В отличие от понятия длины понятие угла (между окружностями) в конформной геометрии смысл имеет, поскольку согласно формуле (1) п. 4 угол между окружностями выражается через инвариант W.

При формально-аксиоматическом построении конформной геометрии формулу (1) п. 4 мы должны принять за определение. Это делается следующим образом.

Пусть Σ_1 и Σ_2 — две ориентированные окружности на конформной ориентированной плоскости, пересекающиеся в точках A и B. Выберем на окружности Σ_1 точку C, отличную от точек A, B и такую, что тройка (A, B, C) определяет данную ориентацию окружности Σ_1. Аналогично, на окружности Σ_2 выберем точку D, отличную от точек A, B и такую, что тройка (A, B, D) определяет данную ориентацию окружности Σ_2. Пусть W — двойное отношение точек A, B, C, D.

Определение 3. Аргумент $\arg W$ двойного отношения W называется *углом* от ориентированной окружности Σ_1 к ориентированной окружности Σ_2 в точке A на ориентированной конформной плоскости.

Конечно, в рамках формально-аксиоматического построения конформной геометрии это определение требует проверки корректности, т. е. доказательства независимости аргумента $\arg W$ от выбора точек C и D.

Упражнение. Докажите корректность определения 2.

Задание. Докажите, что угол от окружности Σ_1 к окружности Σ_2 в точке B равен $-\arg W$.

На неориентированной конформной плоскости *углом* между (неориентированными) окружностями Σ_1 и Σ_2 называется абсолютная величина $|\arg W|$ аргумента двойного отношения точек A, B, C, D, где A и B, как и выше, — общие точки окружностей Σ_1 и Σ_2, а C и D — их произвольные точки, отличные от точек A и B. Это определение также корректно.

Дальнейшее развитие конформной геометрии мы предоставим инициативе читателя.

§ 4. ГРУППЫ И ГЕОМЕТРИИ

1. Геометрии с данной группой автоморфизмов

Все разнообразные «геометрии», изученные в предыдущих главах, строились по некоей единой схеме. Рассмотрим эту схему в общем виде.

В первую очередь мы фиксируем некоторую *числовую модель* $\mathfrak{M}_0$, элементы («точки») которой тем или иным способом строятся из чисел (вообще говоря, принадлежащих произвольному полю $\mathbb{K}$), и некоторую *группу преобразований* G_0 этой модели. Например, для аффинной геометрии плоскости $\mathfrak{M}_0 = \mathbb{R}^2$ и $G_0 = \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$, для евклидовой геометрии $\mathfrak{M}_0 = \mathbb{R}^2$ и $G_0 = \mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$,

для проективной геометрии $\mathfrak{M}_0 = \mathbb{RP}^2$ и $G_0 = \mathrm{Proj}(\mathbb{RP}^2)$, для конформной геометрии $\mathfrak{M}_0 = \mathbb{C}^+$ и $G_0 = \mathrm{Conf}(\mathbb{C}^+)$, и т. д.

Далее, мы рассматриваем произвольное множество $\mathfrak{M}$ и семейство $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$ его биективных отображений («координатных систем») на множество $\mathfrak{M}_0$, подчиненное известным аксиомам 1 и 2. Это множество мы и объявляем «областью действия» (моделью) соответствующей геометрии. Тот факт, что геометрия (при данных $\mathfrak{M}_0$ и G_0) получается только «одна», находит строгое выражение в утверждении об изоморфности различных ее моделей (свойство полноты аксиом).

Автоморфизмы каждой модели $\mathfrak{M}$ совпадают с преобразованиями «по равенству координат» и составляют группу $G = \mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$, изоморфную группе $G_0 = \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}_0)$ (изоморфизм группы G на группу G_0 задается произвольной координатной системой α: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_0$ и определяется формулой $\Phi \mapsto \alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1}$).

После того как группа G построена, мы можем забыть о числовой модели $\mathfrak{M}_0$ и определить геометрию модели $\mathfrak{M}$ как науку, изучающую свойства подмножеств множества $\mathfrak{M}$, инвариантные относительно группы G.

Числовая модель $\mathfrak{M}_0$ и ее группа автоморфизмов G_0 нам нужна для того, чтобы в произвольной модели $\mathfrak{M}$ можно было говорить о координатах и тем самым применить к изучению модели $\mathfrak{M}$ метод аналитической геометрии.

Самым общим образом можно рассматривать произвольное множество $\mathfrak{M}$ и произвольную группу G его преобразований и называть «геометрией» этого множества науку, изучающую свойства подмножеств, инвариантные относительно группы G. В этой общности геометрия растворяется в общей теории групп преобразований и теряет свою специфику.

Изложенный общий взгляд на геометрию был выдвинут в конце XIX в. немецким математиком Ф. Клейном. Он позволяет обозреть с единой точки зрения всевозможные геометрии и расположить их в определенном иерархическом порядке.

Например, возможна ситуация, когда две геометрии имеют одну и ту же числовую модель $\mathfrak{M}_0$ и отличаются лишь соответствующими группами G_0 и H_0, причем группа H_0 является подгруппой группы G_0:

$$H_0 \subset G_0$$

(стандартный пример: евклидова геометрия с группой $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$ и аффинная геометрия с группой $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$).

В этом случае любая модель $\mathfrak{N}$ геометрии с группой H_0 естественным образом определяется как модель $\mathfrak{M}$ геометрии с группой G_0: достаточно принять за координатные системы модели $\mathfrak{M}$ всевозможные отображения вида $\varphi \circ \alpha$, где α — произвольная координатная система модели $\mathfrak{N}$, а φ — произвольное преобразование из группы G_0; см. п. 3 § 3 гл. 2, где все это подробно обсуждено для случая $H_0 = \mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$ и $G_0 = \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$. В частности,

каждая координатная система модели $\mathfrak{N}$ будет координатной системой модели $\mathfrak{M}$:

$$\mathrm{Coor}\,(\mathfrak{N}) \subset \mathrm{Coor}\,(\mathfrak{M})$$

(«любые прямоугольные координаты являются аффинными координатами») и любой автоморфизм модели $\mathfrak{N}$ будет автоморфизмом модели $\mathfrak{M}$ («любое ортогональное преобразование является аффинным преобразованием»), так что группа H автоморфизмов модели $\mathfrak{N}$ будет подгруппой группы G автоморфизмов модели $\mathfrak{M}$:

$$H \subset G.$$

При этом для каждой координатной системы α модели $\mathfrak{N}$ (рассматриваемой как координатная система модели $\mathfrak{M}$) соответствующий изоморфизм

$$\Phi \longmapsto \alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1}$$

группы G на группу G_0 будет отображать подгруппу H на подгруппу H_0 и его ограничение на эту подгруппу будет совпадать с изоморфизмом $H \to H_0$, определенным системой α, рассматриваемой как координатная система модели $\mathfrak{N}$:

$$\begin{array}{ccc} H & \subset & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_0 & \subset & G_0 \end{array}$$

Поскольку $H \subset G$, любое свойство, инвариантное относительно G, будет инвариантно и относительно H, так что любое утверждение геометрии с группой G будет справедливо и в геометрии с группой H. В этом смысле геометрия с «меньшей» группой H «богаче» геометрии с «большей» группой G, т. е. геометрия с группой G является «частью» геометрии с группой H («аффинная геометрия является частью евклидовой»).

Обратный переход от геометрии с группой G_0 к геометрии с группой H_0 осуществляется выбором для любой модели $\mathfrak{M}$ геометрии с группой G_0 произвольной координатной системы

$$\alpha_0\colon\ \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_0.$$

Когда эта система выбрана, мы можем построить модель $\mathfrak{M}_{\alpha_0}$ геометрии с группой H_0, считая, что как множество она совпадает с моделью $\mathfrak{M}$, и принимая за ее координатные системы всевозможные отображения вида $\varphi \circ \alpha_0$, где φ — произвольное преобразование из группы H_0. Модель $\mathfrak{M}_{\alpha_0}$ зависит, естественно, от системы α_0, причем

$$\mathfrak{M}_{\alpha_0} = \mathfrak{M}_{\alpha_1}$$

тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 \circ \alpha_0^{-1} \in H_0$$

(см., например, в п. 5 § 1 гл. 4 случай $H_0 = \mathrm{Aff}(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$, $G_0 = \mathrm{Proj}(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$).

Отметим две важные особенности этой конструкции.

Во-первых, модель $\mathfrak{M}_{\alpha_0}$ определена для любой координатной системы α_0. В частности, для случая $H_0 = \mathrm{Ort}(\mathbb{R}^2)$ и $G_0 = \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ это означает, что в аффинную плоскость можно так ввести метрику (измерение углов и длин), чтобы любой, наперед заданный аффинный репер Oe_1e_2 оказался бы прямоугольным репером.

Во-вторых, модели геометрии с группой H_0, имеющие вид $\mathfrak{M}_{\alpha_0}$, обладают дополнительной структурой, которой не обладают произвольные модели. Эта дополнительная структура состоит в том, что семейство $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M}_{\alpha_0})$ координатных систем модели $\mathfrak{M}_{\alpha_0}$ вполне определенным образом вложено в семейство $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$ координатных систем модели $\mathfrak{M}$.

Например, для евклидовой геометрии утверждение, что данный аффинный репер является евклидовым (прямоугольным) репером, зависит, кроме всего прочего, от выбора эталона длины, т. е. отрезка, длина которого принята за единицу. Если мы возьмем другой эталон длины, то мы получим совсем другие евклидовы координатные системы.

Поэтому при изучении геометрии на моделях вида $\mathfrak{M}_{\alpha_0}$ нужно очень внимательно следить, чтобы доказываемые утверждения не зависели от вложения $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M}_{\alpha_0})$ в $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$ (конечно, никто не запрещает рассматривать утверждения, зависящие от этого вложения, — например, в евклидовой геометрии утверждения, зависящие от выбора эталона длины, — но это будут уже утверждения, не принадлежащие рассматриваемой геометрии).

Для дополнительной иллюстрации изложенных общих соображений мы рассмотрим в следующих пунктах несколько интересных примеров. При этом мы, как правило, ограничимся геометриями, числовой моделью которых является множество $\mathbb{R}^2$.

Геометрии с моделью $\mathbb{R}^2$ можно представлять себе действующими на обычной, неформально рассматриваемой, плоскости. Как мы знаем (см. п. 2 § 1), для того чтобы в геометрии на плоскости с группой автоморфизмов G имело смысл понятие прямой, необходимо (и достаточно), чтобы группа G была подгруппой аффинной группы $\mathrm{Aff}(2)$. Такого рода геометрии мы будем называть *геометриями аффинного типа*. За недостатком места мы в основном ими и ограничимся.

Аналогично, геометрии с моделью $\mathbb{R}P^2$ можно представлять себе действующими на расширенной плоскости. Для того чтобы в такой геометрии имело смысл понятие прямой, необходимо и достаточно, чтобы ее группа автоморфизмов G была подгруппой группы $\mathrm{Proj}(2)$. Некоторые из таких *геометрий проективного типа* чрезвычайно интересны, но, к сожалению, у нас нет возможности здесь их рассмотреть.

По определению, чтобы получить какую-нибудь геометрию аффинного типа, нужно выделить в группе $\mathrm{Aff}(2)$ определенную

подгруппу. Существует некий общий метод выделения подгрупп группы Aff(2) (и, вообще, любой группы преобразований G), которым мы и будем в дальнейшем пользоваться. Этот метод состоит в том, что фиксируется некоторый геометрический объект (точка, ориентация, бивектор, направление и т. п.) и рассматриваются все преобразования, оставляющие этот объект инвариантным. Ясно, что эти преобразования образуют подгруппу группы Aff(2) (конечно, эта подгруппа может оказаться неинтересной: например, совпадать со всей группой Aff(2), или, наоборот, содержать только тождественное преобразование E). Вопрос о том, можно ли таким образом задать произвольную подгруппу группы Aff(2), мы рассматривать не будем.

2. Простейшие геометрии аффинного типа

Наиболее близкой к аффинной геометрии геометрией аффинного типа является геометрия с группой $\mathrm{Aff}^+(2)$ всех аффинных преобразований, сохраняющих ориентации. Мы будем называть эту геометрию *специальной аффинной геометрией.*

Отметим, что в то время как имеет смысл говорить об аффинной геометрии над произвольным полем $\mathbb{K}$ (см. п. 4 § 3 гл. 2), специальная аффинная геометрия определена лишь над полем $\mathbb{R}$.

«Евклидовым» вариантом специальной аффинной геометрии является *специальная евклидова геометрия* с группой $\mathrm{Ort}^+(2)$ всех сохраняющих ориентации ортогональных преобразований. Эта геометрия отличается от евклидовой геометрии только тем, что симметричные фигуры в ней считаются различными.

Чтобы проиллюстрировать различие между евклидовой и специальной евклидовой геометрией, можно, например, указать, что понятие векторного произведения (п. 6 § 6 гл. 1) принадлежит специальной евклидовой геометрии (пространства); в собственно евклидовой геометрии это понятие отсутствует.

Плоскость, в которой действует специальная аффинная (или специальная евклидова) геометрия, естественно называть *специальной аффинной* (соответственно — *евклидовой*) *плоскостью.* Чтобы из аффинной плоскости $\mathfrak{M}$ получить специальную аффинную плоскость $\mathfrak{M}_{\text{спец}}$, нужно, следуя общей схеме, изложенной в п. 1, выбрать некоторую аффинную координатную систему α: $\mathfrak{M} \to \mathbb{R}^2$ и рассмотреть все аффинные координатные системы вида $\varphi \circ \alpha$, где $\varphi \in \mathrm{Aff}^+(\mathbb{R}^2)$. При этом две аффинные координатные системы α_1 и α_2 тогда и только тогда приводят к одной и той же специальной аффинной плоскости, когда $\alpha_1 \circ \alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aff}^+(\mathbb{R}^2)$, т. е. когда эти системы одноименны (определяют одну и ту же ориентацию). Следовательно, переход от аффинной плоскости к специальной аффинной плоскости заключается в выборе на плоскости некоторой ориентации. В этом смысле можно сказать, что специальные аффинные плоскости являются не чем иным, как *ориентированными аффинными плоскостями.*

Однако выбор двух различных ориентаций приводит к различным (хотя, конечно, и изоморфным) специальным аффинным плоскостям. Поэтому, представляя себе специальную аффинную плоскость как ориентированную аффинную плоскость, надо постоянно следить за тем, чтобы результаты не зависели от выбора ориентации. Это является проявлением общего феномена зависимости от вложения $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M}_{a_0})$ в $\mathrm{Coor}(\mathfrak{M})$, который мы обсуждали в п. 1.

Конечно, все это с равным правом справедливо и для специальных евклидовых плоскостей.

Геометрия с группой $\mathrm{Aff}_O(2)$ всех аффинных преобразований плоскости, оставляющих на месте некоторую точку O, называется *центроаффинной геометрией*, а соответствующая плоскость — *центрированной аффинной плоскостью*. Центроаффинная геометрия отличается от аффинной геометрии тем, что точка O играет в ней особую роль.

Координатными системами центроаффинной геометрии являются аффинные координатные системы с началом в точке O.

Центроаффинная геометрия определена, конечно, и для случая произвольного поля $\mathbb{K}$.

Точки центрированной аффинной плоскости находятся в естественном биективном соответствии с векторами из $\mathrm{Vect}(2)$ (точке M соответствует ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$). Поэтому в центроаффинной геометрии можно, в частности, говорить о *сумме точек* и о *произведении точки на число* (понятия, в общей аффинной геометрии смысла не имеющие). Вообще, поскольку группа $\mathrm{Aff}_O(2)$ изоморфна группе обратимых линейных операторов $\mathrm{Op}(2)$, можно сказать, что *центроаффинная геометрия является не чем иным, как геометрией линеала* $\mathrm{Vect}(2)$ *относительно группы* $\mathrm{Op}(2)$.

Вариантом центроаффинной геометрии, «различающим симметричные фигуры», является *специальная центроаффинная геометрия* с группой $\mathrm{Aff}_O^+(2)$ всех сохраняющих ориентации аффинных преобразований, оставляющих точку O на месте. С учетом сказанного выше можно сказать, что специальная центроаффинная геометрия является не чем иным, как геометрией ориентированного линеала $\mathrm{Vect}(2)$.

Евклидовым вариантом центроаффинной геометрии является *центроевклидова геометрия* с группой $\mathrm{Ort}_O^+(2)$, состоящей из всех ортогональных преобразований, оставляющих точку O на месте. Эта геометрия совпадает с «метрической геометрией векторов» из $\mathrm{Vect}(2)$. В ней имеют смысл понятия *длины* точки и *угла* между двумя точками (впрочем, обычно длину точки, т. е. длину соответствующего радиус-вектора, называют *нормой* точки, а угол между двумя точками, т. е. угол между соответствующими радиус-векторами, — *угловым расстоянием* между этими точками).

Можно также рассматривать *специальную центроевклидову геометрию* с группой $\mathrm{Ort}_O^+(2) = \mathrm{Rot}_O(2)$ всех вращений вокруг точки O. Эта геометрия отличается от центроевклидовой геометрии только тем, что симметричные фигуры (с осью симметрии, проходящей через точку O) в ней считаются различными.

Пусть Φ — произвольное аффинное преобразование плоскости. В некоторой системе аффинных координат x, y с репером Oe_1e_2 это преобразование выражается, как мы знаем, формулами

$$\begin{aligned} x' &= a_1^1 x + a_2^1 y + b^1, \\ y' &= a_1^2 x + a_2^2 y + b^2, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

— матрица индуцированного линейного оператора Φ в базисе e_1, e_2. В любом другом базисе e_1', e_2' матрицей оператора Φ является матрица $C^{-1}AC$, где C — матрица перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2' (см. п. 3 § 7 гл. 1). Так как

$$|C^{-1}AC| = |C|^{-1} \cdot |A| \cdot |C| = |A|,$$

то, следовательно,

определитель $|A|$ матрицы A не зависит от выбора репера Oe_1e_2.

Этот определитель мы будем называть *определителем аффинного преобразования* Φ и будем его обозначать символом $|\Phi|$ или $\det \Phi$.

Согласно только что доказанному, это определение корректно (не зависит от выбора репера Oe_1e_2).

Геометрический смысл определителя аффинного преобразования выясняется следующим предложением:

Предложение 1. *Пусть X — произвольная плоская фигура и пусть X' — фигура, получающаяся из неё аффинным преобразованием Φ. Тогда площадь фигуры X' равна площади фигуры X, умноженной на абсолютную величину определителя преобразования Φ:*

$$\text{площ. } X' = |\det \Phi| \cdot \text{площ. } X.$$

Доказательство. Выберем на плоскости некоторую прямоугольную систему координат Oxy. Тогда, как известно из анализа, площадь фигуры X будет равна абсолютной величине интеграла

$$\iint_X dx\,dy.$$

С другой стороны, согласно формуле замены переменных в двойной интеграле при любом преобразовании плоскости, выражающемся в координатах x, y формулами

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y), \\ y' &= g(x, y), \end{aligned} \tag{2}$$

имеет место равенство

$$\iint\limits_{X'} dx\,dy = \iint\limits_{X} \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}\,dx\,dy,$$

где X' — образ множества X при преобразовании (2), а

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}$$

— якобиан этого преобразования.

Для завершения доказательства остается заменить, что в нашем случае преобразование (2) выражается формулами (1) и потому имеет постоянный якобиан, равный определителю преобразования Ф.

Для читателей, не знакомых с интегральным исчислением, дадим доказательство, не использующее интегралов.

Пусть снова Oxy — произвольная система прямоугольных координат на плоскости. Всевозможные прямые вида $x = n\varepsilon$ и $y = m\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, а n и m — произвольные целые числа, разбивают плоскость на квадраты K_ε со сторонами, равными ε (и потому имеющими площадь ε^2). Пусть N_ε — число всех таких квадратов, содержащихся в X. Тогда по определению площади

$$\text{площ. } X = \lim_{\varepsilon \to 0} (N_\varepsilon \varepsilon^2).$$

Предположим, что наше аффинное преобразование Ф является композицией двух сжатий: одного — к оси Ox с коэффициентом k_1 и другого — к оси Oy с коэффициентом k_2. При этом преобразовании квадраты K_ε перейдут в прямоугольники K'_ε со сторонами длины $k_1\varepsilon$ и $k_2\varepsilon$ (и потому имеющие площадь $k_1k_2\varepsilon^2$), а число всех таких прямоугольников, содержащихся в X', будет равно N_ε. Поскольку при вычислении площади фигуры X' мы с равным правом вместо квадратов можем использовать прямоугольники K'_ε, то

$$\text{площ. } X' = \lim_{\varepsilon \to 0} (N_\varepsilon \cdot k_1k_2\varepsilon^2) = k_1k_2 \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} (N_\varepsilon \varepsilon^2) = k_1k_2 \cdot \text{площ. } X.$$

Поскольку определитель преобразования Ф равен, очевидно, k_1k_2, тем самым для рассматриваемых преобразований предложение 1 доказано.

Пусть теперь преобразование Ф ортогонально. При этом преобразовании квадраты K_ε перейдут в некоторые квадраты K'_ε той же площади ε^2, но только, возможно, повернутые (и сдвинутые), причем число квадратов K'_ε, содержащихся в X', будет по-прежнему равно числу N_ε квадратов K_ε, содержащихся в X. Следовательно,

$$\text{площ. } X' = \lim_{\varepsilon \to 0} (N_\varepsilon \varepsilon^2) = \text{площ. } X.$$

Таким образом, и для ортогональных преобразований (имеющих, как мы знаем, определители ± 1) предложение 1 справедливо.

Для того чтобы доказать это предложение для любых аффинных преобразований, остается вспомнить, что каждое такое преобразование является композицией некоторого ортогонального преобразования и двух сжатий к взаимно перпендикулярным прямым (которые мы можем принять за оси координат). Поскольку определитель композиции двух аффинных преобразований равен, очевидно, произведению определителей сомножителей, предложение 1 тем самым доказано полностью.

Следствие. *Площадь s эллипса с полуосями a и b (точнее, площадь области, ограниченной этим эллипсом) выражается формулой*

$$s = \pi ab.$$

Доказательство. Площадь круга радиуса a равна, как известно, πa^2. Но эллипс с полуосями a и b получается из этого круга сжатием плоскости к одному из его диаметров с коэффициентом $k = \frac{b}{a}$. Следовательно,

$$s = k \cdot (\pi a^2) = \pi ab.$$

Определение 1. Аффинное преобразование Φ называется *эквиаффинным*, если $|\Phi| = \pm 1$.

Согласно предложению 1,

аффинное преобразование тогда и только тогда эквиаффинно, когда оно сохраняет площади, т. е. когда площадь любой плоской фигуры X равна площади преобразованной фигуры X'.

К числу эквиаффинных преобразований принадлежат все ортогональные преобразования. Однако существуют и неортогональные эквиаффинные преобразования.

Задание. Приведите пример такого преобразования.

Так как

$$|\Psi \circ \Phi| = |\Psi| \cdot |\Phi|,$$

то

совокупность всех эквиаффинных преобразований является группой.

Геометрия с этой группой называется *эквиаффинной геометрией*, а соответствующие плоскости — *эквиаффинными плоскостями*. В отличие от аффинной геометрии, в эквиаффинной геометрии имеет смысл понятие площади. Она является естественной областью, в которой целесообразно строить теорию площадей.

Две аффинные координатные системы с реперами Oe_1e_2 и $O'e'_1e'_2$ тогда и только тогда определяют (согласно общей схеме из п. 1) одну и ту же эквиаффинную плоскость, когда бивекторы $e_1 \wedge e_2$ и $e'_1 \wedge e'_2$ либо совпадают, либо отличаются знаком, т. е. когда параллелограммы, построенные на векторах e_1, e_2 и e'_1, e'_2,

имеют одну и ту же площадь. Это показывает, что *эквиаффинная плоскость является не чем иным, как аффинной плоскостью, на которой задан эталон площади* (область, площадь которой принята за единицу).

Конечно, и здесь при выборе различных эталонов площади мы получаем из одной аффинной плоскости различные эквиаффинные плоскости.

При формулировке утверждений эквиаффинной геометрии, относящихся к площадям, необходимо соблюдать определенную осторожность. Например, доказанное выше следствие о площади эллипса, как оно сформулировано, не принадлежит эквиаффинной геометрии, поскольку в нем фигурируют длины полуосей a и b, смысла в эквиаффинной геометрии не имеющие. Чтобы получить «эквиаффинную» формулировку этого следствия, достаточно, однако, заметить, что согласно теореме Аполлония (см. п. 6 § 2 гл. 5) площадь параллелограмма, построенного на произвольной паре сопряженных радиусов эллипса, равна ab. Поэтому мы можем сказать, что

отношение площади эллипса к площади параллелограмма, построенного на паре его сопряженных радиусов, равно π.

Эта формулировка в эквиаффинной геометрии уже вполне осмыслена.

Замечание 1. Ясно, что теорема Аполлония очевидным образом вытекает из возможности представления произвольного эллипса как образа некоторой окружности при аффинном преобразовании, поскольку для случая окружности она тривиальна (площадь квадрата, построенного на паре перпендикулярных радиусов окружности, равна квадрату радиуса окружности).

Замечание 2. Утверждение о площади эллипса может быть сформулировано также и следующим образом:

отношение площадей эллипса и параллелограмма, построенного на паре его сопряженных радиусов, равно π.

Обратим внимание на тонкое, но существенное, различие между двумя последними формулировками: в то время как в первой формулировке мы говорим об отношении площади одной фигуры (эллипса) к площади другой фигуры (параллелограмма), во второй формулировке речь идет об отношении площадей этих фигур. Поскольку согласно предложению 1 при любом аффинном преобразовании площади всех фигур умножаются на одно и то же число, не зависящее от фигуры, то для любых двух фигур X и Y отношение их площадей аффинно инвариантно. Другими словами, хотя в аффинной геометрии и нельзя говорить о площади одной отдельно взятой фигуры, но понятие *отношения площадей* двух фигур имеет полный смысл (подобно тому как имеет смысл понятие отношения длин двух параллельных отрезков). Таким образом, вторая из приведенных выше формулировок имеет смысл в аффинной геометрии, тогда как первая — только в эквиаффинной.

Вариант эквиаффинной геометрии, в котором фундаментальной группой считается группа эквиаффинных преобразований, сохраняющих ориентации, конечно, также возможен. В этой геометрии имеет смысл понятие *ориентированной площади.*

Определение 2. Аффинное преобразование Ф называется *преобразованием подобия*, если оно сохраняет углы между прямыми, т. е. если любые две (пересекающиеся) прямые α и β оно переводит в прямые α' и β', образующие тот же угол.

Ясно, что

все преобразования подобия образуют группу.

Соответствующая геометрия называется *геометрией подобия.* Фигуры, равные в этой геометрии, т. е. фигуры, переводящиеся друг в друга преобразованием подобия, называются *подобными.*

Покажем, что это понятие подобия совпадает с известным читателю из элементарного курса, т. е. что две фигуры тогда и только тогда подобны, когда после соответствующего перемещения они гомотетичны. Для этого, очевидно, достаточно показать, что любое преобразование подобия является композицией некоторого ортогонального преобразования (движения или движения плюс симметрия) и некоторой *гомотетии*, т. е. преобразования, выражающегося в соответствующим образом подобранной системе прямоугольных координат x, y формулами вида

$$x' = hx,$$
$$y' = hy,$$

где h — *коэффициент гомотетии.*

В силу предложения 1 п. 2 § 2 для этого в свою очередь достаточно показать, что преобразование вида

$$\begin{aligned} x' &= k_1 x, \\ y' &= k_2 y, \end{aligned} \qquad k_1 > 0, \quad k_2 > 0, \tag{3}$$

тогда и только тогда сохраняет углы между прямыми, когда $k_1 = k_2$, т. е. когда оно является гомотетией.

Но это ясно. Действительно, преобразование (3) переводит ось абсцисс $y = 0$ в себя, а прямую с уравнением

$$y = ax \tag{3}$$

— в прямую с уравнением

$$y = \frac{k_2}{k_1} ax.$$

Поэтому угол между осью абсцисс и прямой (4) тогда и только тогда сохраняется при преобразовании (3), когда

$$\frac{k_2}{k_1} a = a,$$

т. е. когда $k_1 = k_2$.

Мы не будем здесь рассматривать геометрию подобия, поскольку она достаточно подробно изучается в школе. (Заметим, кстати, что на самом деле школьный курс геометрии представляет собой смешение теорем из целого ряда геометрий — в основном, евклидовой геометрии и геометрии подобия.)

Чтобы перейти от геометрии подобия к евклидовой геометрии, достаточно выбрать эталон длины.

Ряд более или менее интересных вариантов геометрии подобия мы получим, накладывая на преобразования подобия те или иные дополнительные требования (сохранение ориентаций, сохранение данной точки O и т. п.). В геометрии, основывающейся на сохраняющих ориентации преобразованиях подобия (*специальной геометрии подобия*), имеет смысл понятие ориентированного угла.

Поскольку, как мы уже видели (см. п. 2 § 3), любое сохраняющее ориентации преобразование подобия записывается в комплексной координате $z = x + iy$ формулой

$$z' = az + b, \quad a \neq 0, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

специальная геометрия подобия по существу совпадает с аффинной геометрией комплексной прямой.

Наложение условия эквиаффинности снова приводит к евклидовой геометрии, поскольку, как легко видеть,

преобразование подобия тогда и только тогда эквиаффинно, когда оно ортогонально.

3. Геометрии Галилея и Пуансо

Поскольку любое аффинное преобразование переводит любое направление на плоскости (пучок параллельных прямых) снова в некоторое направление, имеет смысл говорить об аффинных преобразованиях, оставляющих на месте данное направление ω.

Все такие преобразования образуют подгруппу $\mathrm{Aff}_\omega(2)$ группы $\mathrm{Aff}(2)$. Соответствующую геометрию мы будем называть *аффинной геометрией с особыми прямыми*, поскольку прямые направления ω играют в ней особую роль.

Координатными системами этой геометрии являются аффинные координатные системы Oxy, ось абсцисс $y = 0$ которых имеет направление ω (является особой прямой).

Пусть Oxy — такая координатная система. Поскольку аффинное преобразование.

$$x' = a_1^1 x + a_2^1 y + b^1,$$
$$y' = a_1^2 x + a_2^2 y + b^2$$

переводит ось абсцисс $y = 0$ в прямую с параметрическими уравнениями

$$x' = a_1^1 x + b^1,$$
$$y' = a_1^2 x + b^2$$

(здесь x', y' текущие координаты точек прямой, а x — параметр),

т. е. в прямую

$$a_1^2x' - a_1^1y' = a_1^2b^1 - a_1^1b^1,$$

то это преобразование тогда и только тогда принадлежит группе $\mathrm{Aff}_\omega(2)$, когда $a_1^2 = 0$, т. е. когда оно записывается формулами

$$\begin{aligned} x' &= a_1^1x + a_2^1y + b^1, \\ y' &= a_2^2y + b^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь числа b^1, b^2 и a_2^1 могут быть произвольными вещественными числами, а числа a_1^1 и a_2^2 должны быть отличны от нуля.

Если мы ограничимся лишь преобразованиями группы $\mathrm{Aff}_\omega(2)$, сохраняющими площади (эквиаффинными), то мы получим аналогичную геометрию (*эквиаффинную геометрию с особыми прямыми*), в которой дополнительно имеется понятие площади. В преобразованиях (1) для этой геометрии числа a_1^1 и a_2^2 должны удовлетворять соотношению

$$a_1^1a_2^2 = \pm 1.$$

Точно так же мы можем получить еще одну геометрию, ограничившись преобразованиями группы $\mathrm{Aff}_\omega(2)$, оставляющими на месте некоторую точку O. В этой геометрии, кроме особых прямых, имеется, таким образом, и *особая точка* O. В преобразованиях (1) для такой геометрии коэффициенты b^1 и b^2 должны быть равны нулю.

Накладывая на преобразования оба условия, мы получим геометрию с особыми прямыми и особой точкой, в которой имеет смысл понятие площади. Преобразования (1) для этой геометрии должны, естественно, удовлетворять обоим ограничениям:

$$a_1^1a_2^2 = \pm 1, \quad b^1 = b^2 = 0.$$

Конечно, для всех этих трех геометрий возможны варианты, возникающие, когда мы ограничиваемся лишь аффинными преобразованиями, сохраняющими ориентации.

Еще одна геометрия получается, если на преобразования (1) наложить условие

$$a_1^1 = \pm 1,$$

означающее, что индуцированные этими преобразованиями отображения особых прямых должны быть ортогональными отображениями.

Вариантом последней геометрии является геометрия, преобразования которой характеризуются условием

$$a_1^1 = 1$$

(индуцированные отображения особых прямых являются параллельными переносами).

И для этих двух геометрий возможны варианты, когда мы ограничиваемся либо преобразованиями, оставляющими на месте данную точку O, либо преобразованиями, сохраняющими ориентации, либо эквиаффинными преобразованиями, либо преобразованиями, обладающими любыми из этих свойств.

Таким образом, всего мы получаем четырнадцать различных геометрий. Все эти геометрии тесно связаны друг с другом и, изучив одну из них, мы без особого труда можем перейти к любой другой. Мы выберем для более детального изучения геометрию, преобразования которой характеризуются условиями $a_1^1 = a_2^2 = 1$, т. е. выражаются формулами

$$\begin{aligned} x' &= x + a_2^1 y + b^1, \\ y' &= y + b^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Иными словами, мы будем рассматривать геометрию с особыми прямыми, автоморфизмы которой

1) сохраняют ориентации;
2) эквиаффинны;
3) для любой особой прямой индуцируют параллельный перенос этой прямой на соответствующую особую прямую.

Изменив обозначения, мы можем преобразования (2) записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} x' &= x + vt + x_0, \\ t' &= t + t_0. \end{aligned}$$

В этом виде они совпадают с известными из механики *преобразованиями Галилея*, описывающими переход от одной инерциальной системы отсчета (x, t) на прямой к другой такой системе (x', t'), движущейся относительно первой с постоянной скоростью v. Согласно принципу относительности Галилея механический (точнее, кинематический) смысл имеют только те свойства движений, которые инвариантны относительно преобразований Галилея. Это означает, что интересующая нас геометрия по существу совпадает с кинематикой движений на прямой и отличается от нее лишь словесной оболочкой (терминологией). Каждое утверждение этой геометрии может быть переформулировано как утверждение кинематики, и наоборот.

На этом основании мы будем называть рассматриваемую геометрию *геометрией Галилея*, а преобразования (2) — *галилеевыми преобразованиями*.

Чтобы перейти от аффинной плоскости к галилеевой, нужно выбрать

1) особые прямые;
2) ориентацию особых прямых;
3) ориентацию плоскости;
4) эталон длины на особых прямых;
5) эталон площади.

Тогда каждая галилеева координатная система будет представлять собой аффинную координатную систему, репер Oe_1e_2 которой обладает следующими свойствами:

1) вектор e_1 параллелен особым прямым и положительно ориентирован (по отношению к данной ориентации этих прямых);

2) базис e_1, e_2 положительно ориентирован (по отношению к данной ориентации плоскости);

3) длина вектора e_1 равна единице (по отношению к данному эталону длин на особых прямых);

4) площадь параллелограмма, построенного на векторах e_1, e_2, равна единице (по отношению к данному эталону площадей).

В каждой из таких координатных систем Oxy галилеевы преобразования записываются формулами вида (2).

В дальнейшем мы будем считать фиксированной некоторую галилееву координатную систему Oxy.

На евклидовой плоскости расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ может быть охарактеризовано как единственный (с точностью до постоянного множителя) ортогональный инвариант фигуры, состоящей из этих двух точек. Легко видеть, что единственным галилеевым инвариантом этой фигуры является разность $y_2 - y_1$. (Инвариантность этой разности очевидна; ее единственность вытекает из того, что любые пары точек с одной и той же разностью $y_2 - y_1$ можно некоторым галилеевым преобразованием перевести друг в друга.) По аналогии с евклидовой плоскостью абсолютную величину

$$d = |y_2 - y_1|$$

разности $y_2 - y_1$ мы будем называть *галилеевым расстоянием* между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Заметим, что в отличие от евклидова расстояния галилеево расстояние может быть равно нулю даже тогда, когда точки M_1 и M_2 не совпадают. Именно, ясно, что

галилеево расстояние d между точками M_1 и M_2 тогда и только тогда равно нулю, когда эти точки принадлежат одной особой прямой.

В этом случае для точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ существует еще один галилеев инвариант, а именно, число $x_2 - x_1$. Действительно, согласно формулам (2)

$$x_2' - x_1' = x_2 - x_1 + a_2^1(y_2 - y_1)$$

и потому $x_2' - x_1' = x_2 - x_1$, если $y_2 - y_1 = 0$.

Таким образом, разность $x_2 - x_1$ инвариантна не всегда, а только при некотором специальном расположении точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. На этом основании она называется *относительным инвариантом*.

Абсолютную величину

$$\delta = | x_2 - x_1 |$$

относительного инварианта $x_2 - x_1$ мы будем называть *особым расстоянием* между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Подчеркнем, что оно имеет смысл тогда и только тогда, когда галилеево расстояние между этими точками равно нулю.

Ясно, что

точки M_1 и M_2 тогда и только тогда совпадают, когда оба расстояния d и δ между ними равны нулю.

По аналогии с евклидовой геометрией *окружностью в геометрии Галилея* называется геометрическое место точек, галилеево расстояние которых от данной точки $M_0(x_0, y_0)$ (центра окружности) равно данному числу R (*радиусу* окружности). Аналитически окружность задается уравнением

$$| y - y_0 | = R$$

и потому представляет собой пару особых прямых

$$y = y_0 \pm R$$

(сливающихся в одну при $R = 0$). Заметим, что в отличие от евклидовой геометрии галилеева окружность имеет бесконечно много центров (но однозначно определенный радиус).

Продолжая аналогию с евклидовой геометрией, мы определим *галилеев угол* φ (точнее «галилееву величину угла») между двумя неособыми прямыми α_1 и α_2, пересекающимися в точке $M_0(x_0, y_0)$, как особое расстояние между точками пересечения N_1 и N_2 прямых α_1 и α_2 с окружностью радиуса $R = 1$ с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ (точнее, с одной из особых прямых, составляющих эту окружность; скажем, для определенности, с прямой $y = y_0 + 1$). Для особых прямых угол не определяется.

Пусть прямые α_1 и α_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом (относительно оси ординат):

$$x = k_1 y + b_1, \quad x = k_2 y + b_2.$$

Тогда их точка пересечения $M_0(x_0, y_0)$ имеет ординату

$$y_0 = -\frac{b_2 - b_1}{k_2 - k_1}$$

и потому точки N_1 и N_2 (являющиеся точками пересечения прямых α_1 и α_2 с прямой $y = y_0 + 1$) имеют абсциссы

$$x_1 = k_1 + \frac{b_1 k_2 - b_2 k_1}{k_2 - k_1},$$

$$x_2 = k_2 + \frac{b_1 k_2 - b_2 k_1}{k_2 - k_1}.$$

Следовательно, особое расстояние между ними равно

$$| x_2 - x_1 | = | k_2 - k_1 |.$$

Таким образом,

галилеев угол φ *между неособыми прямыми с угловыми коэффициентами* k_1 *и* k_2 *выражается формулой*

$$\varphi = |k_2 - k_1|.$$

Мы могли бы принять эту формулу за определение угла φ. Но тогда мы, конечно, должны были бы доказывать галилееву инвариантность величины $|k_2 - k_1|$.

Если прямые параллельны ($k_2 = k_1$), то для них определена величина

$$b = |b_2 - b_1|,$$

равная длине произвольного заключенного между ними отрезка особой прямой. Эту величину мы будем называть *особым углом* между параллельными прямыми.

Имея в своем распоряжении основные понятия расстояния и угла, мы можем теперь без особого труда развивать геометрию Галилея сколь угодно далеко. Мы этого здесь делать не будем, отсылая читателя к специальной литературе[1]). Конечно, теоремы этой геометрии совсем не похожи на теоремы геометрии Евклида. Например, в любом треугольнике бо́льшая сторона равна в геометрии Галилея сумме двух других сторон и, аналогично, больший угол равен сумме двух других углов.

Мы скажем только несколько слов о *геометрии прямых* в геометрии Галилея.

Каждая неособая прямая

$$x = ky + b$$

в геометрии Галилея определяется двумя «координатами» b и k. При галилеевом преобразовании (2) такая прямая переходит в прямую с уравнением

$$x' - a_2^1(y' - b^2) - b^1 = k(y' - b^2) + b,$$

т. е. с уравнением

$$x' = k'y' + b',$$

где

$$b' = b - b^2k + (b^1 - a_2^1b^2),$$

$$k' = k + a_2^1.$$

Это означает, что сопоставив прямой $x = ky + b$ точку с координатами $x = b$ и $y = k$, мы преобразованной прямой должны будем сопоставить точку с координатами

$$\begin{aligned} x' &= x + Ay + B_1, \\ y' &= y + B_2, \end{aligned} \tag{3}$$

[1]) См., например, И. М. Яглом, Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия, «Наука», 1969.

где

$$A = -b^2, \quad B_1 = b^1 - a_2^1 b^2, \quad B_2 = a_2^1.$$

Поскольку преобразования (3) — также галилеевы и каждое галилеево преобразование можно представить в виде (3) (при соответствующем выборе чисел b^1, b^2 и a_2^1), мы можем, следовательно, сказать, что

геометрия неособых прямых на галилеевой плоскости также является галилеевой геометрией.

Из этого утверждения легко следует, что на галилеевой плоскости справедлив следующий общий принцип:

Принцип двойственности. *Любая теорема геометрии Галилея (относящаяся к точкам и прямым) переходит в верную теорему при одновременных заменах*

«точка»	$\Rightarrow$ *«неособая прямая»,*
«расстояние»	$\Rightarrow$ *«угол»,*
«особое расстояние»	$\Rightarrow$ *«особый угол»,*
«лежат на»	$\Rightarrow$ *«проходят через»,*
«лежат на особой прямой»	$\Rightarrow$ *«параллельны»*

и т. д.

Задание. Докажите принцип двойственности.

В заключение мы приведем «словарь» для перевода основных понятий геометрии Галилея на язык кинематики (см. выше). Читателю настоятельно рекомендуется как следует его осознать и по возможности продолжить.

Геометрические понятия	Кинематические понятия
Точка	Мгновенное положение движущейся материальной точки (событие), характеризующееся местом (координата x) и временем (координата t)
Неособая прямая	Мировая линия (траектория событий) равномерно движущейся точки
Особая прямая	Совокупность всех событий, происходящих в данный момент времени
Галилеево расстояние	Временной интервал между событиями
Особое расстояние	Пространственный интервал между одновременными событиями
Галилеев угол	Относительная скорость
Особый угол	Расстояние между покоящимися друг относительно друга точками
Окружность радиуса R	Совокупность всех событий, опережающих данное событие на время R и отстающих от него на то же время

Упражнение. Дайте кинематическое истолкование принципа двойственности.

Для аналогичного геометрического описания кинематики движений в плоскости служит *пространственная геометрия Галилея*, преобразования которой являются композициями параллельных переносов, вращений вокруг оси времени Ot и преобразований вида

$$x' = x + v_1 t,$$
$$y' = y + v_2 t,$$
$$t' = t,$$

где v_1 и v_2 — компоненты скорости инерциальной системы отсчета (x, y, t) относительно системы (x', y', t').

Обозначая координату t более привычным (в геометрии) символом z, мы можем наиболее общее такое преобразование записать формулами

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + zv_1 + x_0,$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + zv_2 + y_0,$$
$$z' = z + z_0.$$

Естественно, что эта геометрия значительно сложнее плоской геометрии Галилея, и мы ею заниматься здесь не будем. Заметим только, что в этой геометрии на каждой плоскости $z = \text{const}$ имеет место обычная евклидова геометрия.

Для механики наиболее важен, конечно, случай движений в пространстве. Геометрически это соответствует рассмотрению *геометрии Галилея четырехмерного пространства — времени.* Необходимых для описания такой геометрии средств мы пока еще не имеем.

Интересным вариантом пространственной геометрии Галилея является *центрогалилеева геометрия*, преобразования которой имеют вид

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + zv_1,$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + zv_2, \qquad (4)$$
$$z' = z.$$

Рассмотрим в этой геометрии произвольную плоскость, не проходящую через начало координат O (являющееся особой точкой центрогалилеевой геометрии). При соответствующей нормировке коэффициентов уравнение такой плоскости может быть единственным образом записано в виде

$$Ax + By + Cz = 1.$$

Без труда проверяется, что преобразование (4) переводит эту плоскость в плоскость

$$A'x' + B'y' + C'z' = 1,$$

для которой

$$A' = A\cos\varphi - B\sin\varphi,$$
$$B' = A\sin\varphi + B\cos\varphi,$$
$$C' = -Av_1 - Bv_2 + C.$$

Это означает, что

геометрия плоскостей центральногалилеевой геометрии (не проходящих через особую точку O) является геометрией, преобразования которой задаются формулами вида

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ z' &= ax + by + z. \end{aligned} \tag{5}$$

Напомним теперь, что любая система сил на плоскости полностью характеризуется (при выбранной точке O) некоторым вектором (*главным вектором* системы) и некоторым числом (*главным моментом* системы). Обозначая координаты (в некоторой прямоугольной системе координат) главного вектора символами x, y, а главный момент системы — символом z, мы можем, таким образом, сказать, что в любой прямоугольной системе координат каждая система сил на плоскости характеризуется тремя «координатами» x, y, z. При повороте координатных осей координаты x, y преобразуются, естественно, как координаты вектора, т. е. по формулам

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$

а координата z остается неизменной. При переносе же начала координат O в некоторую точку $O'(x_0, y_0)$ координаты x, y, являясь координатами вектора, не меняются, а координата z (главный момент системы) переходит, как показывается в механике, в координату

$$z' = y_0x - x_0y + z.$$

Это означает, что статика систем сил на плоскости изучает свойства «точек» (x, y, z), инвариантные относительно преобразований вида

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$
$$z' = y_0x - x_0y + z.$$

Поскольку эти преобразования только обозначениями отличаются от преобразований (5), мы видим, что

«геометрия плоской статики» совпадает с геометрией плоскостей центрогалилеевой геометрии, не проходящих через особую точку.

Общая теория систем сил была впервые разработана французским механиком Пуансо. В честь него геометрия с группой преобразований (5) называется *геометрией Пуансо*. Любое утверждение этой геометрии может быть переформулировано как некоторое утверждение о системах сил на плоскости, и наоборот.

Расстоянием между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в геометрии Пуансо естественно называть величину

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

инвариантную относительно всех преобразований (5).

Когда это расстояние равно нулю, для точек $M_1(x_1, y_1\ z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ инвариантна также разность

$$z_2 - z_1.$$

Абсолютная величина

$$\delta = | z_2 - z_1 |$$

этой разности называется *особым расстоянием* между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Дальнейшее построение геометрии Пуансо (определение угла, окружностей, сфер, построение теории треугольников и т. п.) мы оставим инициативе читателя.

Упражнение. Опишите геометрию Пуансо на плоскости.

4. Геометрия Минковского

Целый «куст» геометрий получается, когда мы выбираем на плоскости не одно, а два (различных) направления ω_1 и ω_2, и рассматриваем аффинные преобразования, переводящие прямые каждого из этих направлений снова в прямые того же направления и удовлетворяющие, возможно, некоторым дополнительным условиям (эквиаффинность, сохранение ориентаций и т. п.).

Мы здесь ограничимся геометрией, преобразования которой:

1) переводят прямые каждого из двух направлений ω_1 и ω_2 в прямые того же направления;

2) сохраняют ориентации прямых этих направлений;

3) эквиаффинны (сохраняют площади).

Такие преобразования называются *преобразованиями Лоренца*, а соответствующая геометрия — *геометрией Минковского* (или *псевдоевклидовой геометрией*). В этой геометрии прямые направлений ω_1 и ω_2 играют особую роль. Их принято называть *изотропными прямыми* геометрии Минковского (а их направления ω_1 и ω_2 — *изотропными направлениями*).

Чтобы получить из аффинной плоскости плоскость Минковского, следует выбрать

1) направления ω_1 и ω_2;

2) ориентацию прямых направления ω_1;
3) ориентацию прямых направления ω_2;
4) эталон площади.

Тогда *координатными системами Минковского* будут аффинные координатные системы, реперы Oe_1e_2 которых обладают следующими свойствами:

1) вектор e_1 параллелен прямым направления ω_1 и положительно ориентирован (по отношению к данной ориентации этих прямых);

2) вектор e_2 параллелен прямым направления ω_2 и положительно ориентирован (по отношению к данной ориентации прямых этого направления);

3) площадь параллелограмма, построенного на векторах e_1, e_2, равна единице (по отношению к данному эталону площади).

В дальнейшем мы будем считать фиксированной некоторую координатную систему Минковского Oxy.

В такой координатной системе преобразования Лоренца имеют вид

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + x_0, \\ y' &= \frac{1}{\lambda}\, y + y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где λ, x_0, y_0 — произвольные числа, причем $\lambda > 0$.

Запишем преобразование Лоренца (1) в координатах X, Y, связанных с координатами x, y формулами

$$x = \frac{X - Y}{\sqrt{2}},$$

$$y = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}.$$

Преобразование (1) в этих координатах имеет вид

$$\frac{X' - Y'}{\sqrt{2}} = \lambda\left(\frac{X - Y}{\sqrt{2}}\right) + x_0,$$

$$\frac{X' + Y'}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{X + Y}{\sqrt{2}}\right) + y_0,$$

т. е. вид

$$\begin{aligned} X' &= \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) X - \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) Y + X_0, \\ Y' &= -\frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) X + \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) Y + Y_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Положив $\beta = \dfrac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}$, мы получим, что

$$\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$\frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Обозначая координату X прежним символом x, а координату Y — символом t, мы получаем, следовательно, для преобразования (1) формулы вида

$$x' = \frac{x - \beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} + x_0,$$

$$t' = \frac{-\beta x + t}{\sqrt{1 - \beta^2}} + t_0.$$

В специальной теории относительности Эйнштейна эти формулы описывают переход от одной инерциальной системы отсчета (x, t) к другой такой системе (x', t'), движущейся относительно первой с постоянной скоростью $v = \beta c$ (где c — скорость света). Таким образом, подобно тому как геометрия Галилея является переложением на геометрический язык классической (галилеевой) кинематики, так и *геометрия Минковского является переложением кинематики теории относительности Эйнштейна.* Именно для наглядного изображения и лучшего прояснения релятивистской кинематики ее впервые Минковский и ввел.

Систему координат X, Y мы будем называть *физической системой координат*, соответствующей данной системе координат x, y.

Каждое неизотропное направление на плоскости Минковского характеризуется его угловым коэффициентом k (относительно, как обычно, оси абсцисс Ox). Произвольная прямая

$$y = kx + b$$

этого направления переходит при преобразовании (1) в прямую

$$\lambda (y' - y_0) = \frac{k}{\lambda} (x' - x_0) + b,$$

т. е. в прямую

$$y = \frac{k}{\lambda^2} x + \left(y_0 - \frac{k}{\lambda^2} x_0 + \frac{b}{\lambda}\right),$$

направление которой характеризуется угловым коэффициентом k/λ^2.

Мы видим, таким образом, что знак коэффициента k — один и тот же для всех прямых, переводимых друг в друга преобразованиями Лоренца, и потому этот знак должен иметь в геометрии Минковского определенный геометрический смысл.

Прямые с $k > 0$ называются *пространственноподобными*, а прямые с $k < 0$ — *времяподобными*. Эти названия распространяются также и на отрезки этих прямых.

Эта терминология объясняется тем, что, как можно легко показать, для любой времяподобной прямой существует физическая система координат, осью ординат которой (т. е. с физической точки зрения — осью времени) является данная прямая. Это означает, что для любого времяподобного отрезка $\overline{M_1M_2}$ существует инерциальная система отсчета, в которой события, изображаемые точками M_1 и M_2, происходят в одном и том же месте (но в разное время).

Аналогично, для любой пространственноподобной прямой существует физическая система координат, осью абсцисс (т. е. осью «мест») которой является эта прямая, так что для любого пространственноподобного отрезка $\overline{M_1M_2}$ существует инерциальная система отсчета, в которой события M_1 и M_2 происходят в одно и то же время (но в разных местах).

Для любой точки M_0 совокупность всех точек M, обладающих тем свойством, что отрезок $\overline{M_0M}$ пространственноподобен, называется *областью одновременности* точки M_0, а совокупность всех точек M, обладающих тем свойством, что отрезок $\overline{M_0M}$ времяподобен, — *областью одноместности* точки M_0.

Для начала координат O область одновременности состоит из первого и третьего квадрантов (т. е. характеризуется неравенством $xy > 0$), а область одноместности — из второго и четвертого квадрантов (характеризуется неравенством $xy < 0$).

Вообще, для любой точки M_0 область одновременности состоит из одной пары вертикальных углов, образованных изотропными прямыми, проходящими через точку M_0, а область одноместности — из другой пары.

Ясно, что для любых двух точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ величина

$$(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

инвариантна относительно всех преобразований Лоренца (1). Корень квадратный

$$d = \sqrt{2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}$$

из удвоенной этой величины называется *расстоянием* между точками M_1 и M_2 (или *длиной* отрезка $\overline{M_1M_2}$) в геометрии Минковского. Ясно, что

отрезок M_1M_2 тогда и только тогда изотропен (принадлежит изотропной прямой) когда его длина равна нулю.

Таким образом, в геометрии Минковского расстояние между точками может быть равно нулю даже тогда, когда эти точки не совпадают.

Предположим, что отрезок $\overline{M_1M_2}$ неизотропен. Тогда его угловой коэффициент выражается формулой

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

и потому для длины d отрезка $\overline{M_1M_2}$ мы получаем формулу

$$d = |x_2 - x_1| \sqrt{2k},$$

показывающую, что

отрезок $\overline{M_1M_2}$ тогда и только тогда пространственноподобен (времяподобен), когда его длина вещественна (соответственно, чисто мнима).

Замечание 1. До сих пор мы не фиксировали знака квадратного корня в определении длины. Теперь мы можем это сделать. Именно, мы потребуем, чтобы для пространственноподобных отрезков длина была неотрицательным числом, а для времяподобных — имела неотрицательную мнимую часть.

Простое вычисление показывает, что для пространственноподобного отрезка $\overline{M_1M_2}$ расстояние d равно обычному расстоянию между событиями, изображаемыми точками M_1 и M_2, вычисленному в инерциальной системе отсчета, *в которой эти события одновременны*. Аналогично, для времяподобного отрезка $\overline{M_1M_2}$ расстояние d равно умноженному на ic времени, протекшему между событиями M_1 и M_2 в инерциальной системе отсчета, *в которой эти события одноместны* (где c — скорость света).

Окружностью в геометрии Минковского называется, по аналогии с евклидовой геометрией, геометрическое место точек, находящихся на одном и том же расстоянии R (*радиусе* окружности) от данной точки M_0 (*центра* окружности). При этом радиус окружности может быть как вещественным (неотрицательным) числом, так и чисто мнимым (с положительной мнимой частью). Аналитически окружность радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ задается уравнением

$$(x - x_0)(y - y_0) = \frac{R^2}{2} \tag{3}$$

и потому на евклидовой плоскости является (при $R \neq 0$) гиперболой с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$. При $R = 0$ эта окружность представляет собой пару изотропных прямых, проходящих через точку M_0. При R вещественном окружность с центром M_0 расположена в области одновременности для точки M_0, а при R чисто мнимом — в области одноместности. Окружности, радиусы которых имеют один и тот же модуль $|R|$, сопряжены (как гиперболы, см. п. 6 § 2 гл. 5).

Имея понятие окружности, мы могли бы теперь по аналогии с геометриями Евклида и Галилея определить угол между двумя пересекающимися в точке M_0 прямыми как длину дуги, высекаемой этими прямыми на окружности единичного радиуса с центром в точке M_0. Однако это определение требует (в достаточной мере сложного) выяснения понятия «длина дуги окружности» в геометрии Минковского. Поэтому мы пойдем другим путем. При этом для простоты мы будем считать, что точка M_0 совпадает с точкой O (что, очевидно, не ограничивает общности).

В физических координатах X, Y, соответствующих координатам x, y, окружность радиуса R с центром в точке O имеет уравнение

$$\frac{X - Y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{X + Y}{\sqrt{2}} = \frac{R^2}{2},$$

т. е. уравнение

$$\frac{X^2}{R^2} - \frac{Y^2}{R^2} = 1.$$

Следовательно (см. п. 3 § 1 гл. 5), положив (при $R^2 > 0$)

$$\begin{aligned} X &= R \operatorname{ch} \theta, \\ Y &= R \operatorname{sh} \theta, \end{aligned} \tag{4}$$

мы получим параметрические уравнения правой ветви этой окружности.

Эти уравнения вполне аналогичны параметрическим уравнениям

$$X = R\cos\varphi,$$
$$Y = R\sin\varphi$$

евклидовой окружности (в прямоугольных координатах X, Y), в которых параметр φ, соответствующий произвольной точке M окружности, является (ориентированным) углом, образованным прямой OM с осью абсцисс Ox.

Следуя этой аналогии, мы для любой точки M ветви (4) примем, по определению, за угол от оси Ox к прямой OM в геометрии Минковского значение параметра θ, отвечающее в силу уравнений (4) этой точке.

Далее, для любых двух точек M_1 и M_2 ветви (4) мы определим *угол* θ *от прямой* OM_1 *к прямой* OM_2 формулой

$$\theta = \theta_2 - \theta_1,$$

где θ_2 и θ_1 — значения параметра, отвечающие точкам M_2 и M_1.

За угол *между прямыми* OM_1 и OM_2 мы примем абсолютную величину угла θ.

Заметим, что, в отличие от евклидовой геометрии, угол θ от оси Ox к прямой OM принимает любые вещественные значения: когда прямая OM, вращаясь, приближается к асимптоте $X = Y$ гиперболы (4) (являющейся изотропной прямой $x = 0$), угол θ стремится к $+\infty$, а когда эта прямая приближается к асимптоте $X = -Y$ (т. е. к изотропной прямой $y = 0$), угол θ стремится к $-\infty$.

Мы ввели угол между прямыми в геометрии Минковского, руководствуясь довольно формальной аналогией с евклидовой геометрией. Более содержательное оправдание нашего определения можно получить, заметив, что в евклидовой геометрии угол φ между двумя прямыми, пересекающимися в точке M_0, равен удвоенной площади кругового сектора, высекаемого этими прямыми из круга единичного радиуса с центром в точке M_0. Аналогом этого сектора в геометрии Минковского является гиперболический сектор $M_0M_1M_2$, ограниченный отрезками $\overline{M_0M_1}$, $\overline{M_0M_2}$ и дугой $\widetilde{M_1M_2}$ гиперболы (4). Пользуясь, скажем, известными из интегрального исчисления формулами для площадей плоских фигур, можно без труда показать, что площадь этого сектора равна $\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$. С другой стороны, поскольку преобразования Лоренца эквиаффинны, понятие евклидовой площади сохраняется и в геометрии Минковского. Поэтому так же, как и в евклидовой геометрии,

угол между двумя прямыми в геометрии Минковского равен удвоенной площади сектора, высекаемого этими прямыми из «единичного круга».

Упражнение. Проверьте, что это утверждение верно и в геометрии Галилея.

Точка M, имеющая в физической координатной системе координаты $X = R\,\mathrm{ch}\,\theta$ и $Y = R\,\mathrm{sh}\,\theta$, имеет в исходной

координатной системе Oxy координаты

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}}(\operatorname{ch}\theta - \operatorname{sh}\theta),$$

$$y = \frac{R}{\sqrt{2}}(\operatorname{ch}\theta + \operatorname{sh}\theta).$$

Поэтому угловой коэффициент k прямой OM (в координатной системе Oxy) выражается формулой

$$k = \frac{\operatorname{ch}\theta + \operatorname{sh}\theta}{\operatorname{ch}\theta - \operatorname{sh}\theta} = \frac{1 + \operatorname{th}\theta}{1 - \operatorname{th}\theta}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{th}\theta = \frac{k-1}{k+1}.$$

Пусть теперь нам даны две точки M_1 и M_2 и пусть k_1 — угловой коэффициент прямой OM_1, а k_2 — угловой коэффициент прямой OM_2. Тогда для угла θ между прямыми OM_1 и OM_2 мы получаем, что

$$\operatorname{th}\theta = \operatorname{th}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\operatorname{th}\theta_2 - \operatorname{th}\theta_1}{1 - \operatorname{th}\theta_1 \operatorname{th}\theta_2} = \frac{\frac{k_2-1}{k_2+1} - \frac{k_1-1}{k_1+1}}{1 - \frac{k_1-1}{k_1+1}\cdot\frac{k_2-1}{k_2+1}} = \frac{k_2-k_1}{k_2+k_1}.$$

Тем самым доказано, что

угол θ в геометрии Минковского между прямыми

$$y = k_1x + b_1, \quad y = k_2x + b_2$$

вычисляется по формуле

$$\operatorname{th}\theta = \frac{k_2-k_1}{k_2+k_1}. \tag{5}$$

Замечание 2. Последнюю формулу мы могли бы принять за определение угла θ. Этот путь был бы, конечно, самым простым. Однако геометрический смысл угла был бы при этом совершенно потерян.

Внимательный читатель, без сомнения, уже заметил, что наше определение угла пригодно не для любых прямых. Действительно, кривая (4) является ветвью окружности, квадрат R^2 радиуса которой положителен (т. е. является ветвью окружности вещественного радиуса R). Поэтому для любой ее точки M прямая OM пространственноподобна. Следовательно, наше определение угла пригодно только для пространственноподобных прямых.

Но для окружности мнимого радиуса iR параметрические уравнения некоторой ее ветви имеют вид

$$X = R\operatorname{sh}\theta,$$

$$Y = R\operatorname{ch}\theta,$$

и для любой точки M этой ветви прямая OM времяподобна. Поэтому, поступая, как и выше, мы примем параметр θ за угол от прямой OM к оси ординат Oy, а затем определим *угол от прямой OM_1 к прямой OM_2* формулой

$$\theta = \theta_1 - \theta_2$$

(обратим внимание на перемену ролей точек M_1 и M_2). Тем самым угол будет определен и для времяподобных прямых. Ясно, что он также будет равен удвоенной площади соответствующего гиперболического сектора. Формула (5) для него также останется справедливой.

Для прямых, одна из которых времяподобна, а другая пространственноподобна, угол не определяется (формула (5) дает в этом случае для θ комплексное значение).

Имея в своем распоряжении понятия длины и угла, мы можем теперь развивать геометрию Минковского сколь угодно далеко. Мы этого делать не будем. В следующем пункте мы осветим аналогию между геометриями Евклида и Минковского с другой, совершенно неожиданной стороны.

5. Комплексная евклидова геометрия

Как уже отмечалось (замечание 3 п. 4 § 3 гл. 2), построение евклидовой геометрии возможно и над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. В этой геометрии имеет смысл понятие *расстояния* d между любыми точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, определяющегося обычной формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Однако получающаяся геометрия малоудовлетворительна, поскольку это расстояние может быть любым комплексным числом (и к тому же определенным только с точностью до знака) и может быть равно нулю даже в том случае, если M_1 и M_2 различны. По этой причине *угол* между двумя прямыми (также определяемый по обычной формуле) оказывается не всегда существующим (и, вообще говоря, представляет собой комплексное число). Правда, с аналогичными неприятностями мы уже встречались в геометрии Минковского, но ввиду возможности физической интерпретации этой геометрии нам приходилось с ними мириться. В то же время комплексная евклидова геометрия появляется лишь в порядке не слишком глубокого обобщения и никаких интересных приложений и интерпретаций даже внутри математики (не говоря уже о физике) не имеет. Поэтому разбираться в ее сложностях в принципе не очень интересно. В крайнем случае это было бы оправдано, если бы теоремы этой геометрии оказались в достаточной мере красивы и изящны. Однако на самом деле все обстоит как раз

наоборот (это общее правило: неудачная математическая теория, не имеющая приложений, никогда не отличается изяществом и красотой). По всем этим причинам комплексную евклидову геометрию мы выше и не рассматривали.

Иначе дело обстоит, конечно, для *евклидовой вещественно-комплексной геометрии* (п. 5 § 3 гл. 2), на множестве вещественных точек которой имеет место обычная евклидова геометрия. Однако эта геометрия имеет лишь вспомогательное значение: она служит для удобного описания феноменов вещественной геометрии, которые трудно описать, не выходя в «мнимую область». Ее группа автоморфизмов по существу совпадает с группой автоморфизмов (ортогональных преобразований) вещественной евклидовой геометрии, и отличие между этими геометриями состоит только в том, что первая имеет «больше» точек.

Заметим, что «вещественно-комплексный» вариант возможен для любой вещественной геометрии. Можно говорить, например, о *вещественно-комплексной геометрии Галилея*, *вещественно-комплексной геометрии Минковского* и даже о *вещественно-комплексной конформной геометрии*.

Переход от евклидовой комплексной геометрии к евклидовой вещественно-комплексной геометрии можно описать также следующим образом (ср. п. 5 § 1 гл. 4). Мы выбираем в комплексной плоскости $\mathfrak{M}$ вещественную плоскость $\mathfrak{M}^{\text{вещ}}$, характеризующуюся требованием вещественности координат всех ее точек (по отношению к данной координатной системе), и ограничиваемся рассмотрением только тех преобразований, которые эту вещественную плоскость переводят в себя.

Чтобы получить затем вещественную геометрию, остается откинуть мнимые точки.

Таким образом, вещественная евклидова геометрия получается из комплексной в два этапа: на первом этапе мы, оставляя неизменным множество точек, сокращаем группу до группы всех вещественных преобразований, а на втором — сокращаем множество точек до множества, состоящего из точек, все координаты которых вещественны.

Поскольку каждая линия в вещественной плоскости $\mathfrak{M}^{\text{вещ}}$ получается сечением соответствующей линии в комплексной плоскости $\mathfrak{M}$ плоскостью $\mathfrak{M}^{\text{вещ}}$, иногда говорят, что вещественная евклидова геометрия является *сечением* комплексной евклидовой геометрии, получающимся наложением условий

«x вещественно», «y вещественно».

Другое сечение комплексной евклидовой геометрии мы получим, наложив на координаты x, y условия

«x вещественно», «y чисто мнимо».

Множество всех точек (x, y), координаты которых удовлетворяют этим условиям, мы обозначим через $\mathfrak{M}^{\text{м}}$. Каждая точка

этого множества характеризуется двумя вещественными координатами X, Y, связанными с координатами x, y соотношениями

$$x = X,$$
$$y = iY.$$

Таким образом, множество $\mathfrak{M}^{\text{M}}$ мы также можем рассматривать как вещественную плоскость (с координатами X, Y).

Преобразование

$$\begin{aligned} x' &= a_1^1 x + a_2^1 y + b^1, \\ y' &= a_1^2 x + a_2^2 y + b^2 \end{aligned} \tag{1}$$

тогда и только тогда переводит каждую точку из $\mathfrak{M}^{\text{M}}$ снова в точку из $\mathfrak{M}^{\text{M}}$, когда для любых вещественных чисел X и Y числа

$$a_1^1 X + i a_2^1 Y + b^1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{i}\left(a_1^2 X + i a_2^2 Y + b^2\right)$$

также вещественны. Очевидно, что это имеет место тогда и только тогда, когда числа a_1^1, a_2^2 и b^1 вещественны, а числа a_2^1, a_1^2 и b^1 чисто мнимы. Мы положим

$$a_1^1 = A_1^1, \quad a_2^1 = iA_2^1, \quad b^1 = B^1,$$
$$a_1^2 = iA_1^2, \quad a_2^2 = A_2^2, \quad b^2 = iB^2.$$

Тогда условия

$$(a_1^1)^2 + (a_2^1)^2 = 1, \quad a_1^1 a_1^2 + a_2^1 a_2^2 = 0, \quad (a_1^2)^2 + (a_2^2)^2 = 1$$

ортогональности преобразования (1) перепишутся в следующем виде:

$$(A_1^1)^2 - (A_2^1)^2 = 1, \quad A_1^1 A_1^2 + A_2^1 A_2^2 = 0, \quad -(A_1^2)^2 + (A_2^2)^2 = 1. \tag{2}$$

Мы найдем общее решение этих уравнений при дополнительном предположении

$$A_1^1 > 0, \quad A_2^2 > 0. \tag{3}$$

Таким образом, мы несколько сократим интересующую нас группу. Это сокращение совершенно несущественно, и от геометрии с сокращенной группой мы всегда без особого труда можем вернуться к геометрии с полной группой.

Мы будем искать коэффициент A_1^1 в виде

$$A_1^1 = \frac{1}{2}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right),$$

где μ — некоторый положительный параметр. Подставляя это выражение в первое из уравнений (2), мы немедленно получим, что

$$(A_2^1)^2 = \frac{1}{4}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2.$$

Заменяя в случае необходимости μ на $1/\mu$, мы можем общее решение этого уравнения записать в следующем виде:

$$A_2^1 = \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right).$$

Аналогично, общее решение третьего из уравнений (2) имеет вид

$$A_1^2 = \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right), \quad A_2^2 = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right),$$

где λ — некоторый положительный параметр.

Подставляя эти выражения во второе уравнение (2), мы после тривиальных преобразований получим, что

$$\lambda = \frac{1}{\mu}.$$

Заметив, что преобразование, индуцированное на плоскости $\mathfrak{M}^{\text{M}}$ преобразованием (1), имеет в координатах X, Y вид

$$X' = A_1^1 X - A_2^1 Y + B^1,$$
$$Y' = A_1^2 X + A_2^2 Y + B^2,$$

мы окончательно получаем (полагая $B^1 = X_0$ и $B^2 = Y_0$), что

$$X' = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) X + \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) Y + X_0,$$
$$Y' = \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) X + \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) Y + Y_0.$$

Поскольку эти формулы совпадают с формулами, выражающими преобразование Лоренца в физических координатах (см. п. 4), мы видим, следовательно, что

сечением евклидовой комплексной геометрии, получающимся наложением условий

«x вещественно», «y чисто мнимо»,

(*а также условий* (3)) *является геометрия Минковского.*

Таким образом,

как евклидова геометрия, так и геометрия Минковского (псевдоевклидова геометрия) являются сечениями комплексной евклидовой геометрии.

В частности, отсюда вытекает, что

подстановка $y \mapsto iy$ переводит формулы евклидовой геометрии в формулы геометрии Минковского.

Последнее обстоятельство читатель, возможно, уже давно заметил. Теперь же он знает и объяснение этому.

Обратим внимание на то, что установленная связь между евклидовой геометрией и геометрией Минковского позволяет нам почти автоматически получать теоремы геометрии Минковского из соответствующих евклидовых теорем.

6. Унитарная геометрия

Вернемся теперь снова к задаче «разумного» обобщения евклидовой геометрии на комплексный случай. Как мы видели, «прямолинейное» обобщение, приводящее к комплексной евклидовой геометрии, по существу не достигает цели. Оказывается, что более удовлетворительная геометрия получается, если мы наложим на коэффициенты преобразования (1) п. 5 следующие условия, сводящиеся в вещественном случае к тем же соотношениям ортогональности:

$$a_1^1\bar{a}_1^1 + a_2^1\bar{a}_2^1 = 1, \qquad a_1^1\bar{a}_1^2 + a_2^1\bar{a}_2^2 = 0, \qquad a_1^2\bar{a}_1^2 + a_2^2\bar{a}_2^2 = 1. \quad (1)$$

Здесь, конечно, необходимо в первую очередь доказать, что преобразования, коэффициенты которых удовлетворяют этим условиям, образуют группу. Мы докажем сначала, что группу составляют всевозможные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

элементы которых удовлетворяют условиям (1).

Определение 1. Матрицы (2), элементы которых удовлетворяют условиям (1), называются *унитарными матрицами.*

Полагая

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1^1 & \bar{a}_2^1 \\ \bar{a}_1^2 & \bar{a}_2^2 \end{pmatrix},$$

мы можем условия (1) переписать в следующем виде:

$$A\bar{A}^{\mathrm{T}} = E. \quad (3)$$

Перейдя в этом соотношении к определителям, мы немедленно получим равенство

$$|A| \cdot \overline{|A|} = 1,$$

означающее, что

определитель унитарной матрицы является комплексным числом, по модулю равным единице (и потому отличным от нуля).

Умножив соотношение (3) на матрицу A^{-1}, получаем

$$A^{-1} = \bar{A}^{\mathrm{T}}.$$

Таким образом,

матрицей, обратной к унитарной матрице A, является матрица $\bar{A}^{\mathrm{T}}$.

Поэтому

для любой унитарной матрицы A имеет место соотношение

$$\bar{A}^{\mathrm{T}} A = E.$$

Поскольку $A=\overline{(\overline{A}^{\mathrm{T}})}^{\mathrm{T}}$, мы можем это соотношение переписать в следующем виде:

$$\overline{A}^{\mathrm{T}}\,\overline{(\overline{A}^{\mathrm{T}})}^{\mathrm{T}}=E,$$

т. е. в виде

$$A^{-1}\overline{A^{-1}}^{\mathrm{T}}=E,$$

показывающем, что

матрица A^{-1}, обратная к унитарной матрице A, унитарна.

Наконец, если

$$A\overline{A}^{\mathrm{T}}=E,\quad B\overline{B}^{\mathrm{T}}=E,$$

то

$$(AB)\,\overline{(AB)}^{\mathrm{T}}=AB\overline{B}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}}=A\overline{A}^{\mathrm{T}}=E.$$

Следовательно,

произведение AB двух унитарных матриц A и B также является унитарной матрицей.

Заметим, что все сказанное справедливо не только для матриц второго порядка (с которых мы начинали), но и для матриц любого порядка n. Совокупность всех унитарных матриц порядка n принято обозначать символом $U(n)$. Последние два доказанные выше утверждения означают, что

множество $U(n)$ всех унитарных матриц порядка n является группой.

Вернемся теперь к преобразованиям (1) п. 5, коэффициенты которых удовлетворяют соотношениям (1). В матричном виде эти преобразования записываются формулой

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где A — произвольная унитарная матрица.

Из того, что унитарные матрицы образуют группу, немедленно вытекает, что

преобразования (6) *составляют группу.*

Соответствующая геометрия называется *унитарной геометрией.*

Без труда проверяется, что в унитарной геометрии фигура, состоящая из двух точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет инвариант, выражающийся формулой

$$(x_2-x_1)(\bar{x}_2-\bar{x}_1)+(y_2-y_1)(\bar{y}_2-\bar{y}_1)=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2.$$

Этот инвариант является неотрицательным вещественным числом и арифметический квадратный корень из него

$$d=\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}$$

называется (*унитарным*) *расстоянием* между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Это расстояние равно нулю тогда и только тогда, когда точки M_1 и M_2 совпадают. Поэтому можно ожидать, что унитарная геометрия и является искомым «разумным» обобщением евклидовой геометрии на комплексный случай. Оказывается, что это действительно так: во всяком случае, многие утверждения евклидовой геометрии естественным образом переносятся в унитарную геометрию, и получающаяся теория не только красива и изящна, но и имеет многочисленные применения. К сожалению, у нас здесь нет ни места, ни времени для более детального ознакомления с этой замечательной геометрией.

Отметим только, что унитарная геометрия тоже «не без греха»: окружности в ней выражаются уравнениями вида

$$|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 = R^2$$

и потому не являются алгебраическими линиями. Это обстоятельство, кажущееся на первый взгляд малосущественным, на самом деле приводит часто к серьезным осложнениям (или, если хотите,— к интересной специфике унитарной геометрии, резко отличающей ее от евклидовой).

Накладывая на унитарную геометрию ограничения

«x вещественно», «y вещественно»,

мы получаем, очевидно, евклидову геометрию. Интересно отметить, что ограничения

«x вещественно», «y чисто мнимо»

также приводят к евклидовой геометрии.

7. Геометрия Пуанкаре — Лобачевского

В соответствии с общими принципами п. 1 каждая подгруппа группы Conf определяет на конформной плоскости некоторую геометрию, в которой имеет смысл понятие окружности.

Примером такой геометрии является специальная конформная геометрия с группой Conf^+.

Другой пример мы получим, зафиксировав на конформной плоскости некоторую окружность и рассмотрев подгруппу группы Conf (или группы Conf^+), состоящую из всех конформных преобразований, переводящих эту окружность в себя.

Ясно, что для любых двух окружностей получающиеся таким образом геометрии изоморфны. Поэтому достаточно ограничиться некоторой одной окружностью. В качестве такой окружности мы выберем вещественную ось $y = 0$ на стандартной конформной плоскости $\mathbb{C}^+$ (напомним, что $z = x + iy$). Кроме того, мы ограничимся лишь преобразованиями из группы Conf^+. Соответствующая геометрия называется *геометрией Пуанкаре*.

По определению, группой автоморфизмов геометрии Пуанкаре является подгруппа Conf_0^+ группы Conf^+, состоящая из

всех дробно-линейных преобразований

$$z' = \frac{az+b}{cz+d},$$

переводящих прямую $y=0$ в себя, т. е. обладающих тем свойством, что для любого вещественного z число z' вещественно.

Полагая $z=0$, мы видим, что число b/d должно быть вещественным, а полагая $z=\pm 1$,— что вещественными должны быть и числа $(\pm a+b)/(\pm c+d)$. Отсюда непосредственно вытекает, что коэффициенты a, b, c, d должны быть пропорциональны вещественным числам. Ясно, что это необходимое условие также и достаточно. Сокращая коэффициенты на общий множитель, мы получаем, таким образом, что

любое преобразование из группы Conf_0^+ *имеет вид*

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{1}$$

где a, b, c, d — *такие вещественные числа, что* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Нормируя коэффициенты a, b, c, d, мы можем добиться того, чтобы последний определитель был равен ± 1. Ясно, что

совокупность Conf_0^{++} *всех преобразований* (1), *для которых*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1,$$

является подгруппой группы Conf_0^+.

Геометрически преобразования из группы Conf_0^{++} характеризуются тем, что они сохраняют ориентацию вещественной оси.

Оказывается целесообразным вместо геометрии с группой Conf_0^+ изучать геометрию с группой Conf_0^{++}, устроенную несколько проще. Эти две геометрии настолько тесно связаны, что обратный переход от геометрии с группой Conf_0^{++} к геометрии с группой Conf_0^+ никаких затруднений не вызывает.

Каждое преобразование из группы Conf_0^{++} переводит точку $z = x+iy$ в точку $z' = x'+iy'$, для которой

$$x' = \frac{(ax+b)(cx+d)+acy^2}{(cx+d)^2+(cy)^2}, \qquad y' = \frac{y}{(cx+d)^2+(cy)^2}.$$

Следовательно, если $y>0$, то $y'>0$, а если $y<0$, то $y'<0$.

Это показывает, что геометрия с группой Conf_0^{++} в определенном смысле распадается на две геометрии, «областями действия» которых являются «верхняя полуплоскость» $y>0$ и «нижняя полуплоскость» $y<0$. Эти две геометрии очевидным образом изоморфны, и потому достаточно ограничиться изучением лишь геометрии точек верхней полуплоскости. Эта геометрия называется *геометрией Пуанкаре на верхней полуплоскости.*

В связи с этим верхнюю полуплоскость $y > 0$ часто называют *плоскостью Пуанкаре*. Она обозначается символом $\mathbb{H}^+$.

От каждой окружности из $\mathbb{C}^+$ в верхней полуплоскости $\mathbb{H}^+$ остается, вообще говоря, одна дуга. Точнее, возможны следующие четыре случая:

1) остается вся окружность Σ;

2) остается вся окружность, за исключением одной точки (случай, когда окружность Σ касается вещественной оси);

3) остается полуокружность (случай, когда окружность Σ ортогональна вещественной оси);

4) остается дуга окружности, не являющаяся полуокружностью (случай, когда окружность Σ образует с вещественной осью угол $\neq \pi/2$).

Полуокружности, ортогональные вещественной оси (случай 3), называются *прямыми* геометрии Пуанкаре. К ним принадлежат, в частности, евклидовы полупрямые, ортогональные вещественной оси (т. е. «вертикальные» полупрямые, параллельные мнимой оси $x = 0$). Ясно, что

через любые две различные точки полуплоскости $\mathbb{H}^+$ проходит точно одна прямая.

Это свойство и оправдывает термин «прямая» в применении к этим полуокружностям.

Поскольку прямая в геометрии Пуанкаре является незамкнутой линией, направление на ней однозначно характеризуется двумя точками. Прямую, проходящую через точки z_1, z_2 и ориентированную в направлении от точки z_1 к точке z_2, мы будем обозначать символом $[z_1, z_2]$.

Прямая $[z_1, z_2]$ пересекает вещественную ось $y = 0$ в двух точках x_1 и x_2 (одной из этих точек может быть точка ∞). Предполагая, что эти точки занумерованы так, что точка x_1 предшествует точке z_1 на ориентированной прямой $[z_1, z_2]$, рассмотрим двойное отношение точек z_1, z_2, x_1, x_2:

$$W(z_1, z_2) = \frac{z_1 - x_1}{z_2 - x_1} : \frac{z_1 - x_2}{z_2 - x_2}.$$

При произвольном преобразовании из группы Conf_0^{++} точки z_1, z_2 переходят в некоторые точки z_1', z_2', прямая $[z_1, z_2]$ переходит в прямую $[z_1', z_2']$, а точки x_1, x_2 — в точки пересечения x_1', x_2' прямой $[z_1', z_2']$ с вещественной осью. Поэтому, в силу инвариантности двойного отношения,

$$W(z_1', z_2') = W(z_1, z_2).$$

Таким образом,

в геометрии Пуанкаре две точки обладают инвариантом $W(z_1, z_2)$.

Это наводит на мысль, что в геометрии Пуанкаре должно иметь смысл какое-то понятие расстояния между точками (являющееся, вообще говоря, некоторой функцией числа W). Чтобы

выяснить этот вопрос, изучим более внимательно инвариант $W(z_1, z_2)$.

Во-первых, ясно, что

число $W(z_1, z_2)$ вещественно.

Действительно, точки z_1, z_2, x_1, x_2 принадлежат, по построению, одной окружности.

Заметим теперь, что в группе Conf_0^{++} существует (и даже не одно) преобразование, переводящее точку x_1 в точку 0, а точку x_2 — в точку ∞. Например, если обе точки x_1 и x_2 конечны, такое преобразование можно задать формулой

$$z' = \frac{1}{x_1 - x_2} \cdot \frac{z - x_1}{z - x_2}.$$

Прямую $[z_1, z_2]$ это преобразование переводит в прямую, проходящую через точки 0 и ∞, т. е. в мнимую ось $x = 0$. Пусть iy_1 и iy_2 — образы точек z_1 и z_2 при этом преобразовании. Поскольку дробно-линейное преобразование сохраняет порядок точек на окружности, точка 0 предшествует точке iy_1 на мнимой оси, точка iy_1 предшествует точке iy_2, а точка iy_2 предшествует точке ∞. Другими словами,

$$0 < y_1 < y_2 < \infty.$$

Поскольку, в силу инвариантности,

$$W(z_1, z_2) = W(iy_1, iy_2) = \frac{iy_1 - 0}{iy_2 - 0} = \frac{y_1}{y_2},$$

отсюда немедленно вытекает, что

вещественное число $W(z_1, z_2)$ положительно и не превосходит единицы:

$$0 < W(z_1, z_2) < 1.$$

Наконец, легко видеть, что

для любых трех точек z_1, z_2, z_3, принадлежащих одной прямой (геометрии Пуанкаре) и расположенных так, что точка z_2 находится между точками z_1 и z_3, имеет место равенство

$$W(z_1, z_3) = W(z_1, z_2)\, W(z_2, z_3).$$

Действительно, условие на расположение точек z_1, z_2, z_3 означает, что ориентированные прямые $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_3]$ и $[z_1, z_3]$ совпадают. Поэтому

$$W(z_1, z_2) = \frac{z_1 - x_1}{z_2 - x_1} : \frac{z_1 - x_2}{z_2 - x_2},$$

$$W(z_2, z_3) = \frac{z_2 - x_1}{z_3 - x_1} : \frac{z_2 - x_2}{z_3 - x_2},$$

$$W(z_1, z_3) = \frac{z_1 - x_1}{z_3 - x_1} : \frac{z_1 - x_2}{z_3 - x_2},$$

где x_1 и x_2 — одни и те же во всех трех формулах. Требуемое соотношение вытекает отсюда непосредственно.

Мы видим, таким образом, что число

$$|z_1, z_2| = -\log W(z_1, z_2)$$

для любых (различных) точек z_1, z_2 верхней полуплоскости положительно (если основание логарифмов больше единицы) и обладает тем свойством, что

$$|z_1, z_3| = |z_1, z_2| + |z_2, z_3|$$

каждый раз, когда точка z_2 принадлежит прямой $[z_1, z_3]$ и расположена между точками z_1 и z_3.

Это показывает, что число $|z_1, z_2|$ обладает одним из важнейших свойств евклидова расстояния. Оно называется *расстоянием Пуанкаре* между точками z_1 и z_2.

Для случая $z_1 = z_2$, мы, естественно, полагаем

$$|z_1, z_1| = 0.$$

Тогда расстояние $|z_1, z_2|$ будет определено для любой пары z_1, z_2 точек полуплоскости $\mathbb{H}^+$ и будет равно нулю тогда и только тогда, когда эти точки совпадают.

Расстояние $|z_1, z_2|$, очевидно, симметрично:

$$|z_1, z_2| = |z_2, z_1|,$$

поскольку при перестановке точек z_1, z_2 переставляются также и точки x_1, x_2.

Кроме того, можно показать, что оно удовлетворяет неравенству треугольника, т. е.

$$|z_1, z_3| \leqslant |z_1, z_2| + |z_2, z_3|$$

для любых трех точек z_1, z_2, z_3.

Задание. Докажите неравенство треугольника для расстояния Пуанкаре.

Заметим, что расстояние Пуанкаре определено только с точностью до множителя (зависящего от основания логарифмов). Чтобы его фиксировать, нужно, как и в евклидовой геометрии, выбрать эталон длины, т. е. отрезок, длина которого принимается за единицу.

При приближении точки z_2 по прямой $[z_1, z_2]$ к точке x_2 расстояние $|z_1, z_2|$ стремится, очевидно, к бесконечности. Аналогично, оно стремится к бесконечности и при $z_1 \to x_1$. Таким образом, точки x_1 и x_2 мы можем рассматривать как *бесконечно удаленные точки* прямой $[z_1, z_2]$.

Обратим внимание на то, что, в отличие от евклидовой геометрии, прямые в геометрии Пуанкаре имеют, таким образом, две различные бесконечно удаленные точки, которые можно условно называть «левой» и «правой». Для вертикальных полупрямых одной из этих точек является конечная точка вещественной оси, а другой — точка ∞.

В евклидовой геометрии параллельные прямые можно рассматривать как прямые, имеющие общую бесконечно удаленную

(несобственную) точку. По аналогии мы будем две прямые плоскости Пуанкаре называть *параллельными*, если они имеют общую бесконечно удаленную точку. Поскольку прямая имеет в геометрии Пуанкаре две бесконечно удаленные точки, через каждую точку, не принадлежащую прямой, проходят две прямые, параллельные данной: «левая» и «правая». Любая прямая, лежащая «между» этими параллельными прямыми, не пересекает данной прямой.

Читатель, знакомый с геометрией Лобачевского, немедленно обнаружит в этом аксиому параллельности Лобачевского. Более того, без труда проверяется, что все аксиомы геометрии Лобачевского выполнены в геометрии Пуанкаре (об этих аксиомах см. дополнение к § 3 гл. 2). Это означает, что

геометрия Пуанкаре является одной из интерпретаций геометрии Лобачевского.

Упражнение. Проверьте аксиомы геометрии Лобачевского в геометрии Пуанкаре.

Поэтому обычно термин «геометрия Пуанкаре» не употребляется: предпочитают говорить об *интерпретации Пуанкаре геометрии Лобачевского.*

Таким образом, в интерпретации Пуанкаре

точками плоскости Лобачевского считаются, по определению, точки верхней полуплоскости $\mathbb{H}^+$,

прямыми — полуокружности, ортогональные оси $y = 0$,

движениями — преобразования из группы Conf_0^{++}.

Замечательным свойством интерпретации Пуанкаре является тот факт, что *углы между прямыми в этой интерпретации совпадают с обычными евклидовыми углами* (между окружностями).

Как уже отмечалось, интерпретацию Пуанкаре необязательно строить в верхней полуплоскости: можно взять любую область в $\mathbb{C}^+$, ограниченную окружностью, например, *единичный круг*

$$|z| < 1,$$

ограниченный единичной окружностью $|z| = 1$. Соответствующая интерпретация называется *интерпретацией Пуанкаре в единичном круге.* В этой интерпретации прямыми являются полуокружности, ортогональные единичной окружности.

Эту интерпретацию мы по существу уже рассматривали в дополнении к § 3 гл. 4. Теперь мы, во-первых, можем указать, как измерять длины отрезков в этой интерпретации (длина отрезка с концами в точках z_1 и z_2 равна логарифму двойного отношения этих точек и точек пересечения с единичной окружностью окружности, проходящей через точки z_1 и z_2 и ортогональной единичной окружности), а во-вторых, можем описать все движения: ими будут сохраняющие ориентации конформные преобразования, переводящие единичный круг в себя.

Найдем явные формулы для этих движений.

Пусть сохраняющее ориентации конформное преобразование переводит в себя единичный круг. Рассмотрим точку z_0 единичного круга, переходящую при этом преобразовании в центр 0 круга. Ясно, что точка $1/\bar{z}_0$, симметричная точке z_0 относительно единичной окружности, переходит при этом преобразовании в точку ∞, симметричную точке 0. Действительно, симметричная точка характеризуется (см. п. 1 § 3) тем, что любая окружность, проходящая через точку z_0 и ортогональная единичной окружности, проходит и через точку $1/\bar{z}_0$. Поэтому любое конформное преобразование, переводящее в себя единичную окружность, переводит симметричные точки в симметричные.

Но ясно, что любое сохраняющее ориентации конформное преобразование, переводящее точку z_0 в точку 0, а точку $1/\bar{z}$ — в точку ∞, выражается формулой

$$z' = a\,\frac{z - z_0}{z - \dfrac{1}{\bar{z}}},$$

т. е. формулой

$$z' = (-a\bar{z}_0)\,\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \tag{2}$$

где a — произвольное число.

Условие, что конформное преобразование (2) переводит единичную окружность в единичную, т. е. условие, что $|z'| = 1$ при $|z| = 1$, накладывает некоторые ограничения на число a. Действительно, при $|z| = 1$

$$|1 - \bar{z}_0 z| = \left|\frac{1}{z} - \bar{z}_0\right| = |\bar{z} - \bar{z}_0| = |z - z_0|.$$

Поэтому $|z'| = 1$ при $|z| = 1$ тогда и только тогда, когда $|a\bar{z}_0| = 1$. Полагая $-a\bar{z}_0 = e^{i\theta}$, мы получаем, что

любое сохраняющее ориентации конформное преобразование, переводящее единичный круг в себя, имеет вид

$$z' = e^{i\theta}\,\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

где $|z_0| < 1$, *а* θ *произвольно.*

У нас здесь нет ни времени, ни места подробно изучать геометрию Пуанкаре — Лобачевского. Мы ограничимся лишь тем, что охарактеризуем линии, изображающиеся евклидовыми окружностями (или, точнее, их дугами).

Как выше было отмечено, эти линии принадлежат к четырем различным типам 1)—4). Линии типа 3) мы уже рассмотрели: это прямые геометрии Пуанкаре. Займемся поэтому линиями оставшихся типов 1), 2) и 4).

Рассмотрим сначала линии типа 1) (окружности, целиком лежащие в верхней полуплоскости). Окружности, ортогонально пересекающие такую окружность Σ и ортогональные вещественной оси $y=0$, составляют, очевидно, пучок (являющийся пересечением гиперболической связки окружностей, ортогональных окружности Σ, и гиперболической связки окружностей, ортогональных вещественной оси). Этому пучку принадлежит, в частности, вертикальная прямая, проходящая через евклидов центр окружности Σ. Поскольку эта прямая пересекает, как нетрудно видеть, любую другую окружность пучка, этот пучок является эллиптическим пучком, и потому все его окружности проходят через две фиксированные точки. Поскольку линией центров этого пучка является, очевидно, вещественная ось, эти точки симметричны относительно этой оси, и потому одна (и только одна) из них лежит в верхней полуплоскости. Следовательно, переходя от окружностей к соответствующим полуокружностям (прямым плоскости Пуанкаре), мы получаем, что

все прямые геометрии Пуанкаре, ортогональные окружности Σ, проходят через одну точку z_0 верхней полуплоскости.

Эта точка называется *центром Пуанкаре* окружности Σ. Она расположена на той же вертикальной прямой, что и евклидов центр этой окружности, но ниже его (ближе к вещественной оси).

В евклидовой геометрии окружность с центром в точке A может быть определена как линия, ортогонально секущая все прямые, проходящие через точку A. Принимая то же определение окружности и в геометрии Пуанкаре, мы получаем, следовательно, что

окружностями геометрии Пуанкаре являются евклидовы окружности, целиком расположенные в верхней полуплоскости.

Однако при этом

центром окружности в геометрии Пуанкаре является ее центр Пуанкаре (а не евклидов центр).

Теперь естественно возникает вопрос, является ли окружность геометрии Пуанкаре геометрическим местом точек, равноудаленных от ее центра? Ответ оказывается утвердительным, т. е.

линия на плоскости Пуанкаре тогда и только тогда является окружностью с центром z_0, когда любая ее точка удовлетворяет уравнению

$$|z_0, z| = r,$$

где r — некоторое число (называемое радиусом Пуанкаре этой окружности).

Это утверждение удобнее доказывать в интерпретации не на верхней полуплоскости, а в единичном круге. При этом, поскольку соответствующим неевклидовым движением (конформным преобразованием) любую точку круга можно перевести в

его центр 0, мы без ограничения общности можем предполагать, что $z_0 = 0$.

Таким образом, для доказательства нашего утверждения достаточно доказать, что

геометрическое место точек z единичного круга, удовлетворяющих уравнению

$$|0, z| = r,$$

представляет собой окружность с центром в точке 0 (*некоторого евклидова радиуса* $R < 1$).

С этой целью мы заметим, что для любой точки $z \neq 0$ единичного круга прямой Пуанкаре, проходящей через точки 0 и z, является, очевидно, обыкновенная евклидова прямая. Поэтому эта прямая пересекает единичную окружность в точках $\frac{z}{|z|}$ и $-\frac{z}{|z|}$ и, следовательно, по определению,

$$|0, z| = -\log\left(\frac{0 - \frac{z}{|z|}}{z - \frac{z}{|z|}} : \frac{0 + \frac{z}{|z|}}{z + \frac{z}{|z|}}\right) = \log\frac{1 - |z|}{1 + |z|}.$$

Таким образом, соотношение $|0, z| = r$ равносильно соотношению $|z| = R$, где $R = (k^r - 1)/(k^r + 1)$ (здесь k — основание логарифмов). Это полностью доказывает наше утверждение.

Окружности типа 2) (касающиеся вещественной оси) называются в геометрии Пуанкаре *орициклами*. Заметим, что орициклом является, в частности, любая прямая $y = y_0$, параллельная вещественной оси (она касается оси в точке ∞).

Пучок прямых геометрии Пуанкаре, ортогональных орициклу, является, очевидно, параболическим пучком с центром в точке, в которой орицикл касается вещественной оси. Это означает, что

орицикл, касающийся вещественной оси в точке x_0, можно рассматривать как окружность с центром Пуанкаре в точке x_0.

В этом отношении орициклы аналогичны прямым на евклидовой плоскости (которые можно рассматривать как окружности с несобственными центрами).

Пусть Σ — окружность, проходящая через точки z_0, z_1, z_2. Оставляя точки z_1, z_2 неподвижными, будем придвигать точку z_0 к вещественной оси (например, двигая ее вертикально вниз). В пределе получится, очевидно, орицикл. Таким образом, можно сказать, что орициклы являются предельными положениями окружностей. На этом основании они называются также *предельными линиями.*

Аналогичными предельными линиями на евклидовой плоскости являются прямые.

Орициклы обладают многими замечательными свойствами, но у нас нет возможности их здесь изучать.

Дуги окружностей типа 4) (пересекающие вещественную ось под углом $\neq \pi/2$) называются *эквидистантами*. Это название объясняется тем, что

геометрическое место точек плоскости Пуанкаре, равноудаленных от некоторой прямой, состоит из двух эквидистант, проходящих через бесконечно удаленные точки этой прямой.

В этой формулировке под *расстоянием от точки до прямой* понимается, как и в евклидовой геометрии, длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую.

Поскольку неевклидовым движением любую прямую мы можем перевести в любую другую прямую, нам достаточно доказать это утверждение лишь для случая, когда данная прямая является мнимой осью

$$x = 0.$$

Перпендикулярами к этой прямой будут, очевидно, всевозможные полуокружности с центром в точке 0. Такая полуокружность, проходящая через точку z, имеет радиус $|z|$ и потому пересекает мнимую ось в точке $i|z|$, а вещественную ось — в точках $\pm|z|$. Следовательно, по определению, расстояние от точки z до прямой $x = 0$ равно

$$\left|\log\left(\frac{z-|z|}{i|z|-|z|} : \frac{z+|z|}{i|z|+|z|}\right)\right| = \left|\log\left(\frac{z-|z|}{z+|z|}\, i\right)\right|.$$

Поэтому условие, что точка z находится от прямой $x = 0$ на данном расстоянии r, выражается формулой

$$\left|\log\left(\frac{z-|z|}{z+|z|}\, i\right)\right| = r,$$

т. е. формулой

$$\frac{z-|z|}{z+|z|} = -ik^{\pm r},$$

где k — основание логарифмов. Полагая

$$e^{i\theta} = \frac{1+ik^r}{1-ik^r},$$

мы можем это условие записать в следующем виде:

$$z = e^{\pm i\theta}|z|,$$

показывающем, что точки z, удаленные от прямой $x = 0$ на расстояние r, расположены на двух лучах, исходящих из точки 0 и образующих с вещественной осью углы $\pm\theta$.

Для завершения доказательства остается заметить, что эти лучи и являются дугами окружностей, проходящих через бесконечно удаленные точки 0 и ∞ прямой $x = 0$.

Прямая, от которой равноудалены точки данной эквидистанты, называется ее *базой*.

В соответствии с тем, что существуют три типа пучков окружностей — эллиптические, параболические и гиперболические,— на плоскости Пуанкаре можно различать три типа пучков прямых. Пучки первого (эллиптического) типа состоят из всех прямых геометрии Пуанкаре, проходящих через данную точку z_0 (*центр* пучка). Пучки второго (параболического) типа состоят из всех прямых, проходящих через данную бесконечно удаленную точку x_0, т. е. из всех прямых, параллельных некоторой данной прямой. Наконец, пучки третьего (гиперболического) типа состоят из всех прямых, ортогональных (т. е. перпендикулярных) некоторой данной прямой (*базе* пучка). (На евклидовой плоскости последние два типа пучков совпадают, на плоскости Пуанкаре они различны.)

Выше мы доказали, что любая окружность ортогонально сечет все прямые пучка, центр которого совпадает с центром окружности. Аналогично можно показать, что

любой орицикл является линией, ортогонально секущей прямые некоторого пучка паралелльных прямых (бесконечно удаленной точкой которых является центр орицикла), а любая эквидистанта является линией, ортогонально секущей прямые некоторого пучка перпендикуляров (базой которого является база эквидистанты).

Задание. Докажите это утверждение.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное множество и G — некоторая его группа преобразований. Для любой точки $A \in \mathfrak{M}$ множество всех точек, которые можно получить из этой точки преобразованиями группы G, называется *орбитой* точки A (по отношению к группе G).

Например, на евклидовой плоскости орбитой точки A по отношению к группе Rot_O вращений вокруг некоторой точки $O \neq A$ является окружность с центром в точке O, проходящая через точку A. Если мы на евклидовой плоскости выберем некоторое направление ω и рассмотрим группу Trans_ω всех параллельных переносов на векторы, параллельные прямым направления ω, то орбитой произвольной точки A по отношению к этой группе будет прямая направления ω, проходящая через точку A.

В геометрии Пуанкаре аналогом группы Rot_O является подгруппа группы Conf_0^{++}, состоящая из всех преобразований, оставляющих на месте данную точку z_0 (такие преобразования естественно называть *неевклидовыми вращениями* вокруг точки z_0). Поскольку все преобразования из этой группы не меняют расстояний Пуанкаре, то орбита произвольной точки z относительно этой группы содержится, очевидно, в окружности с центром Пуанкаре z_0 и радиусом, равным $|z_0, z|$. Но легко видеть, что и обратно, эта орбита содержит всю указанную окружность, поскольку для любых двух точек z_1 и z_2, находящихся от точки z_0 на одном и том же расстоянии, существует неевклидово вра-

щение вокруг точки z_0, переводящее точку z_1 в точку z_2. Действительно, этим вращением будет, как нетрудно видеть, сохраняющее ориентации конформное преобразование, оставляющее на месте точки z_0 и $\bar{z}_0$ и переводящее точку z_1 в точку z_2.

Тем самым доказано, что аналогично евклидовым окружностям

окружности плоскости Пуанкаре с центром в точке z_0 являются орбитами группы неевклидовых вращений вокруг этой точки.

Параллельные переносы на евклидовой плоскости можно определить как движения, относительно которых инвариантно некоторое направление, т. е. некоторая несобственная точка. По аналогии, *переносом* (прилагательное «параллельный» здесь неуместно) *плоскости Пуанкаре* мы будем называть ее движение (преобразование из группы Conf_0^{++}), оставляющее на месте некоторую точку x_0 вещественной оси. Все переносы, оставляющие на месте данную точку x_0, образуют, очевидно, группу (являющуюся аналогом группы Trans_ω). Оказывается, что

орбитами этой группы являются орициклы, имеющие точку x_0 своим центром Пуанкаре.

Задание. Докажите это утверждение.

Параллельные переносы на евклидовой плоскости можно также определить как движения, переводящие в себя некоторую прямую. По аналогии, *сдвигами плоскости Пуанкаре* вдоль некоторой прямой мы будем называть ее движения, переводящие в себя эту прямую. Вообще говоря, сдвиг не является переносом, а перенос — сдвигом. Все сдвиги плоскости Пуанкаре вдоль данной прямой образуют группу (также являющуюся аналогом группы Trans_ω) и

орбитами этой группы являются эквидистанты, базой которых служит данная прямая, а также сама эта прямая.

Задание. Докажите это утверждение.

Резюмируя, мы можем, таким образом, сказать, что

окружности, орициклы, эквидистанты и прямые являются орбитами некоторых групп движений плоскости Пуанкаре.

Отсюда, в частности, следует, что все эти линии обладают *свойством свободной подвижности*, т. е. любой отрезок такой линии можно как угодно двигать по этой линии.