§ 3. КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Инверсия относительно окружности

Точки M и M' плоскости, симметричные относительно некоторой прямой α, обладают, очевидно, тем свойством, что любая окружность, центр которой лежит на прямой α (т. е. любая окружность, ортогональная прямой α) и которая проходит через точку M, проходит также и через точку M'. Обобщением этого утверждения на любые окружности является следующее

Предложение 1. *Для любой точки M, не принадлежащей данной окружности Σ и отличной от ее центра O, существует единственная точка M', обладающая тем свойством, что любая окружность Σ', ортогональная окружности Σ и проходящая через точку M, проходит также и через точку M'.*

Доказательство. Совокупность всех окружностей, ортогональных окружности Σ, является (см. п. 3 § 3 гл. 4) гиперболической связкой окружностей, а совокупность всех окружностей, проходящих через точку M — параболической связкой окружностей. Поэтому совокупность всех окружностей, ортогональных окружности Σ и проходящих через точку M, представляет собой пучок окружностей. Этот пучок не может быть гиперболическим, поскольку все его окружности имеют общую точку M. Он не может быть и параболическим, поскольку тогда ему принадлежала бы окружность нулевого радиуса с центром в точке M, что невозможно (если окружность нулевого радиуса ортогональна окружности Σ, то ее центр должен принадлежать этой окружности, а по условию точка M окружности Σ не принадлежит). Следовательно, этот пучок эллиптичен. Кроме того, он является пучком именно окружностей, а не прямых, поскольку пучок прямых, проходящих через точку M, тогда и только тогда состоит из прямых, ортогональных окружности Σ, когда точка M является центром этой окружности.

Являясь эллиптическим пучком окружностей, рассматриваемый пучок состоит поэтому из всех окружностей, проходящих через две фиксированные точки. Одной из этих точек является данная точка M, а другой — искомая точка M'.

Определение 1. По очевидной аналогии со случаем прямой, точка M' называется точкой, *симметричной точке M относительно окружности* Σ, а преобразование[1])

$$M \longmapsto M'$$

называется *инверсией* (или *симметрией*) относительно окружности Σ.

Центр O окружности Σ называется *центром* инверсии, а ее радиус $R > 0$ — *радиусом* инверсии, квадрат R^2 радиуса инверсии называется *степенью* инверсии.

[1]) Определенное пока лишь для точек M, не принадлежащих окружности Σ и отличных от ее центра.

Одной из окружностей эллиптического пучка, состоящего из окружностей, проходящих через точки M и M', является прямая MM' (прямая центров этого пучка). Поскольку эта прямая ортогональна окружности Σ, она проходит через ее центр. Таким образом,

точки M и M', симметричные относительно окружности Σ, лежат на прямой, проходящей через центр O этой окружности.

Пусть Σ' — произвольная окружность, проходящая через точки M и M'. Степень точки O относительно окружности Σ' равна (см. п. 1 § 3 гл. 4) произведению величин векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM'}$. Но поскольку окружность Σ' ортогональна окружности Σ, эта степень равна квадрату R^2 радиуса окружности Σ и, в частности, положительна. Следовательно,

точка M' лежит на прямой OM по ту же сторону от точки O, что и точка M.

Кроме того, мы видим, что

произведение длин отрезков $\overline{OM}$ и $\overline{OM'}$ равно R^2:

$$|OM|\cdot|OM'|=R^2.$$

Ясно, что последние два свойства однозначно определяют на прямой OM точку M'. Поэтому их можно положить в основу определения этой точки. Заметим, что получающееся определение пригодно и тогда, когда точка M принадлежит окружности Σ, и дает в этом случае ту же самую точку M.

Таким образом, мы приходим к следующему окончательному определению инверсии относительно окружности Σ радиуса R с центром в точке O:

точка M' симметрична точке M относительно окружности Σ, если

1) *она расположена на прямой OM по ту же сторону от точки O, что и точка M;*

2) *имеет место равенство*

$$|OM|\cdot|OM'|=R^2.$$

Тем самым инверсия относительно окружности оказывается определенной для всех точек плоскости, отличных от точки O.

При этом $M'=M$ тогда и только тогда, когда M принадлежит окружности Σ.

Ясно, что аналогично симметрии относительно прямых,

каждая инверсия S является инволютивным преобразованием, т. е. обратное преобразование S^{-1} совпадает с S:

$$S^{-1}=S.$$

Пусть x, y — прямоугольные координаты на плоскости. Найдем формулу, выражающую координаты точки $M'(x', y')$ через координаты точки $M(x, y)$. Для этого оказывается удобным перейти к соответствующей комплексной координате

$$z = x + iy.$$

Рассмотрим сначала случай, когда центр инверсии совпадает с началом координат $z = 0$. Пусть R — радиус инверсии. По определению, произвольную точку z инверсия переводит в точку z', обладающую следующими свойствами:

1) отношение $z' : z$ является положительным числом;

2) имеет место равенство

$$|z| \cdot |z'| = R^2.$$

Ясно, что этим условиям удовлетворяет точка

$$z' = \frac{R^2}{|z|^2} z = \frac{R^2}{\bar{z}}. \tag{1}$$

Поскольку условия 1) и 2) однозначно определяют точку z', тем самым доказано, что

инверсия с центром в точке $z = 0$ задается формулой (1), *где R^2 — степень инверсии.*

В координатах x, y формула (1) превращается в две формулы:

$$x' = \frac{R^2}{x^2 + y^2} x, \quad y' = \frac{R^2}{x^2 + y^2} y.$$

Чтобы получить аналогичную формулу для инверсии с центром в произвольной точке z_0, достаточно перейти к новой координате $\zeta = z - z_0$. Согласно формуле (1) рассматриваемая инверсия выражается в координате ζ формулой

$$\zeta' = \frac{R^2}{\bar{\zeta}}.$$

Возвращаясь к прежней координате z, мы получаем отсюда, что

инверсия с центром в точке z_0 выражается формулой

$$z' = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} + z_0, \tag{2}$$

где R^2 — степень инверсии.

2. Пополненная плоскость

Тот факт, что инверсия с центром O не определена в точке O, очень неприятен. Естественно добиваться того, чтобы этот недостаток был устранен. С этой целью достаточно пополнить плоскость еще одной фиктивной точкой M_∞ и по определению считать, что инверсия с центром в Oпереводит точку O в точку M_∞ (и, наоборот, точку M_∞ в точку O).

Определение 1. Плоскость, пополненную указанным образом одной точкой M_∞, мы будем называть *пополненной плоскостью*[1]). Добавленную точку M_∞ мы будем называть *бесконечно удаленной точкой*, а все остальные ее точки — *конечными точками*.

По определению, инверсия с произвольным центром является на пополненной плоскости всюду определенным инволютивным преобразованием.

Любое преобразование плоскости (например, ортогональное или аффинное) мы будем считать преобразованием пополненной плоскости, переводящим точку M_∞ в себя.

Следует отчетливо понимать различие между пополненной и расширенной (евклидово-проективной) плоскостями: первая получается добавлением к обычной (евклидовой) плоскости одной точки, а вторая — добавлением бесконечного числа точек (составляющих целую прямую). В том, что к обычной плоскости можно по-разному добавлять фиктивные точки, нет ничего удивительного: все определяется свойствами тех преобразований, которые мы хотим сделать всюду определенными добавлением фиктивных точек. На евклидовой (или аффинной) плоскости проективное преобразование не определено на целой прямой, и поэтому, чтобы сделать любое такое преобразование определенным всюду, надо добавить прямую. Инверсия же не определена только в одной точке, и потому надо добавлять одну точку. Вполне может быть, что для каких-нибудь других преобразований придется пополнять плоскость, скажем, парой прямых или парой точек.

Пусть α — произвольная прямая, проходящая через центр O некоторой инверсии S. По определению, для любой точки M этой прямой (отличной от точки O) точка $M' = S(M)$ также принадлежит прямой α. На этом основании целесообразно считать, что точка M_∞ также принадлежит прямой α. Поскольку точка O может быть любой (конечной) точкой, следует, таким образом, считать, что *точка M_∞ принадлежит всем прямым пополненной плоскости.*

Таким образом, подобно расширенной плоскости пополненная плоскость не имеет непересекающихся прямых. Однако, в отличие от расширенной плоскости, две прямые на пополненной плоскости, вообще говоря, имеют две общие точки (общую конечную точку и точку M_∞), хотя возможен случай, когда они имеют только одну общую точку M_∞ (параллельные прямые). В этом отношении прямые на пополненной плоскости напоминают не столько прямые на расширенной плоскости, сколько окружности на обычной (евклидовой) плоскости. Действительно, две окружности имеют, вообще говоря, две общие (собственные) точки (возможно, мнимые), за исключением того случая, когда они касаются. Это наводит на мысль, что *в геометрии пополненной плоскости прямые следует рассматривать как окружности, проходящие через точку M_∞.*

Это подкрепляется тем, что, как мы ниже покажем, любая инверсия с центром в точке O каждую окружность перево-

[1]) Используется также термин *«круговая плоскость»*.

дит, вообще говоря, в некоторую окружность; однако окружности, проходящие через точку O, эта инверсия переводит в прямые.

Стоит также напомнить, что и в теории пучков окружностей (§ 3 гл. 4) оказалось удобным рассматривать прямые как окружности «бесконечного радиуса».

По всем этим основаниям мы при изучении геометрии пополненной плоскости будем, как правило, избегать термина «прямая», заменяя его оборотом «окружность, проходящая через точку M_∞».

Тогда можно будет уже без всяких исключений утверждать, например, что инверсия переводит окружности в окружности. Делается также совершенно ясно, почему пучок прямых, проходящих через произвольную точку O, следует считать эллиптическим пучком окружностей: действительно, он состоит из окружностей, проходящих через две фиксированные точки O и M_∞.

В этом круге идей следует считать, что параллельные прямые касаются друг друга в точке M_∞. Действительно, при таком соглашении пучок параллельных прямых окажется пучком окружностей, проходящих через точку M_∞ и касающихся в этой точке друг друга, т. е. попадет под общее определение параболических пучков.

Наглядную интерпретацию пополненной плоскости можно получить, рассмотрев в (евклидовом) пространстве произвольную сферу и касающуюся ее в некоторой точке плоскость. Пусть O — точка сферы, диаметрально противоположная точке касания. Тогда для любой точки M плоскости прямая OM пересекает сферу в единственной точке M' (называемой *стереографической проекцией* точки M). Это показывает, что точки плоскости мы можем отождествить с точками сферы, отличными от точки O.

После этого отождествления необходимость в пополненной плоскости делается очевидной: добавление одной и только одной точки нужно, чтобы ликвидировать в сфере получившийся «прокол». Одновременно мы видим, что

пополненную плоскость можно отождествить со сферой.

Эта интерпретация пополненной плоскости как сферы часто бывает полезна. Например, в этой интерпретации совершенно ясно, почему мы должны считать параллельные прямые касающимися в точке M_∞: образы этих прямых при стереографической проекции являются окружностями, касающимися друг друга в точке O.

Комплексную координату

$$z = x + iy$$

мы распространим на пополненую плоскость, считая, что точке M_∞ отвечает «значение» координаты z, равное ∞.

В силу этого соглашения,

формулы (1), (2) п. 1 *будут выражать инверсию и на пополненной плоскости.*

Действительно, при $z = 0$ формула (1) дает $z' = \infty$, а при $z = \infty$ — дает $z' = 0$.

Мы знаем, что любое движение плоскости записывается в комплексной координате формулой

$$z' = az + b, \tag{1}$$

где a, b — комплексные числа, причем $|a| = 1$ (см. п. 3 § 2). При любом $a \neq 0$ преобразование (1) является композицией движения

$$z' = \frac{a}{|a|} z + b$$

и гомотетии

$$z' = |a| z$$

с центром в точке O, т. е. является *преобразованием подобия* (сохраняющим ориентации).

Поскольку в силу формулы (1) $z' = \infty$ при $z = \infty$, эта формула выражает преобразование подобия (а при $|a| = 1$ — движение) и на пополненной плоскости.

Аналогично, формула

$$z' = \bar{z},$$

выражающая, очевидно, симметрию относительно оси Ox, сохраняет силу и на пополненной плоскости.

Определение 2. Преобразование пополненной плоскости называется *дробно-линейным преобразованием*, если оно выражается (в данной координате z) формулой вида

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{2}$$

и называется *сопряженно дробно-линейным преобразованием*, если оно выражается формулой вида

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}. \tag{2'}$$

Конечно, здесь следует проверить корректность этого определения, т. е. тот факт, что преобразование, дробно-линейное (сопряженно дробно-линейное) в координате z, остается дробно-линейным (сопряженно дробно-линейным) и в любой другой комплексной координате.

Задание. Проверьте корректность определения 2.

Чтобы формулы (2) и (2′) действительно задавали преобразования (биективные отображения пополненной плоскости на себя), необходимо (и достаточно), чтобы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

При выполнении этого условия преобразованием, обратным, скажем, к преобразованию (2), будет преобразование

$$z' = \frac{dz - b}{cz - a}.$$

Все рассмотренные выше преобразования были либо дробно-линейными, либо сопряженно дробно-линейными преобразованиями.

Например, преобразования подобия (1) являются преобразованиями (2), получающимися при $c = 0$, $d = 1$, а инверсия с центром $z = 0$ — преобразованием (2′), получающимся при $a = 0$, $b = R^2$, $c = 1$, $d = 0$.

Оказывается, что и наоборот,

каждое дробно-линейное или сопряженно дробно-линейное преобразование является композицией преобразований, являющихся преобразованиями подобия или симметриями (относительно окружностей или прямых).

Действительно, каждое преобразование (2) при $c = 0$ является, очевидно, преобразованием подобия. Пусть $c \neq 0$. Тогда

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c(cz + d)} + \frac{a}{c} = -\frac{\Delta}{c^2}\left(\frac{1}{z + \frac{c}{d}}\right) + \frac{a}{c}$$

и потому преобразование (2) является композицией преобразования

$$z' = \frac{1}{z + \frac{c}{d}} \tag{3}$$

и преобразования подобия

$$z' = -\frac{\Delta}{c^2} z + \frac{a}{c}.$$

С другой стороны, преобразование (3) является, очевидно, композицией параллельного переноса

$$z' = z + \frac{c}{d}$$

и преобразования

$$z' = \frac{1}{z},$$

являющегося композицией симметрии $z' = \bar{z}$ и инверсии $z' = \frac{1}{\bar{z}}$.

Подобным же образом может быть разложено и любое преобразование (2′) (с $c \neq 0$): к указанным преобразованиям добавится еще одна симметрия $z' = \bar{z}$.

Определение 3. Преобразование пополненной плоскости называется ***конформным***, если оно переводит окружности в окружности.

Замечание. 1. Конформные преобразования называются также *круговыми преобразованиями* или *преобразованиями Мёбиуса.*

Ясно, что

все конформные преобразования пополненной плоскости составляют группу.

Мы будем обозначать эту группу символом Conf.

Легко видеть, что

уравнение любой окружности на пополненной плоскости имеет вид

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0, \tag{4}$$

где b — некоторое комплексное число, а a и c — вещественные числа.

Действительно, если рассматриваемая окружность имеет центр в точке z_0 и радиус R, то ее уравнение может быть записано в виде

$$|z - z_0| = R.$$

Возводя в квадрат и перемножая, мы получаем уравнение

$$z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 - R^2 = 0, \tag{5}$$

имеющее вид (4) с $a = 1$, $b = -z_0$ и $c = z_0\bar{z}_0 - R^2$.

Если же рассматриваемая окружность является прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

то, положив $a = 0$, $b = \frac{A - iB}{2}$, $c = C$, мы снова получим уравнение вида (4).

Обратно, покажем, что

любое уравнение

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0, \tag{6}$$

где a и c вещественны, является уравнением некоторой окружности.

Действительно, при $a = 0$ это — уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

где $A = \operatorname{Re} b$, $B = -\operatorname{Im} b$ и $C = c$. Пусть $a \neq 0$. Разделив на a и положив

$$z_0 = -\frac{b}{a}, \quad R = \frac{\sqrt{b\bar{b} - ac}}{a},$$

мы получим уравнение вида (5), показывающее, что рассматриваемая линия является окружностью радиуса R с центром в точке z_0.

Замечание 2. Настоящую окружность мы получим только при $b\bar{b} > ac$. При $b\bar{b} < ac$ получается окружность мнимого радиуса, не имеющая вещественных точек, а при $b\bar{b} = ac$ — окружность нулевого радиуса, имеющая только одну вещественную точку.

Инверсия

$$z' = \frac{R^2}{\bar{z}}$$

с центром в точке $z = 0$ переводит окружность

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$$

в линию с уравнением

$$a\frac{R^2}{z'}\frac{R^2}{\bar{z}'} + \bar{b}\frac{R^2}{\bar{z}'} + b\frac{R^2}{z'} + c = 0,$$

т. е. с уравнением

$$cz'\bar{z}' + \bar{b}R^2z' + bR^2\bar{z}' + aR^4 = 0.$$

Поскольку это уравнение имеет вид (4), оно является уравнением некоторой окружности.

Таким образом, инверсия переводит произвольную окружность снова в окружность, т. е. является конформным преобразованием. (Ясно, что это справедливо и для инверсии с центром в произвольной точке z_0.)

Поскольку преобразования подобия и симметрии относительно прямых очевидным образом являются конформными преобразованиями, тем самым доказано, что

каждое дробно-линейное или сопряженно дробно-линейное преобразование является конформным преобразованием.

Замечательно, что справедливо и обратное утверждение:

Предложение 1. *Каждое конформное преобразование пополненной плоскости является дробно-линейным или сопряженно дробно-линейным преобразованием.*

Доказательство. Покажем сначала, что

любое конформное преобразование пополненной плоскости, оставляющее на месте точку M_∞, является преобразованием подобия (возможно, не сохраняющим ориентации, т. е. представляющим собой композицию некоторого сохраняющего ориентации преобразования подобия и симметрии).

Действительно, если конформное преобразование оставляет на месте точку M_∞, то любую окружность, проходящую через эту точку, оно переводит снова в окружность, проходящую через точку M_∞. Другими словами, любую прямую оно переводит в прямую. Следовательно, это конформное преобразование является аффинным преобразованием, и потому разлагается в композицию $\Phi_2 \circ \Phi_1$ некоторого ортогонального преобразования Φ_1 и преобразования Φ_2, являющегося композицией двух сжатий к двум взаимно перпендикулярным прямым. Поскольку преобразования $\Phi_2 \circ \Phi_1$ и Φ_1 конформны, преобразование Φ_2 также конформно. Но ясно, что композиция двух сжатий тогда и только тогда переводит окружности в окружности (является конформным преобразованием), когда коэффициенты этих сжатий одинаковы, т. е. когда эта композиция является гомотетией. Таким образом, данное конформное отображение является композицией некоторого ортогонального преобразования и гомотетии, т. е. представляет собой преобразование подобия.

Пусть теперь Ω — произвольное конформное преобразование плоскости. Пусть это преобразование переводит точку M_∞ в (конечную) точку O. Рассмотрим произвольную инверсию S с центром в точке O. Композиция

$$\Omega' = S \circ \Omega$$

является конформным преобразованием, оставляющим на месте точку M_∞, и потому, по доказанному, представляет собой преобразование подобия. Поскольку $\Omega = S \circ \Omega'$, тем самым доказано, что

любое конформное преобразование пополненной плоскости является либо преобразованием подобия, либо композицией преобразования подобия и некоторой инверсии.

Чтобы завершить доказательство предложения 1, осталось заметить, что если два преобразования выражаются формулами вида (2) или (2′), то их композиция также выражается формулой такого вида.

3. Свойства конформных преобразований

Предложение 1 п. 2 сводит изучение конформных преобразований к простым алгебраическим вычислениям с дробно-линейными и сопряженно дробно-линейными преобразованиями.

Рассмотрим сначала конформные преобразования, являющиеся дробно-линейными преобразованиями:

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{1}$$

Такое преобразование полностью определено, если известна матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Поскольку эта матрица невырождена, она принадлежит группе $GL(\mathbb{C}^2)$ всех невырожденных квадратных матриц второго порядка с комплексными элементами.

Таким образом, сопоставив матрице (2) преобразование (1), мы получим некоторое отображение

$$GL(\mathbb{C}^2) \to \mathrm{Conf} \tag{3}$$

матричной группы $GL(\mathbb{C}^2)$ в группу Conf.

Легко видеть, что
отображение (3) *является гомоморфизмом, т. е. произведению матриц отвечает композиция соответствующих преобразований* (1).

Задание. Докажите это утверждение.

Отсюда, в частности, вытекает, что
совокупность Conf$^+$ *всех конформных преобразований, являющихся дробно-линейными преобразованиями (т. е. записывающихся формулами вида* (1)*), является подгруппой группы* Conf.

Действительно, эта совокупность является образом группы $GL(\mathbb{C}^2)$ при гомоморфизме (3).

Было бы неверно утверждать, что гомоморфизм (3) является изоморфизмом группы $GL(\mathbb{C}^2)$ на группу Conf$^+$. Действительно, ясно, что матрицы, отличающиеся скалярным множителем, определяют одно и то же преобразование (1). Покажем, что обратное тоже верно, т. е. что
равенство

$$\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}=\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$$

тогда и только тогда имеет место для всех z, *когда существует такое число* $k\neq 0$, *что*

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, если

$$\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}=\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$$

для всех z, то

$$(a_1z+b_1)(c_2z+d_2)-(c_1z+d_1)(a_2z+b_2)=0,$$

т. е.

$$(a_1c_2-c_1a_2)z^2+[(a_1d_2-d_1a_2)+(b_1c_2-c_1b_2)]z+(b_1d_2-d_1b_2)=0$$

тождественно по z. Но многочлен тогда и только тогда тождественно равен нулю, когда равны нулю все его коэффициенты. Следовательно,

$$a_1c_2-c_1a_2=0,\quad b_1d_2-d_1b_2=0$$

и

$$a_1d_2-d_1a_2=c_1b_2-b_1c_2. \tag{4}$$

Первые два соотношения означают, что существуют такие числа k и l, что

$$a_2=ka_1,\quad c_2=kc_1$$

и

$$b_2=lb_1,\quad d_2=ld_1.$$

Подставляя эти выражения в соотношение (4), мы получаем равенство

$$la_1d_1 - kd_1a_1 = lc_1b_1 - lb_1c_1,$$

т. е. равенство

$$(k-l)(a_1d_1 - c_1b_1) = 0,$$

возможное только при $k = l$ (напомним, что, по условию, $a_1d_1 - c_1b_1 \neq 0$).

На языке теории групп доказанное утверждение означает, что

ядром гомоморфизма (3) *является подгруппа всех диагональных матриц вида*

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

где $k \neq 0$.

Можно попытаться уменьшить это ядро, требуя, чтобы определитель матрицы (2) был равен единице:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1. \tag{5}$$

Это означает, что вместо группы $GL(\mathbb{C}^2)$ всех невырожденных матриц второго порядка с комплексными элементами мы рассматриваем ее подгруппу $SL(\mathbb{C}^2)$, состоящую из матриц, удовлетворяющих условию (5).

Соответствующий гомоморфизм

$$SL(\mathbb{C}^2) \to \mathrm{Conf}$$

также отображает группу $SL(\mathbb{C}^2)$ на группу Conf^+. Однако он по-прежнему не будет изоморфизмом, поскольку матрицы, отличающиеся знаком, будут определять одно и то же преобразование из группы $SL(\mathbb{C}^2)$. Другими словами, ядром гомоморфизма (3) будет группа второго порядка, состоящая из матриц

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обозначив эту группу символом $\{\pm E\}$, мы можем, таким образом, сказать, что

группа Conf^+ *изоморфна факторгруппе группы* $SL(\mathbb{C}^2)$ *по нормальному делителю* $\{\pm E\}$.

Запись конформного преобразования из группы Conf^+ формулой (1), в которой

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1,$$

называется *нормированной*. Подчеркнем, что, согласно сказанному выше, для преобразования (1) существуют две нормированные записи. От этой неоднозначности избавиться невозможно, и о ней всегда нужно помнить (в противном случае легко прийти к ошибке).

Обратим внимание на то, что запись (сохраняющего ориентации) преобразования подобия в виде

$$z' = az + b$$

не нормирована. Нормированная запись этого преобразования имеет вид

$$z' = \frac{\sqrt{a}\,z + b/\sqrt{a}}{1/\sqrt{a}}.$$

Рассмотрим теперь конформные преобразования, выражающиеся формулами

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Их совокупность мы обозначим символом Conf^-.

Каждое такое преобразование Ω является композицией симметрии

$$S\colon\ z' = \bar{z}$$

и преобразования

$$\Omega^+\colon\ z' = \frac{az + b}{cz + d},$$

принадлежащего группе Conf^+:

$$\Omega = \Omega^+ \circ S.$$

При этом ясно, что

$$\Omega^+ \circ S = S \circ \bar{\Omega}^+,$$

где $\bar{\Omega}^+$ — преобразование из группы Conf^+, выражающееся формулой

$$z' = \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{\bar{c}z + \bar{d}}.$$

Из этих формул вытекает, что для любых двух преобразований Ω_1^+, $\Omega_2^+ \in \mathrm{Conf}^+$ имеют место равенства

$$(\Omega_1^+ \circ S) \circ (\Omega_2^+ \circ S) = (\Omega_1^+ \circ S) \circ (S \circ \bar{\Omega}_2^+) = \Omega_1^+ \circ \bar{\Omega}_2^+,$$

$$(\Omega_1^+ \circ S) \circ \Omega_2^+ = (\Omega_1^+ \circ \bar{\Omega}_2^+) \circ S,$$

$$\Omega_1^+ \circ (\Omega_2^+ \circ S) = (\Omega_1^+ \circ \Omega_2^+) \circ S.$$

Поскольку представление преобразования Ω из Conf^- в виде $\Omega^+ \circ S$, очевидно, единственно, мы видим, что произведение любых двух элементов группы

$$\mathrm{Conf} = \mathrm{Conf}^+ \cup \mathrm{Conf}^-$$

мы можем вычислить, если нам известно произведение любых двух элементов группы Conf^+.

Тем самым алгебраическое строение группы Conf полностью выяснено (или, точнее, сведено к алгебраическому строению группы Conf^+).

В частности, мы видим, что

множество Conf^- *является смежным классом группы* Conf *по ее нормальному делителю* Conf^+.

Рассмотрим теперь некоторые «геометрические» свойства конформных преобразований.

Предложение 1. *Для любых двух троек* z_1, z_2, z_3 *и* z_1', z_2', z_3' *точек пополненной плоскости, не содержащих одинаковых точек, существует конформное преобразование из группы* Conf^+, *переводящее точки* z_1, z_2, z_3 *в точки* z_1', z_2', z_3'.

Доказательство. Предполагая сначала, что ни одна из данных шести точек не является бесконечно удаленной точкой $z = \infty$, рассмотрим соотношение

$$\frac{(z' - z_1')(z_2' - z_3')}{(z' - z_3')(z_2' - z_1')} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}. \tag{6}$$

Выразив из этого соотношения z' через z, мы, очевидно, получим формулу вида

$$z' = \frac{az + b}{cz + d},$$

показывающую, что соответствие $z \mapsto z'$ является конформным преобразованием из группы Conf^+.

Это преобразование переводит точки z_1, z_2, z_3 в точки z_1', z_2', z_3', так как обе стороны соотношения (6) обращаются в нуль при $z' = z_1'$ и $z = z_1$, в единицу при $z' = z_2'$ и $z = z_2$ и в бесконечность при $z' = z_3'$ и $z = z_3$.

В случае, когда одна из заданных точек является бесконечно удаленной точкой, нужно написать соотношение, аналогичное соотношению (6) и получающееся из него предельным переходом, когда соответствующая точка $z_1, z_2, z_3, z_1', z_2', z_3'$ «уходит в бесконечность». Так, если $z_1 = \infty$, то правую часть соотношения (6) нужно заменить выражением

$$\frac{z_2 - z_3}{z - z_3},$$

если $z_2 = \infty$ — то выражением

$$\frac{z - z_1}{z - z_3},$$

а если $z_3 = \infty$ — то выражением

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Если одна из точек z'_1, z'_2, z'_3 является точкой ∞, то аналогичные замены нужно произвести в левой части соотношения (6).

Тем самым предложение 1 полностью доказано.

Чтобы ответить на вопрос об единственности построенного конформного преобразования, нам будет удобно рассмотреть предварительно *неподвижные точки* произвольного преобразования

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \tag{7}$$

из группы Conf^+, т. е. точки, оставляемые этим преобразованием на месте.

Эти точки определяются из уравнения

$$z = \frac{az + b}{cz + d},$$

т. е. из уравнения

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0, \tag{8}$$

называемого *уравнением неподвижных точек*.

При $c \neq 0$ уравнение (8) имеет либо два различных корня, либо один двойной корень. При $c = 0$ и $d \neq a$ уравнение (8) имеет один корень $\frac{b}{d-a}$. Однако в этом случае преобразование (7) является преобразованием подобия и, по определению, оставляет на месте еще точку M_∞. Поэтому целесообразно считать, что при $c = 0$ уравнение (8) имеет также корень $z = \infty$. Наконец, при $c = 0$ и $d = a$ (т. е. в случае, когда преобразование (7) является параллельным переносом) уравнение (8) вообще не имеет конечных корней (конечно, если $b \neq 0$, т. е. если преобразование (7) не тождественно). В этом случае мы будем условно считать, что оно имеет двойной корень $z = \infty$.

Резюмируя, мы получаем, что

каждое конформное преобразование из группы Conf^+, *не являющееся тождественным преобразованием, имеет либо две неподвижные точки, либо одну двойную неподвижную точку.*

В частности,

если преобразование из группы Conf^+ ***оставляет на месте три различные точки, то оно является тождественным преобразованием.***

Отсюда уже непосредственно вытекает ответ на вопрос об единственности конформного преобразования, переводящего три данные точки в три данные точки:

Предложение 2. *Группа* Conf^+ *содержит только одно преобразование, переводящее три различные точки* z_1, z_2, z_3 *в три различные точки* z_1', z_2', z_3'.

Доказательство. Если существует два таких преобразования Ω_1 и Ω_2, то преобразование $\Omega_1^{-1}\circ\Omega_2$ оставляет на месте три различные точки z_1, z_2, z_3 и, следовательно, $\Omega_1^{-1}\circ\Omega_2=E$, что противоречит условию $\Omega_1\neq\Omega_2$.

Аналогичные результаты имеют место и для преобразований из смежного класса Conf^-.

Предложение 3. *Для любых двух троек точек* z_1, z_2, z_3 *и* z_1', z_2', z_3' *пополненной плоскости, не содержащих одинаковых точек, существует в смежном классе* Conf^- *единственное преобразование, переводящее точки* z_1, z_2, z_3 *в точки* z_1', z_2', z_3'.

Доказательство. Ясно, что

через любые три различные точки пополненной плоскости проходит единственная окружность.

Действительно, в случае, когда данные точки конечны и не лежат на одной прямой, это утверждение известно из элементарной геометрии. Если же эти точки лежат на одной прямой, или если одна из них является бесконечно удаленной точкой, то искомой окружностью будет прямая, проходящая через эти точки.

В частности, через данные точки z_1, z_2, z_3 проходит некоторая окружность Σ. Пусть S — инверсия относительно этой окружности (симметрия, если окружность Σ является прямой) и пусть Ω^+ — преобразование из группы Conf^+, переводящее точки z_1, z_2, z_3 в точки z_1', z_2', z_3'. Рассмотрим преобразование

$$\Omega=\Omega^+\circ S.$$

Являясь композицией преобразования S из смежного класса Conf^- и преобразования Ω^+ из группы Conf^+, это преобразование принадлежит смежному классу Conf^-. Кроме того, оно переводит точки z_1, z_2, z_3 в точки z_1', z_2', z_3', поскольку инверсия S оставляет точки z_1, z_2, z_3 на месте. Тем самым существование искомого преобразования доказано.

Пусть теперь существует два преобразования Ω_1 и Ω_2 из смежного класса Conf^-, переводящих точки z_1, z_2, z_3 в точки z_1', z_2', z_3'. Рассмотрим преобразование

$$\Omega_1^{-1}\circ\Omega_2.$$

Это преобразование принадлежит группе Conf^+ и оставляет на месте точки z_1, z_2, z_3. Поэтому оно является тождественным преобразованием, и, следовательно, $\Omega_1=\Omega_2$.

Тем самым предложение 3 полностью доказано.

Подчеркнем, что в группе Conf существует, таким образом, два преобразования, переводящих точки z_1, z_2, z_3 в точки z'_1, z'_2, z'_3: одно — из группы Conf^+, а другое — из смежного класса Conf^-.

Не нужно думать, что доказанное выше утверждение о неподвижных точках преобразований из группы Conf^+ остается справедливым для преобразований из смежного класса Conf^-. Напротив, легко видеть, что

преобразование

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

из смежного класса Conf^- *может иметь бесконечно много неподвижных точек, заполняющих целую окружность.*

Действительно, уравнение неподвижных точек для такого преобразования имеет вид:

$$cz\bar{z} + dz - a\bar{z} - b = 0 \tag{9}$$

и потому при вещественных c и b и при $d = -\bar{a}$ является уравнением некоторой окружности.

Замечание 1. В общем случае уравнение (9) распадается на два уравнения, каждое из которых является уравнением окружности (или удовлетворяется тождественно). Действительно, положим

$$c = c_1 + ic_2, \quad b = -b_1 - ib_2, \quad d = \bar{a}_1 + i\bar{a}_2, \quad a = -a_1 - ia_2,$$

где c_1, c_2, b_1, b_2 — вещественные числа, а a_1 и a_2 — комплексные. Подставив эти выражения в уравнение (9) и отделив вещественную и мнимую части, мы, очевидно, получим уравнения

$$\begin{aligned} c_1z\bar{z} + \bar{a}_1z + a_1\bar{z} + b_1 = 0, \\ c_2z\bar{z} + \bar{a}_2z + a_2\bar{z} + b_2 = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

каждое из которых является уравнением окружности или удовлетворяется тождественно.

Таким образом, каждое из уравнений (10) определяет либо пустое множество точек (окружность мнимого радиуса), либо точку (окружность нулевого радиуса), либо окружность (или прямую), либо всю плоскость. При этом в случае, когда оба уравнения (10) определяют окружности, эти окружности могут не пересекаться, касаться, пересекаться в двух точках и, наконец, совпадать. Кроме того, случай, когда оба уравнения (10) удовлетворяются тождественно, очевидно, невозможен (поскольку все коэффициенты a, b, c и d не могут одновременно быть равны нулю). Следовательно, всего возможно 21 различных случаев. В одиннадцати из этих случаев неподвижных точек нет, в шести имеется одна неподвижная точка, в одном — две неподвижные точки и, наконец, в трех случаях неподвижные точки заполняют целую окружность. Тем самым доказано, что

преобразование из смежного класса Conf^- *либо не имеет неподвижных точек, либо имеет одну или две неподвижные точки, либо — целую окружность неподвижных точек.*

4. Конформные преобразования и ориентации

Пополненную плоскость мы будем считать *ориентированной*, если ориентирована исходная евклидова плоскость. Таким образом, в частности, пополненная плоскость, отнесенная к комплексной координате z, автоматически ориентирована.

Основная цель этого пункта — переформулировать для пополненной плоскости определение ориентации таким образом, чтобы было удобно исследовать поведение ориентаций при конформных преобразованиях. Обычное определение ориентации (см. п. 1 § 4 гл. 1) как, скажем, класса одноименных неколлинеарных троек точек для такого исследования плохо приспособлено, поскольку конформное преобразование неколлинеарную тройку точек может перевести в коллинеарную.

Мы сначала обсудим понятие ориентации пополненной плоскости на неформальном, наглядном, уровне, а затем дадим формальное определение.

Принципиальное отличие окружностей от прямых на евклидовой плоскости состоит в том (см. пп. 1 и 4 § 4 гл. 1), что ориентация окружности[1]) определяет ориентацию плоскости, а ориентация прямой — не определяет. Как мы знаем, это связано с тем, что две стороны прямой совершенно равноправны, а стороны окружности — нет. Однако на пополненной плоскости по отношению к конформным преобразованиям стороны окружности совершенно равноправны, ибо, например, инверсия относительно окружности переводит одну ее сторону в другую (подобно тому как симметрия относительно прямой переставляет ее стороны). Поэтому на пополненной плоскости мы для каждой окружности Σ должны специально указывать ее сторону.

Если теперь окружность Σ ориентирована (т. е. на ней указано некоторое направление движения), то мы сопоставим этой ориентации правую ориентацию плоскости (ориентацию «против часовой стрелки», см. п. 2 § 4 гл. 1), если при движении по окружности в данном направлении выбранная сторона остается слева, и левую ориентацию плоскости (ориентацию «по часовой стрелке»), если при этом движении выбранная сторона

[1]) То есть области, на которые окружность разбивает плоскость.

остается справа. Обратно, если на плоскости выбрана некоторая ориентация o, то мы можем сопоставить ей ориентацию окружности Σ, обладающую тем свойством, что при движении по окружности в положительном (относительно этой ориентации) направлении данная сторона остается слева, если ориентация o — правая, и справа, если ориентация o — левая. Наконец, задание ориентации o плоскости и ориентации окружности Σ определяет некоторую сторону окружности, а именно, сторону, которая при движении по окружности в положительном направлении остается слева, если ориентация o — правая, и остается справа, если ориентация o — левая.

Таким образом,

из трех объектов:

1) *ориентация плоскости*,

2) *ориентация окружности*,

3) *сторона окружности*,

любые два однозначно определяют третий.

Замечание 1. Все это справедливо как для «настоящих» окружностей, так и для прямых («окружностей, проходящих через точку M_∞»). При этом ясно, что для прямых мы получаем в точности результаты п. 4 § 3 гл. 1. Кроме того, если для окружности мы выберем сторону, содержащую ее центр, то получающееся соответствие между ориентациями плоскости и окружности будет совпадать с соответствием, описанным в п. 1 § 4 гл. 1 (поскольку при движении по окружности, скажем, против часовой стрелки ее центр остается слева).

Окружности и прямые отличаются еще и в том отношении, что для задания ориентации на прямой нам нужны не три точки A, B, C, а только две точки A, B, такие, что $A \prec B$ в данной ориентации. Однако фактически мы и на прямой имеем дело с тремя точками: третьей точкой является бесконечно удаленная точка M_∞, и ориентация, в которой $A \prec B$, может быть описана как направление на прямой, в котором точка B разделяет точки A и M_∞. Иными словами, задавая направление на прямой двумя точками A и B, мы, на самом деле, дополнительно требуем, чтобы при движении от точки A к точке B в этом направлении мы не проходили через точку M_∞. Если мы от этого последнего условия откажемся (подобно тому, как мы отказались выбирать сторону окружности обязательно там, где расположен ее центр), то для задания ориентации на прямой нам также понадобятся три точки A, B, C (одна из которых может быть точкой M_∞).

Подчеркнем, что если, например, точка C лежит между точками A и B (в элементарно-геометрическом смысле), то ориентация, определенная точками A, B, C, будет обладать тем свойством, что при движении в положительном направлении (по отношению к этой ориентации) от точки A к точке C мы должны будем пройти через точку B, т. е. это будет направление, в котором $C \prec A$.

Суть дела здесь в том, что, пополнив прямую точкой M_∞, мы превращаем ее в замкнутую линию, аналогичную окружности.

Согласно сказанному выше, чтобы задать ориентацию плоскости, достаточно задать ориентацию некоторой окружности (или прямой) и выбрать для этой окружности сторону. Чтобы задать ориентацию окружности, достаточно задать на ней три точки A, B, C, а чтобы задать сторону, достаточно задать произвольную точку D, расположенную на этой стороне. Следовательно,

ориентация плоскости однозначно определена заданием четырех точек A, B, C, D, не принадлежащих одной окружности.

Именно, чтобы определить по точкам A, B, C, D соответствующую ориентацию, нужно

1) провести через точки A, B, C окружность,

2) ориентировать эту окружность так, чтобы точка B разделяла точки A и C,

3) выбрать сторону окружности[1] ABC, содержащую точку D.

Тогда ориентация плоскости, определенная окружностью ABC и выбранной ее стороной, и будет ориентацией, соответствующей четверке A, B, C, D.

Называя две четверки точек A, B, C, D и A', B', C', D' *одноименными*, если они определяют одну и ту же ориентацию плоскости, мы можем, следовательно, отождествить ориентации плоскости с классами одноименных четверок точек (не принадлежащих одной окружности).

Конечно, такое понимание ориентаций плоскости не будет тавтологией только тогда, когда мы сумеем описать одноименность четверок независимо от понятия ориентации.

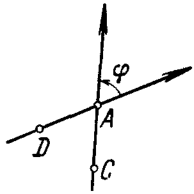
Решать эту задачу нам будет удобно в следующей постановке: *определить по данной четверке точек A, B, C, D, не принадлежащих одной окружности, задает ли она данную (скажем, правую) ориентацию плоскости или нет.* При этом ответ должен быть получен в терминах, не связанных (по крайней мере явно) с понятием ориентации.

Предположим сначала, что точка B является бесконечно удаленной точкой M_∞. Тогда окружность ABC будет прямой AC, ориентированной так, что $C \prec A$. Рассмотрим наряду с этой прямой также и прямую AD (т. е. окружность ABD), ориентированную соответствующим образом (так, чтобы $D \prec A$). Поскольку прямые AC и AD пересекаются в точке A и обе ориен-

[1]) Окружность, проходящую через точки A, B, C и ориентированную так, чтобы точка B разделяла точки A и C, мы будем обозначать символом ABC.

тированы, а на плоскости задана ориентация, то определен угол φ от прямой AD к прямой AC. При этом

точки A, M_∞, C, D тогда и только тогда определяют данную ориентацию плоскости, когда угол φ положителен:



$$0 < \varphi < \pi.$$

Это утверждение очевидно из чертежа.

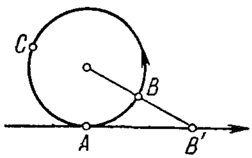
Задание. Дайте формальное доказательство.

Таким образом, вопрос о том, определяет ли четверка A, M_∞, C, D данную ориентацию плоскости, однозначно решается в зависимости от величины угла φ.

Чтобы получить аналогичный ответ в случае, когда точка B конечна, мы должны предварительно определить, что следует понимать под углом от одной ориентированной окружности к другой.

Пусть Σ — произвольная окружность, A — некоторая ее точка и α — касательная к окружности Σ в точке A. Заметим, что задание ориентации окружности Σ однозначно определяет некоторую ориентацию прямой α. Наглядно эту ориентацию касательной можно описать следующим образом: представим себе, что материальная точка, двигаясь по окружности в положительном направлении, освобождается от связей в точке A. Тогда она будет продолжать движение по касательной α. Направление этого движения и определяет ориентацию касательной α.

Более формально, ориентацию касательной, соответствующей данной ориентации окружности Σ, можно определить следующим способом. Рассмотрим на окружности точки A, B, C, определяющие заданную ориентацию окружности и выбранные так, чтобы точка B находилась от точки A на расстоянии, меньшем четверти окружности. Спроектировав точку B из центра окружности на прямую α, мы получим на прямой α некоторую точку B' Тогда ориентация прямой α задается направлением, в котором $A \prec B'$. Конечно, это определение нуждается в проверке корректности, т. е. в доказательстве независимости получающейся ориентации на прямой от выбора точки B.



Упражнение. Докажите корректность определения ориентации касательной.

Таким образом, мы видим, что

касательная к ориентированной окружности естественным образом определяется как ориентированная прямая.

Это утверждение остается справедливым и для случая, когда окружность Σ является прямой, если под касательной к прямой понимать саму эту прямую.

Пусть теперь Σ_1 и Σ_2 — две ориентированные окружности, имеющие общую точку A, и пусть α_1 и α_2 — касательные к этим окружностям в точке A. Угол от ориентированной прямой α_1 к ориентированной прямой α_2 мы и будем называть *углом* от окружности Σ_1 к окружности Σ_2 в их общей точке A.

Согласно сказанному выше, угол от ориентированной прямой к ориентированной прямой попадает под это общее определение.

В изложенном определении молчаливо предполагалось, что точка A конечна. Чтобы перенести его на случай, когда $A = M_\infty$, следует определить, что такое *угол* φ_∞ между двумя ориентированными прямыми *в точке* M_∞.

Если эти прямые параллельны и ориентации их одинаковы, мы, по определению, положим

$$\varphi_\infty = 0.$$

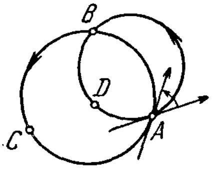
Аналогично, если прямые параллельны, но имеют противоположные ориентации, то мы положим

$$\varphi_\infty = \pi.$$

Наконец, если прямые не параллельны и образуют (в их конечной точке пересечения) угол φ, то мы, по определению, положим

$$\varphi_\infty = -\varphi.$$

Последнее определение оправдывается тем, что если две (настоящие) окружности пересекаются в точках A и B, то, как легко видеть, угол от первой окружности ко второй в точке A знаком отличается от угла в точке B.



Рассмотренный выше случай $B = M_\infty$ наводит на мысль о том, что

четверка точек A, B, C, D, не принадлежащих одной окружности, тогда и только тогда определяет данную ориентацию плоскости, когда угол от окружности ABD к окружности ABC в точке A положителен (в предположении, конечно, что этот угол вычисляется относительно данной ориентации плоскости и выбирается в пределах от $-\pi$ до π).

Это утверждение действительно верно, и его доказательство сводится к рассмотрению пяти возможных случаев: когда все точки A, B, C, D конечны, когда точка A является точкой M_∞, когда точка B является точкой M_∞ (случай, выше уже рассмотренный), когда точка C является точкой M_∞, и, наконец, когда точка D является точкой M_∞. Справедливость утверждения в каждом из этих случаев непосредственно вытекает из чертежа. Формальные доказательства мы опустим.

Полученные результаты приобретут ценность только тогда, когда мы научимся вычислять угол φ (скажем, по координатам точек A, B, C, D). Выведем соответствующую формулу.

Предполагая все точки A, B, C, D конечными, и, следовательно, окружности ABD и ABC настоящими, рассмотрим прямые

$$CB, \quad CA, \quad DB, \quad DA \quad \text{и} \quad AB,$$

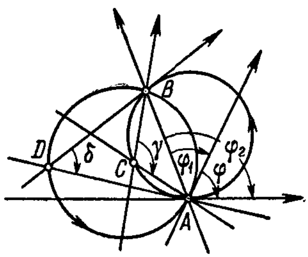
ориентированные в соответствии с указанным порядком точек (т. е., например, прямая CB ориентирована так, что $C \prec B$). Пусть α_1 — касательная в точке A к окружности ABD, а α_2 — касательная в точке A к окружности ABC. Кроме того, пусть

γ — угол от прямой CB к прямой CA,

δ — угол от прямой DB к прямой DA,

φ_1 — угол от прямой AB к касательной α_1,

φ_2 — угол от прямой AB к касательной α_2.



По определению,

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Кроме того, по известной теореме о вписанных углах (справедливой и для ориентированных углов):

$$\varphi_1 = \delta, \quad \varphi_2 = \gamma.$$

Следовательно,

$$\varphi = \gamma - \delta.$$

Предположим теперь, что на плоскости нам задана комплексная координата z, определяющая данную ориентацию o (т. е. такая, что соответствующие прямоугольные координаты x, y определяют ориентацию o).

Пусть

$$z_1, \ z_2, \ z_3, \ z_4$$

— комплексные координаты точек A, B, C, D. Согласно известной геометрической интерпретации аргумента комплексного числа аргумент $\arg(z_2 - z_3)$ числа $z_2 - z_3$ равен углу от оси Ox к прямой CB, а аргумент $\arg(z_1 - z_3)$ числа $z_1 - z_3$ равен углу от оси Ox к прямой CA. Следовательно, угол γ равен разности этих аргументов, т. е. аргументу соответствующего частного:

$$\gamma = \arg \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}.$$

Аналогично,

$$\delta = \arg \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \arg W, \tag{1}$$

где

$$W = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}. \tag{2}$$

Пусть теперь одна (и только одна) из точек A, B, C, D является бесконечно удаленной точкой M_∞. Оказывается, что

формула (1) *остается справедливой, если считать, что*

$$\begin{aligned}
&W = \frac{1}{z_2 - z_3} : \frac{1}{z_2 - z_4} = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} && \text{при } z_1 = \infty,\\
&W = (z_1 - z_3) : (z_1 - z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} && \text{при } z_2 = \infty,\\
&W = 1 : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} && \text{при } z_3 = \infty,\\
&W = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : 1 = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} && \text{при } z_4 = \infty,
\end{aligned} \tag{3}$$

т. е. если определять число W *формулой, получающейся из формулы* (2) *соответствующим предельным переходом.*

Задание. Докажите это утверждение.

Если точки A, B, C, D принадлежат одной окружности, т. е. если окружности ABD и ABC совпадают, то естественно считать (по определению!), что $\varphi = 0$, если ориентации окружностей ABD и ABC совпадают, и $\varphi = \pi$, если эти ориентации различны. Оказывается, что

формула (1) *остается справедливой и в этом случае.*

Задание. Докажите это утверждение (не забудьте рассмотреть случай, когда окружности ABD и ABC проходят через точку M_∞).

Сопоставляя все сказанное мы немедленно получаем, что

точки A, B, C, D тогда и только тогда определяют ориентацию, задаваемую координатой z, когда аргумент числа W положителен.

Теперь мы уже можем перейти к формальным определениям.

Определение 1. Число W, определенное формулой (2) (или формулами (3)), называется *двойным отношением* точек A, B, C, D.

Из геометрической интерпретации модуля разности двух комплексных чисел непосредственно вытекает, что

модуль $|W|$ двойного отношения четырех точек не зависит от выбора координатной системы z.

Действительно, если, например, все точки A, B, C, D конечны, то

$$|W|=\frac{|AC|}{|BC|}:\frac{|AD|}{|BD|}.$$

Что же касается аргумента двойного отношения W, то, как показывает формула (1), его абсолютная величина имеет инвариантный геометрический смысл (и потому не зависит от выбора координатной системы z), а знак определяется ориентацией плоскости, задаваемой координатой z (и потому при переходе к другой координатной системе может измениться).

Таким образом,

с точностью до знака аргумента (т. е. с точностью до перехода к комплексно-сопряженному числу $\overline{W}$*) двойное отношение не зависит от выбора координатной системы (т. е. определено корректно).*

Замечание 2. Мы доказали корректность определения числа W, пользуясь геометрическими соображениями. Методологически более выдержанным было бы прямое алгебраическое доказательство, использующее формулы перехода от одной координатной системы к другой.

Упражнение. Дайте алгебраическое доказательство корректности определения двойного отношения четырех точек.

Из формулы (1) непосредственно вытекает следующее

Предложение 1. *Точки A, B, C, D тогда и только тогда принадлежат одной окружности, когда их двойное отношение W вещественно.*

Задание. Докажите предложение 1 прямым вычислением, не используя формулы (1) (не забудьте рассмотреть случай, когда окружность является прямой).

Определение 2. Две четверки точек пополненной плоскости, каждая из которых состоит из точек, не принадлежащих одной окружности, называются *одноименными*, если двойные отношения W этих четверок имеют аргументы $\arg W$ одного знака (конечно, при условии, что эти аргументы выбраны так, чтобы $-\pi < \arg W < \pi$).

Согласно предложению 1 это определение имеет смысл (аргументы двойных отношений W не могут быть равны ни нулю, ни π). Кроме того, ясно, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора координатной системы z.

Очевидно, что отношение одноименности четверок точек пополненной плоскости является отношением эквивалентности.

Определение 3. Соответствующие классы эквивалентности называются *ориентациями* пополненной плоскости. Пополненная плоскость, для которой выбрана ориентация, называется *ориентированной*.

Проведенные выше неформальные рассмотрения показывают, что это определение равносильно определению, принятому в начале этого пункта.

Теперь мы можем геометрически охарактеризовать различие между конформными преобразованиями из группы Conf^+ и из смежного класса Conf^-.

Определение 4. Мы будем говорить, что конформное преобразование Ω *сохраняет ориентации*, если для любой четверки точек A, B, C, D, не принадлежащих одной окружности, четверка

$$A' = \Omega(A), \quad B' = \Omega(B), \quad C' = \Omega(C), \quad D' = \Omega(D)$$

(также не принадлежащая одной окружности) одноименна четверке A, B, C, D (определяет ту же ориентацию). Если же для любой четверки A, B, C, D четверка A', B', C', D' определяет противоположную ориентацию, мы будем говорить, что конформное преобразование Ω *обращает ориентации.*

Теорема 1. *Конформное преобразование тогда и только тогда принадлежит группе* Conf^+ (*смежному классу* Conf^-), *когда оно сохраняет* (*обращает*) *ориентации.*

Замечание 3. Априори могли бы существовать конформные преобразования, не сохраняющие и не обращающие ориентаций, т. е. такие, что для одной четверки A, B, C, D четверка A', B', C', D' определяет ту же ориентацию, что и четверка A, B, C, D, а для другой четверки A, B, C, D — противоположную. Согласно теореме 1 таких конформных преобразований не существует.

Упражнение. Докажите этот факт непосредственно (не пользуясь теоремой 1).

Мы выведем теорему 1 из следующего предложения:

Предложение 2. *Для любого преобразования из группы* Conf^+ *и любой четверки различных точек* A, B, C, D *двойное отношение* W' *точек* A', B', C', D' *равно двойному отношению* W *точек* A, B, C, D:

$$W' = W.$$

Аналогично, для любого преобразования из смежного класса Conf^-:

$$W' = \overline{W}.$$

Доказательство. По определению, конформное преобразование из группы Conf^+ записывается в комплексной координате z формулой вида

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}.$$

При этом, без ограничения общности, можно предполагать, что эта запись нормирована, т. е. что

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$

Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 — координаты точек A, B, C, D, а z_1', z_2', z_3', z_4' — координаты точек A', B', C', D'.

Тогда

$$z_1' - z_3' = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_3 + b}{cz_3 + d} = \frac{(ad - bc)(z_1 - z_3)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)} =$$
$$= \frac{z_1 - z_3}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)},$$

и аналогично,

$$z_2' - z_3' = \frac{z_2 - z_3}{(cz_2 + d)(cz_3 + d)},$$
$$z_1' - z_4' = \frac{z_1 - z_4}{(cz_1 + d)(cz_4 + d)},$$
$$z_2' - z_4' = \frac{z_2 - z_4}{(cz_2 + d)(cz_4 + d)}.$$

Поэтому

$$\frac{z_1' - z_3'}{z_2' - z_3'} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d},$$
$$\frac{z_1' - z_4'}{z_2' - z_4'} = \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \cdot \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d}$$

и, следовательно,

$$\frac{z_1' - z_3'}{z_2' - z_3'} : \frac{z_1' - z_4'}{z_2' - z_4'} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4},$$

т. е. $W' = W$.

Равенство

$$W' = \overline{W}$$

для конформных преобразований из Conf^- доказывается аналогично.

Тем самым предложение 2 полностью доказано.

Доказательство теоремы 1. Если $W' = W$, то $\arg W' = \arg W$, а если $W' = \overline{W}$, то $\arg W' = -\arg W$. Поэтому в силу определения 1 четверки A, B, C, D и A', B', C', D' определяют в первом случае одну и ту же ориентацию, а во втором — противоположные ориентации.

5. Конформная геометрия

Определение 1. Свойство фигур на пополненной плоскости называется *конформно инвариантным*, если вместе с некоторой фигурой X этим свойством обладает и любая фигура X', получающаяся из фигуры X произвольным конформным преобразованием. Изучение конформно инвариантных свойств составляет предмет *конформной геометрии.*

Пополненная плоскость, на которой рассматривается конформная геометрия, называется *конформной плоскостью.*

Все точки конформной плоскости совершенно равноправны, так что, в частности, понятие конечных точек и бесконечно удаленной точки в конформной геометрии отсутствует.

Замечание 1. Можно, конечно, рассматривать лишь конформные преобразования, оставляющие точку M_∞ на месте. В соответствующей *конформно-евклидовой геометрии* понятие конечных точек смысла уже имеет.

Взаимоотношение между конформной и конформно-евклидовой геометриями полностью аналогично взаимоотношению между проективной и аффинно-проективной геометриями.

Поскольку конформные преобразования, оставляющие на месте точку M_∞, являются (см. п. 2) не чем иным, как преобразованиями подобия (возможно, не сохраняющими ориентаций); конформно-евклидова геометрия отличается от *геометрии подобия* (изучающей свойства, одинаковые у всех подобных фигур) лишь наличием дополнительной точки M_∞.

Таким образом, взаимоотношение между конформно-евклидовой геометрией и геометрией подобия полностью аналогично взаимоотношению между аффинно-проективной и аффинной геометриями.

Формально-аксиоматическое определение конформной плоскости без труда получается на основе общих идей § 3 гл. 2.

Введем в рассмотрение множество $\mathbb{C}^+$ всех комплексных чисел, пополненное символом ∞, и группу $\operatorname{Conf}(\mathbb{C}^+)$ его дробно-линейных и сопряженно дробно-линейных преобразований

$$\begin{matrix} z' = \dfrac{az+b}{cz+d}, \\ z' = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Определение 2. Множество $\mathfrak{P}$, для которого задано семейство $\operatorname{Coor}(\mathfrak{P})$ его биективных отображений

$$\alpha\colon \mathfrak{P} \to \mathbb{C}^+$$

на множество $\mathbb{C}^+$, называется *конформной плоскостью*, если выполнены следующие две аксиомы:

Аксиома 1. $\varphi \circ \alpha \in \mathrm{Coor}(\mathfrak{P})$ *для любых* $\alpha \in \mathrm{Coor}(\mathfrak{P})$ *и* $\varphi \in \mathrm{Conf}(\mathbb{C}^+)$.

Аксиома 2. $\alpha' \circ \alpha^{-1} \in \mathrm{Conf}(\mathbb{C}^+)$ *для любых* $\alpha, \alpha' \in \mathrm{Coor}(\mathfrak{P})$.

Согласно этому определению множество $\mathbb{C}^+$ можно превратить в конформную плоскость, полагая

$$\mathrm{Coor}(\mathbb{C}^+) = \mathrm{Conf}(\mathbb{C}^+).$$

Эта плоскость называется *стандартной конформной плоскостью.*

Конформная плоскость в смысле определения 1 является, конечно, конформной плоскостью в смысле определения 2.

Изоморфизмы конформных плоскостей определяются очевидным образом и для них имеют место известные нам общие теоремы. При этом, *автоморфизмами конформных плоскостей являются конформные преобразования и только они* (это лишь иная формулировка предложения 1 п. 2).

Важный вариант конформной геометрии мы получим, заменив группу Conf группой Conf^+ конформных преобразований, сохраняющих ориентации. Мы будем называть эту геометрию *специальной конформной геометрией.* Чтобы получить описывающие ее аксиомы, нужно в аксиомах 1 и 2 группу $\mathrm{Conf}(\mathbb{C}^+)$ заменить группой $\mathrm{Conf}^+(\mathbb{C}^+)$ дробно-линейных преобразований.

Поскольку

$$\mathrm{Conf}^+(\mathbb{C}^+) \subset \mathrm{Conf}(\mathbb{C}^+),$$

каждая специальная конформная плоскость автоматически определяется как конформная плоскость. Чтобы, обратно, от конформной плоскости перейти к специальной конформной плоскости, нужно зафиксировать некоторую координатную систему (ср., например, в п. 5 § 1 гл. 3 обсуждение аналогичной связи между аффинно-проективной и проективной геометриями). При этом две координатные системы α и α' тогда и только тогда приводят к одной и той же специальной конформной плоскости, когда

$$\alpha' \circ \alpha^{-1} \in \mathrm{Conf}^+(\mathbb{C}^+),$$

т. е. когда они одноименны. Другими словами, чтобы получить из конформной плоскости специальную конформную плоскость, нужно зафиксировать некоторую ориентацию. По этой причине специальная конформная геометрия называется также *конформной геометрией ориентированной плоскости.*

Замечание 2. Комплексная координата z, которую мы использовали выше, к сожалению, не вполне адекватна конформной геометрии, поскольку точка M_∞ имеет в ней особую координату $z = \infty$. Более отвечают сути дела две однородные координаты z_1

и z_2, связанные с координатой z соотношением)

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

(и принимающие значения не в $\mathbb{C}^+$, а в $\mathbb{C}$). В этих координатах дробно-линейные преобразования записываются формулами

$$\rho z'_1 = az_1 + bz_2,$$
$$\rho z'_2 = cz_1 + dz_2.$$

Но это — в точности формулы, описывающие проективные преобразования комплексной проективной прямой.

Следовательно,

конформные ориентированные плоскости — это не что иное, как комплексные проективные прямые, а конформные преобразования, сохраняющие ориентацию, — это проективные преобразования комплексных проективных прямых.

Другими словами,

конформная геометрия ориентированной плоскости — это в точности проективная геометрия комплексной прямой.

В конформной геометрии понятие прямой смысла не имеет. Оно заменяется понятием *окружности*. Отметим, что, тем не менее, понятия центра и радиуса окружности в конформной геометрии отсутствуют. Две области, на которые окружность разбивает конформную плоскость, совершенно равноправны. Они называются *полуплоскостями*, определенными данной окружностью.

Поскольку любые три точки конформной плоскости можно конформным преобразованием перевести в любые другие три точки, фигура, состоящая из трех точек, никаких конформных инвариантов не имеет. Тем более это справедливо для фигуры, состоящей из двух точек. Поэтому никакого аналога понятия расстояния в конформной геометрии не имеется.

Напротив, фигура, состоящая из четырех точек, обладает семиинвариантом W — двойным отношением этих точек. Этот семиинвариант не меняется при преобразованиях из подгруппы Conf^+ и переходит в комплексно-сопряженное число при преобразованиях из смежного класса Conf^-. Следовательно, в конформной геометрии ориентированной плоскости он является инвариантом.

Таким образом, в проективной геометрии комплексной прямой имеется инвариант четырех точек — их двойное отношение. Оказывается, что построение этого инварианта может быть перенесено в проективную геометрию плоскости или пространства (и притом над любым полем). В проективной геометрии этот инвариант играет роль, сравнимую с ролью инварианта двух точек — расстояния в евклидовой геометрии, и никакое более или менее глубокое развитие проективной геометрии без него невозможно. К сожалению, все эти вопросы далеко выходят за рамки нашего элементарного курса.

В отличие от понятия длины понятие у г л а (между окружностями) в конформной геометрии смысл имеет, поскольку согласно формуле (1) п. 4 угол между окружностями выражается через инвариант W.

При формально-аксиоматическом построении конформной геометрии формулу (1) п. 4 мы должны принять за определение. Это делается следующим образом.

Пусть Σ_1 и Σ_2 — две ориентированные окружности на конформной ориентированной плоскости, пересекающиеся в точках A и B. Выберем на окружности Σ_1 точку C, отличную от точек A, B и такую, что тройка (A, B, C) определяет данную ориентацию окружности Σ_1. Аналогично, на окружности Σ_2 выберем точку D, отличную от точек A, B и такую, что тройка (A, B, D) определяет данную ориентацию окружности Σ_2. Пусть W — двойное отношение точек A, B, C, D.

Определение 3. Аргумент $\arg W$ двойного отношения W называется *углом* от ориентированной окружности Σ_1 к ориентированной окружности Σ_2 в точке A на ориентированной конформной плоскости.

Конечно, в рамках формально-аксиоматического построения конформной геометрии это определение требует проверки корректности, т. е. доказательства независимости аргумента $\arg W$ от выбора точек C и D.

Упражнение. Докажите корректность определения 2.

Задание. Докажите, что угол от окружности Σ_1 к окружности Σ_2 в точке B равен $-\arg W$.

На неориентированной конформной плоскости *углом* между (неориентированными) окружностями Σ_1 и Σ_2 называется абсолютная величина $|\arg W|$ аргумента двойного отношения точек A, B, C, D, где A и B, как и выше, — общие точки окружностей Σ_1 и Σ_2, а C и D — их произвольные точки, отличные от точек A и B. Это определение также корректно.

Дальнейшее развитие конформной геометрии мы предоставим инициативе читателя.

§ 4. ГРУППЫ И ГЕОМЕТРИИ

1. Геометрии с данной группой автоморфизмов

Все разнообразные «геометрии», изученные в предыдущих главах, строились по некоей единой схеме. Рассмотрим эту схему в общем виде.

В первую очередь мы фиксируем некоторую *числовую модель* $\mathfrak{M}_0$, элементы («точки») которой тем или иным способом строятся из чисел (вообще говоря, принадлежащих произвольному полю $\mathbb{K}$), и некоторую *группу преобразований* G_0 этой модели. Например, для аффинной геометрии плоскости $\mathfrak{M}_0 = \mathbb{R}^2$ и $G_0 = \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$, для евклидовой геометрии $\mathfrak{M}_0 = \mathbb{R}^2$ и $G_0 = \mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$,