эти проверки совершенно автоматичны (хотя и несколько утомительны), и мы оставим их читателю.

Поскольку построенное проективное преобразование $\Pi\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ индуцирует, очевидно, данное аффинное отображение:

$$\Pi' = \Phi,$$

предложение 1 тем самым полностью доказано.

Упражнение. Сформулируйте и докажите аналог предложения 1 для проективных преобразований пространства.

Предложение 1 по существу сводит изучение проективных преобразований к изучению аффинных отображений. Например, мы знаем (теорема 1 п. 2), что любое аффинное преобразование является преобразованием по равенству аффинных координат. Ясно, что аналогичное утверждение имеет место и для аффинных отображений. Отсюда уже без особого труда вытекает аналогичное утверждение и для проективных преобразований:

Предложение 2. *Любое проективное преобразование является преобразованием по равенству координат в двух проективных координатых системах (т. е. является проективным автоморфизмом).*

Доказательство. Пусть проективное преобразование П проективной плоскости $\mathfrak{M}$ переводит прямую α в прямую α' и потому индуцирует аффинное отображение Π' аффинной плоскости $\mathfrak{M}\setminus\alpha$ на аффинную плоскость $\mathfrak{M}\setminus\alpha'$. Согласно сказанному выше отображение Π' является отображением по равенству некоторых аффинных координат. Пусть x, y — эти координаты на плоскости $\mathfrak{M}\setminus\alpha$, а x', y' — координаты на плоскости $\mathfrak{M}\setminus\alpha'$. Рассмотрим соответствующие однородные аффинные координаты $X : Y : Z$ и $X' : Y' : Z'$. Как первые, так и вторые координаты являются проективными координатами на плоскости $\mathfrak{M}$. Соответствующее преобразование по равенству координат (проективный автоморфизм) переводит прямую α (имеющую уравнение $Z = 0$) в прямую α' (имеющую уравнение $Z' = 0$) и индуцирует, очевидно, аффинное отображение Π' аффинной плоскости $\mathfrak{M}\setminus\alpha$ на аффинную плоскость $\mathfrak{M}\setminus\alpha'$. Поэтому этот проективный автоморфизм совпадает с данным проективным преобразованием П.

Замечание 1. Подчеркнем, что предложение 2 (так же как и аналогичное утверждение для аффинных преобразований) справедливо только для вещественной проективной плоскости. Для плоскостей над другими полями класс преобразований, сохраняющих коллинеарность троек точек, как правило, шире

класса проективных автоморфизмов. Тем не менее, и в случае произвольного поля $\mathbb{K}$ (а также в случае проективной прямой) принято употреблять термин «проективное преобразование» как синоним термина «проективный автоморфизм».

Из предложения 2 немедленно вытекает, что

любое проективное преобразование проективной плоскости в произвольной системе проективных координат $X:Y:Z$ задается формулами вида

$$\rho X' = a_1^1 X + a_2^1 Y + a_3^1 Z,$$
$$\rho Y' = a_1^2 X + a_2^2 Y + a_3^2 Z,$$
$$\rho Z' = a_1^3 X + a_2^3 Y + a_3^3 Z,$$

где

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

и, обратно, любые формулы такого вида задают некоторое проективное преобразование.

В этих формулах ρ — произвольный (отличный от нуля) множитель пропорциональности.

В более «инвариантных» терминах это утверждение означает, что соответствие

$$\Pi \longmapsto \alpha \circ \Pi \circ \alpha^{-1},$$

где $\Pi\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ — произвольное проективное преобразование, а $\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}P^2$ — данная проективная координатная система, устанавливает изоморфизм группы $\mathrm{Proj}(2)$ проективных преобразований на группу $\mathrm{Proj}(\mathbb{R}P^2)$ проективных автоморфизмов стандартной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ (ср. замечание 4 п. 3).

Предложение 3. *Для любых двух четверок E_0, E_1, E_2, E_3 и E_0', E_1', E_2', E_3' точек общего положения проективной плоскости существует одно и только одно проективное преобразование, переводящее первую четверку во вторую.*

Доказательство этого предложения вполне аналогично доказательству соответствующего предложения для аффинных преобразований (см. предложение 2 п. 2): требуемым проективным преобразованием является преобразование по равенству проективных координат с реперами E_0, E_1, E_2, E_3 и E_0', E_1' E_2' E_3' соответственно (см. предложение 1 п. 5 § 1 гл. 4).

Задание. Сформулируйте и докажите аналог предложения 3 для проективных преобразований пространства.

Наглядное описание проективных преобразований плоскости можно получить, воспользовавшись проективной плоскостью $\mathfrak{M}_0$ (см. п. 5 § 1 гл. 4), точками которой являются прямые про-

странства (аффинного), проходящие через фиксированную точку O. Каждое аффинное преобразование Φ пространства, оставляющее точку O на месте, переводит прямые в прямые и потому индуцирует некоторое преобразование Π_Φ проективной плоскости $\mathfrak{M}_O$, сохраняющее коллинеарность троек точек, т. е. являющееся проективным преобразованием. Ясно, что соответствие

$$\Phi \longmapsto \Pi_\Phi$$

является гомоморфизмом группы $\mathrm{Aff}_O(3)$ всех аффинных преобразований пространства, оставляющих на месте точку O, в группу $\mathrm{Proj}(2) = \mathrm{Proj}(\mathfrak{M}_O)$.

Упражнение. Докажите, что отображение $\Phi \longmapsto \Pi_\Phi$ является *эпиморфизмом*, т. е. что

любое проективное преобразование плоскости индуцируется некоторым аффинным преобразованием пространства.

К числу аффинных преобразований из группы $\mathrm{Aff}_O(3)$ принадлежат *гомотетии* пространства с центром в точке O. Ясно, что эти гомотетии образуют подгруппу $\mathrm{Hom}_O(3)$ группы $\mathrm{Aff}_O(3)$.

Упражнение. Докажите, что

ядром гомоморфизма $\Phi \longmapsto \Pi_\Phi$ *является группа* $\mathrm{Hom}_O(3)$.

Следовательно,

группа $\mathrm{Proj}(2)$ *изоморфна факторгруппе группы* $\mathrm{Aff}_O(3)$ *по подгруппе* $\mathrm{Hom}_O(3)$.

Замечание 2. В частности, мы видим, что группа $\mathrm{Hom}_O(3)$ является нормальным делителем группы $\mathrm{Aff}_O(3)$.

Выражаясь несколько вольно, мы можем, таким образом, сказать, что проективные преобразования проективной плоскости являются не чем иным, как рассматриваемыми с точностью до гомотетии аффинными преобразованиями аффинного пространства, оставляющими на месте данную точку.

5. Ортогональные преобразования

Основным понятием евклидовой геометрии является понятие расстояния. Естественно поэтому, что важную роль в евклидовой геометрии должны играть преобразования, сохраняющие расстояния. Такие преобразования называются «ортогональными».

Дадим точное определение.

Определение 1. Отображение Φ прямой, плоскости или пространства в себя называется *ортогональным преобразованием*, если для любых точек M_1 и M_2 длина $|M_1M_2|$ отрезка $\overline{M_1M_2}$ равна длине $|M_1'M_2'|$ отрезка $\overline{M_1'M_2'}$:

$$|M_1'M_2'| = |M_1M_2|, \qquad M_1' = \Phi(M_1), \quad M_2' = \Phi(M_2).$$

Чтобы оправдать эту терминологию, следует, конечно, показать, что ортогональные преобразования действительно являются преобразованиями, т. е. биективными отображениями прямой, плоскости или пространства на себя.

Инъективность ортогонального преобразования Φ очевидна: если $M_1' = M_2'$, то $|M_1'M_2'| = 0$, и потому $|M_1M_2| = 0$, т. е. $M_1 = M_2$.

Чтобы показать, что Φ надъективно, нам понадобятся некоторые предварительные рассмотрения.

Пусть нам даны три различные точки M_1, M_2 и M_3. Для упрощения формул положим

$$r_1 = |M_2M_3|, \quad r_2 = |M_1M_3|, \quad r_3 = |M_1M_2|.$$

Лемма 1. *Точки M_1, M_2, M_3 тогда и только тогда не коллинеарны, когда одновременно выполнены три неравенства*

$$r_1 < r_2 + r_3, \quad r_2 < r_1 + r_3, \quad r_3 < r_1 + r_2.$$

Для коллинеарных (различных) точек M_1, M_2, M_3 одно и только одно из этих неравенств обращается в равенство. Именно,

$$r_1 = r_2 + r_3$$

тогда и только тогда, когда точка M_1 лежит между точками M_2 и M_3;

$$r_2 = r_1 + r_3$$

тогда и только тогда, когда точка M_2 лежит между точками M_1 и M_3;

$$r_3 = r_1 + r_2$$

тогда и только тогда, когда точка M_3 лежит между точками M_1 и M_2.

Доказательство. Первое утверждение непосредственно вытекает из известной теоремы о сумме длин двух сторон треугольника. Остальные утверждения очевидны.

Эта лемма показывает, что

коллинеарность или неколлинеарность тройки точек, а в случае коллинеарности — характер их взаимного расположения (какая точка находится между какими), полностью определяется взаимными расстояниями между этими точками.

Но, по определению, ортогональное преобразование сохраняет расстояние между точками. Поэтому

каждое ортогональное преобразование переводит неколлинеарные точки в неколлинеарные, а коллинеарные — в коллинеарные, причем в последнем случае характер взаимного расположения точек не меняется.

Более того, так как отношение k, в котором, скажем, точка M_2 делит отрезок $\overrightarrow{M_1M_3}$, определяется характером взаимного расположения этих точек и расстояниями между ними (расстоя-

ния определяют абсолютную величину отношения, а характер взаимного расположения — его знак), то

каждое ортогональное преобразование сохраняет отношение, в котором точка делит отрезок,

т. е., более распространенно,

если точка M_2 *делит отрезок* $\overrightarrow{M_1M_3}$ *в отношении* k, *то для любого ортогонального преобразования* Φ *точка* $M_2' = \Phi(M_2)$ *делит отрезок* $\overrightarrow{M_1'M_3'}$, *где* $M_1' = \Phi(M_1)$ *и* $M_3' = \Phi(M_3)$, *в том же отношении* k.

Так как ортогональные преобразования сохраняют коллинеарность точек, то для любых двух различных точек M_1 и M_2 ортогональное преобразование Φ отображает прямую M_1M_2 в прямую $M_1'M_2'$. Более того, на самом деле,

преобразование Φ *отображает прямую* M_1M_2 *на прямую* $M_1'M_2'$.

Действительно, пусть M' — произвольная точка прямой $M_1'M_2'$ и пусть k — отношение, в котором эта точка делит отрезок $\overrightarrow{M_1'M_2'}$. Рассмотрим на прямой M_1M_2 точку M, делящую отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ в отношении k. По доказанному выше, ортогональное преобразование Φ переводит точку M в точку M'', делящую отрезок $\overrightarrow{M_1'M_2'}$ в том же отношении k. Но если две точки делят один и тот же отрезок в одном и том же отношении, то они совпадают. Следовательно, $M'' = M'$, так что любая точка прямой $M_1'M_2'$ действительно является образом при преобразовании Φ некоторой точки прямой M_1M_2.

Теперь мы уже можем доказать, что

каждое ортогональное преобразование Φ (*прямой, плоскости или пространства*) *надъективно.*

Для случая прямой это непосредственно вытекает из предыдущего утверждения.

Рассмотрим случай плоскости. Пусть M_1, M_2, M_3 — три неколлинеарные точки. По доказанному выше, преобразование Φ переводит эти точки в три неколлинеарные точки M_1', M_2', M_3' и отображает прямые M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3 на прямые $M_1'M_2'$, $M_1'M_3'$, $M_2'M_3'$. Мы должны доказать, что для любой точки M' существует такая точка M, что $M' = \Phi(M)$. При этом без ограничения общности мы можем предполагать, что точка M' не принадлежит прямым $M_1'M_2'$, $M_1'M_3'$ и $M_2'M_3'$. Проведем через точку M' произвольную прямую, пересекающую, скажем, прямые $M_1'M_2'$ и $M_1'M_3'$ в некоторых точках N_2' и N_3'. По доказанному выше, точки N_2' и N_3' являются образами некоторых точек N_2 и N_3 (лежащих соответственно на прямых M_1M_2 и M_1M_3). Рассмотрим прямую N_2N_3. Как мы знаем, эта прямая отображается на прямую $N_2'N_3'$. Но точка M' принадлежит, по построению, прямой $N_2'N_3'$. Поэтому на прямой N_2N_3 существует

такая точка M, что $M' = \Phi(M)$. Тем самым для случая плоскости наше утверждение полностью доказано.

Для случая пространства изложенное рассуждение показывает, что ортогональное преобразование Φ отображает плоскость, проходящую через три неколлинеарные точки M_1, M_2, M_3, на плоскость, проходящую через точки M_1', M_2', M_3'. Выберем в пространстве две различные непараллельные плоскости P_1 и P_2. Согласно только что сказанному, преобразование Φ отображает эти плоскости на некоторые плоскости P_1' и P_2'. Поскольку линия пересечения плоскостей P_1 и P_2 переходит при преобразовании Φ в линию пересечения плоскостей P_1' и P_2', последние плоскости не параллельны (и различны). Рассмотрим теперь в пространстве произвольную точку M'. Без ограничения общности мы можем считать, что эта точка не принадлежит плоскостям P_1' и P_2', так что через нее можно провести прямую, пересекающую эти плоскости в двух различных точках N_1' и N_2'. Пусть N_1 и N_2 — точки, переходящие при преобразовании Φ в точки N_1' и N_2' (на основании только что сказанного такие точки существуют). Как мы знаем, преобразование Φ отображает прямую N_1N_2 на прямую $N_1'N_2'$. Следовательно, на прямой N_1N_2 найдется точка M, обладающая тем свойством, что $M' = \Phi(M)$. Тем самым наше утверждение доказано и в случае пространства.

Тот факт, что ортогональное преобразование сохраняет коллинеарность точек (и отношение, в котором точка делит отрезок), означает теперь, что оно является аффинным преобразованием (в том числе и в случае прямой). Таким образом, в качестве окончательного результата (покрывающего все доказанные в этом пункте утверждения) мы получаем следующее

Предложение 1. *Любое ортогональное преобразование является аффинным преобразованием.*

Это означает, что совокупность $\mathrm{Ort}(n)$ всех ортогональных преобразований прямой ($n = 1$), плоскости ($n = 2$) или пространства ($n = 3$), являющаяся, очевидно, группой, представляет собой подгруппу группы $\mathrm{Aff}(n)$.

Будучи аффинным преобразованием, каждое ортогональное преобразование Φ индуцирует некоторый линейный оператор $\mathbf{\Phi}$. По определению, этот оператор переводит произвольный вектор $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{M_1M_2}$ в вектор $\mathbf{\Phi}\boldsymbol{x} = \overrightarrow{M_1'M_2'}$, где $M_1' = \Phi(M_1)$ и $M_2' = \Phi(M_2)$. Но, по условию,

$$|M_1'M_2'| = |M_1M_2|,$$

т. е.

$$|\mathbf{\Phi}\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|.$$

Тем самым доказано (см. п. 7 §7 гл. 1), что

для любого ортогонального преобразования Φ индуцированный линейный оператор $\mathbf{\Phi}$ является изометричным оператором.

Легко видеть, что и обратно,

аффинное преобразование Φ, *индуцирующее изометричный линейный оператор* $\boldsymbol{\Phi}$, *является ортогональным преобразованием.*

Действительно, как мы знаем, в радиус-векторах относительно некоторой точки O аффинное преобразование Φ записывается формулой

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Phi x} + \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{b}$ — некоторый вектор. С другой стороны, для любых точек $M_1(\boldsymbol{x}_1)$ и $M_2(\boldsymbol{x}_2)$

$$|M_1M_2| = |\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1|.$$

Поэтому, если линейный оператор $\boldsymbol{\Phi}$ изометричен, то

$$|M_1'M_2'| = |\Phi(\boldsymbol{x}_2) - \Phi(\boldsymbol{x}_1)| = |\boldsymbol{\Phi x}_2 - \boldsymbol{\Phi x}_1| = |\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)| = \\ = |\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1| = |M_1M_2|,$$

так что преобразование Φ ортогонально.

На языке теории групп эти утверждения означают, что

эпиморфизм $\Phi \longmapsto \boldsymbol{\Phi}$ *группы* $\mathrm{Aff}(n)$ *на группу* $\mathrm{Op}(n)$ *отображает подгруппу* $\mathrm{Ort}(n)$ *на подгруппу* $\mathrm{Iso}(n)$.

Отсюда и из известных свойств изометричных линейных операторов (см. п. 7 § 7 гл. 1) немедленно вытекают следующие свойства ортогональных преобразований:

Свойство 1. *Каждое ортогональное преобразование* Φ *сохраняет не только длины, но и углы, т. е. для любых трех неколлинеарных точек* O, A, B *угол* $\angle OAB$ *равен углу* $\angle O'A'B'$.

Замечание 1. Это свойство легко доказывается и непосредственно: поскольку преобразование Φ сохраняет длины, стороны треугольника OAB равны соответствующим сторонам треугольника $O'A'B'$, так что эти треугольники конгруэнтны и потому их соответственные углы равны.

Свойство 2. *Преобразование (прямой, плоскости или пространства) тогда и только тогда ортогонально, когда оно действует по равенству координат в двух прямоугольных реперах (т. е. является евклидовым автоморфизмом*; см. п. 2 § 3 гл. 2).

В частности, это означает, что

любое ортогональное преобразование переводит произвольный прямоугольный репер $O\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 \ldots \boldsymbol{i}_n$ *снова в прямоугольный репер* $O'\boldsymbol{i}_1' \ldots \boldsymbol{i}_n'$

и обратно,

для любых двух прямоугольных реперов $O\boldsymbol{i}_1 \ldots \boldsymbol{i}_n$ *и* $O'\boldsymbol{i}_1' \ldots \boldsymbol{i}_n'$ *существует (единственное) ортогональное преобразование, переводящее первый репер во второй.*

Свойство 3. *Аффинное преобразование тогда и только тогда ортогонально, когда в некоторой (а потому и в любой) системе*

прямоугольных координат оно выражается формулами

$$y^1 = a_1^1 x^1 + \ldots + a_n^1 x^n + b^1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^n = a_1^n x^1 + \ldots + a_n^n x^n + b^n,$$

где

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}$$

— ортогональная матрица.

Являясь аффинным преобразованием, каждое ортогональное преобразование либо сохраняет, либо обращает ориентации. Ясно, что

совокупность $\mathrm{Ort}^+(n)$ *всех ортогональных преобразований, сохраняющих ориентации, является подгруппой (даже нормальным делителем) группы* $\mathrm{Ort}(n)$, *а совокупность* $\mathrm{Ort}^-(n)$ всех *ортогональных преобразований, обращающих ориентации, является смежным классом группы* $\mathrm{Ort}(n)$ *по подгруппе* $\mathrm{Ort}^+(n)$.

Замечание 2. Обратим внимание на то, что группа $\mathrm{Ort}^+(n)$ не является нормальным делителем группы $\mathrm{Aff}(n)$ (и даже группы $\mathrm{Aff}^+(n)$).

Каждый параллельный перенос является, очевидно, ортогональным преобразованием, сохраняющим ориентации. Следовательно,

группа $\mathrm{Trans}(n)$ *является подгруппой группы* $\mathrm{Ort}^+(n)$.

Более того, так как $\mathrm{Trans}(n)$ является ядром гомоморфизма, сопоставляющего каждому ортогональному преобразованию индуцированный линейный оператор, то

группа $\mathrm{Trans}(n)$ *является нормальным делителем группы* $\mathrm{Ort}^+(n)$ *(и даже группы* $\mathrm{Ort}(n)$*), причем*:

$$\mathrm{Ort}^+(n)/\mathrm{Trans}(n) \approx \mathrm{Iso}^+(n), \quad \mathrm{Ort}(n)/\mathrm{Trans}(n) \approx \mathrm{Iso}(n).$$

Определение 2. Ортогональные преобразования, сохраняющие ориентации (т. е. элементы группы $\mathrm{Ort}^+(n)$), мы будем называть также *движениями.*

Обычно (например, в школьном курсе) движение (скажем, плоскости) определяют как результат непрерывного перемещения плоскости самой по себе. (Обратим внимание на различие между движениями и перемещениями: движение является результатом перемещения.) Поскольку при любом перемещении взаимные расстояния между точками не меняются и поскольку (в силу непрерывности перемещения) ориентация каждого репера при перемещении остается той же самой, движение в этом смысле является движением в смысле определения 2.

Обратно, ясно, что, непрерывно двигая некоторый прямоугольный репер $Oe_1 \ldots e_n$, мы можем его совместить с любым другим одноименным с ним прямоугольным репером $O'e_1' \ldots e_n'$. (Например, на плоскости, чтобы совместить прямоугольный репер Oe_1e_2 с одноименным прямоугольным репером

$O'e_1'e_2'$, достаточно передвинуть точку O в точку O', а затем повернуть плоскость на угол между векторами e_1 и e_1'.) Следовательно, для любого сохраняющего ориентации ортогонального преобразования Φ существует движение Ψ (результат перемещения), переводящее данный репер $Oe_1 \ldots e_n$ в тот же репер, что и преобразование Φ. Но мы знаем, что для любых двух прямоугольных реперов существует только одно ортогональное преобразование, переводящее первый репер во второй. Следовательно, $\Phi = \Psi$.

Таким образом,

движения, как мы их определили, совпадают с движениями в элементарно-геометрическом смысле.

Преимущество нашего определения состоит в том, что оно не использует лежащих вне математики понятий механики.

Определение 3. Движение, оставляющее на месте некоторую точку O, называется *вращением с центром* O.

Ясно, что композиция двух вращений с центром O также является вращением с центром O (ибо если $\Phi(O) = O$ и $\Psi(O) = O$, то $(\Phi \circ \Psi)(O) = O$). Это означает, что

совокупность $\mathrm{Rot}_O(n)$ *всех вращений с данным центром* O *является подгруппой группы движений* $\mathrm{Ort}^+(n)$.

В радиус-векторах относительно точки O каждое вращение Φ с центром O записывается формулой

$$\Phi(x) = \mathbf{\Phi} x,$$

где, как всегда, $\mathbf{\Phi}$ — изометричный линейный оператор, индуцированный преобразованием Φ. Это показывает, что

соответствие

«вращение Φ» $\longmapsto$ *«индуцированный оператор* $\mathbf{\Phi}$»

устанавливает изоморфизм группы $\mathrm{Rot}_O(n)$ *на группу* $\mathrm{Iso}^+(n)$.

Поскольку последняя группа изоморфна группе $\mathrm{SO}(n)$, мы видим также, что

для любой точки O *группа* $\mathrm{Rot}_O(n)$ *изоморфна группе* $\mathrm{SO}(n)$.

Заметим, что последний изоморфизм зависит от выбора репера $Oe_1 \ldots e_n$.

Элемент группы $\mathrm{SO}(n)$ (собственную ортогональную матрицу), соответствующий данному вращению Φ, мы, допуская определенную вольность речи, будем называть *матрицей вращения* Φ в данном репере. Вольность здесь состоит в том, что эта матрица является на самом деле матрицей соответствующего изометричного оператора.

Замечание 3. Подчеркнем, что (при $n > 1$) группы $\mathrm{Rot}_O(n)$ и $\mathrm{Rot}_{O'}(n)$, соответствующие различным точкам O и O', различны (хотя и изоморфны одной и той же группе $\mathrm{Iso}^+(n) \approx \mathrm{SO}(n)$).

Предложение 2. *Любое движение* Φ *(прямой, плоскости или пространства) единственным образом разлагается в композицию некоторого вращения* R *(с заранее заданным центром* O*) и некоторого параллельного переноса* T.

Доказательство. В радиус-векторах относительно точки O движение Φ записывается формулой $\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Phi x} + \boldsymbol{b}$ и потому является композицией вращения $R(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Phi x}$ и параллельного переноса $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$.

Замечание 4. Обратим внимание на то, что в полученном разложении $\Phi = T \circ R$ порядок множителей существен:

$$T \circ R \neq R \circ T.$$

Тем не менее,

движение Φ допускает также разложение вида

$$\Phi = R \circ T',$$

где R — то же самое вращение, что и выше, а T' — некоторый параллельный перенос (вообще говоря, отличный от переноса T).

Действительно, пусть $\boldsymbol{b}'$ — такой вектор, что

$$\boldsymbol{\Phi b}' = \boldsymbol{b}.$$

Тогда

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}'),$$

и, следовательно, преобразование Φ является композицией параллельного переноса $T'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}'$ и вращения $R(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Phi x}$.

Упражнение. Докажите, что

$$\Phi = R' \circ T,$$

где T — тот же параллельный перенос, что и выше, а R' — вращение с центром $O' = \Phi(O)$, индуцирующее тот же изометричный оператор $\boldsymbol{\Phi}$, что и вращение R.

§ 2. РАЗЛОЖЕНИЕ АФФИННЫХ И ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В КОМПОЗИЦИЮ БОЛЕЕ ПРОСТЫХ

В этом параграфе аффинные преобразования будут изучаться средствами евклидовой геометрии. В соответствии с этим все координаты мы будем предполагать прямоугольными (евклидовыми).

1. Аффинные и ортогональные преобразования прямой

Аффинные преобразования прямой устроены очень просто: любое такое преобразование записывается в координатах формулой

$$y = ax + b,$$

где a и b — произвольные числа, причем $a \neq 0$.

Это преобразование ортогонально тогда и только тогда, когда $|a| = 1$, т. е. когда $a = \pm 1$.