

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	7
<b>Глава 1. Векторное исчисление . . . . .</b>	<b>11</b>
§ 1*. Понятие вектора . . . . .	11
1. Предварительное определение вектора . . . . .	11
2. Отношения эквивалентности . . . . .	13
3. Окончательное определение вектора . . . . .	15
4. Векторы на прямой, на плоскости и в пространстве . . . . .	19
§ 2*. Векторы на прямой . . . . .	21
1. Ориентации прямой . . . . .	21
2. Длина и величина вектора на прямой . . . . .	25
3. Отношение векторов на прямой . . . . .	26
4. Сложение векторов на прямой. Лемма Шаля . . . . .	29
5. Алгебраические свойства линейных операций . . . . .	30
6. Теорема об изоморфизме . . . . .	32
§ 3*. Линейные операции над векторами на плоскости и в пространстве . . . . .	34
1. Определение линейных операций . . . . .	34
2. Алгебраические свойства линейных операций . . . . .	37
3. Линейная зависимость . . . . .	38
4. Геометрический смысл линейной зависимости . . . . .	42
5. Базисы и координаты . . . . .	46
6. Проекции и координаты . . . . .	50
7. Преобразование координат при замене базиса . . . . .	54
Дополнение. Теорема о ранге матрицы . . . . .	58
§ 4*. Ориентации прямой, плоскости и пространства . . . . .	63
1. Понятие ориентации . . . . .	63
2. Правые и левые ориентации . . . . .	67
3. Произведения ориентаций . . . . .	68
4. Стороны прямой на плоскости и плоскости в пространстве . . . . .	70
5. Деформации базисов и ориентации . . . . .	73
6. Резюме . . . . .	79
Дополнение. О понятии угла . . . . .	80
§ 5*. Метрическая теория векторов . . . . .	82
1. Длина вектора и угол между векторами . . . . .	82
2. Скалярное произведение векторов . . . . .	86
3. Применение скалярного умножения к доказательству геометрических теорем . . . . .	88
4. Выражение скалярного произведения в координатах . . . . .	90
5. Ортонормированные базисы . . . . .	94
6. Ортогональные матрицы . . . . .	98
§ 6. Поливекторы . . . . .	105
1. Бивекторы . . . . .	105
2. Линейные операции над бивекторами . . . . .	110
3. Линейная теория бивекторов . . . . .	116
4. Метрическая теория бивекторов . . . . .	121

	5. Триекторы . . . . .	126
	6. Векторное и смешанное произведения . . . . .	133
§ 7.	Линейные операторы . . . . .	135
	1. Отображения и преобразования . . . . .	135
	2. Кольцо линейных операторов . . . . .	138
	3. Описание линейных операторов . . . . .	140
	4. Обратимые линейные операторы . . . . .	145
	5. Операторы, действующие по равенству координат . . . . .	149
	6. Обратимые линейные операторы и ориентации . . . . .	151
	7. Изометричные операторы . . . . .	155
	8. Свойства изометричных операторов . . . . .	157
<b>Глава 2. Метод координат . . . . .</b>		<b>164</b>
§ 1*.	Координаты на прямой, в плоскости и в пространстве . . . . .	164
	1. Аффинные координаты . . . . .	164
	2. Замена аффинных координат . . . . .	169
	3. Деление отрезка в данном отношении . . . . .	172
	4. Прямоугольные координаты . . . . .	173
	5. Полярные, сферические и цилиндрические координаты . . . . .	175
	6. Однородные координаты . . . . .	177
§ 2.	Уравнения линий и поверхностей . . . . .	184
	1. Задание линий и поверхностей уравнениями . . . . .	184
	2. Алгебраические линии . . . . .	187
	3. Параметрические уравнения линий и поверхностей . . . . .	191
§ 3.	Координатно-аксиоматическое построение геометрии . . . . .	195
	1. Основные положения аксиоматического метода . . . . .	195
	2. Аксиоматика евклидовой геометрии . . . . .	198
	3. Аксиоматика аффинной геометрии . . . . .	208
	4. Аффинная геометрия над полем комплексных чисел . . . . .	217
	5. Вещественно-комплексная геометрия . . . . .	221
	Дополнение. Аксиоматика Гильберта . . . . .	226
<b>Глава 3. Линии и поверхности первого порядка . . . . .</b>		<b>239</b>
§ 1*.	Прямая на плоскости . . . . .	239
	1. Прямая как линия первого порядка . . . . .	239
	2. Параметрические и канонические уравнения прямой . . . . .	242
	3. Взаимное расположение прямых на плоскости . . . . .	247
	4. Полуплоскости, на которые прямая разбивает плоскость . . . . .	251
	5. Прямая на евклидовой плоскости . . . . .	253
§ 2*.	Плоскость в пространстве . . . . .	258
	1. Плоскость как поверхность первого порядка . . . . .	258
	2. Параметрические уравнения плоскости . . . . .	260
	3. Взаимное расположение плоскостей в пространстве . . . . .	263
	4. Полупространства, на которые плоскость разбивает пространство . . . . .	266
	5. Плоскость в евклидовом пространстве . . . . .	268
§ 3*.	Прямая в пространстве . . . . .	271
	1. Прямая в аффинном пространстве . . . . .	271
	2. Взаимное расположение прямых и плоскостей . . . . .	275
	3. Прямая в евклидовом пространстве . . . . .	278
	4. Расстояние между двумя прямыми в пространстве . . . . .	282
<b>Глава 4. Геометрии прямых, плоскостей и окружностей . . . . .</b>		<b>290</b>
§ 1.	Геометрия прямых на плоскости . . . . .	290
	1*. Пучки прямых . . . . .	290
	2. Расширенная плоскость . . . . .	294
	3. Полнота и непротиворечивость аксиом геометрии расширенной плоскости . . . . .	298
	4. Координаты на расширенной плоскости . . . . .	302
	5. Проективная плоскость . . . . .	307
	6. Интерпретации проективной геометрии и их применения . . . . .	316

	7. Конфигурационная геометрия . . . . .	322
	Дополнение. Трилинейные координаты . . . . .	326
§ 2.	Геометрия плоскостей в пространстве . . . . .	331
	1*. Пучки плоскостей . . . . .	332
	2*. Связки плоскостей . . . . .	333
	3. Расширенное пространство . . . . .	337
	4. Проективное пространство . . . . .	341
	Дополнение. О геометрии прямых в пространстве . . . . .	346
§ 3.	Геометрия окружностей на плоскости . . . . .	349
	1. Степень точки относительно окружности . . . . .	349
	2. Связки окружностей . . . . .	353
	3. Пучки окружностей . . . . .	362
	4. Пучки как пересечения связок . . . . .	370
	5. Прямые как окружности . . . . .	377
	6. Окружности на вещественно-комплексной плоскости . . . . .	386
	Дополнение. Геометрии параболической и гиперболической связок . . . . .	396
<b>Глава 5. Элементарная теория линий и поверхностей второго порядка . . . . .</b>		<b>398</b>
§ 1*.	Линии второго порядка . . . . .	398
	1. Параболы . . . . .	398
	2. Эллипсы . . . . .	401
	3. Гиперболы . . . . .	411
	4. Уравнения эллипса, параболы и гиперболы в полярных координатах . . . . .	423
§ 2.	Некоторые дополнительные свойства линий второго порядка . . . . .	426
	1. Эллипс, парабола и гипербола как конические сечения . . . . .	426
	2. Взаимное расположение конических сечений и прямых . . . . .	430
	3. Прямые, касающиеся конических сечений . . . . .	436
	4. Семейства софокусных эллипсов и гипербол . . . . .	443
	5. Диаметры конических сечений . . . . .	447
	6. Теоремы Аполлония . . . . .	455
§ 3*.	Поверхности второго порядка . . . . .	460
	1. Эллипсоиды . . . . .	460
	2. Двуполостные гиперboloиды . . . . .	463
	3. Однополостные гиперboloиды . . . . .	466
	4. Прямолинейные образующие однополостного гиперboloида . . . . .	469
	5. Гиперболические параболоиды . . . . .	480
	6. Эллиптические параболоиды . . . . .	488
	7. Конусы второго порядка . . . . .	490
	8. Цилиндры второго порядка . . . . .	496
<b>Глава 6. Общая теория линий второго порядка . . . . .</b>		<b>499</b>
§ 1*.	Классификация линий второго порядка . . . . .	499
	1. Линии второго порядка на евклидовой плоскости . . . . .	499
	2. Инварианты уравнений линий второго порядка . . . . .	509
	3. Определение вида линии второго порядка по инвариантам ее уравнения . . . . .	513
	4. Линии второго порядка на аффинной плоскости. Теорема единственности . . . . .	519
	5. Центры линий второго порядка . . . . .	527
	6. Асимптоты и диаметры линий второго порядка . . . . .	533
	7. Приведение уравнений линий второго порядка к простейшему виду . . . . .	540
	8. Главные направления и диаметры линий второго порядка . . . . .	544
	Дополнение. Классификация поверхностей второго порядка . . . . .	548
§ 2.	Проективная теория линий второго порядка . . . . .	554
	1. Линии второго порядка на аффинно-проективной и проективной плоскостях . . . . .	554
	2. Пересечение прямой и линии второго порядка . . . . .	558

3.	Поляры и полюсы . . . . .	563
	Дополнение. Поляры в пространстве . . . . .	568
4.	Теорема Безу . . . . .	569
	Дополнение. Дифференциально-геометрическое истолкование кратности точки пересечения . . . . .	577
§ 3.	Геометрия линий второго порядка . . . . .	579
1.	Пучки линий второго порядка . . . . .	579
2.	Описание пучков линий второго порядка . . . . .	583
	Дополнение. Еще раз о пучках окружностей . . . . .	593
3.	Линии второго порядка, проходящие через пять точек . . . . .	594
	Дополнение. Поверхности второго порядка, проходящие через девять точек . . . . .	596
4.	Теорема Штурма . . . . .	598
5.	Теорема Паскаля . . . . .	601
6.	Квадратичные пучки прямых . . . . .	603
7.	Фокусы линий второго порядка . . . . .	612
<b>Глава 7. Геометрические преобразования . . . . .</b>		<b>617</b>
§ 1.	Аффинные, проективные и ортогональные преобразования . . . . .	617
1.	Аффинные преобразования . . . . .	617
2.	Линейный оператор, индуцированный аффинным преобразованием . . . . .	621
3.	Общий вид аффинных преобразований . . . . .	628
4.	Проективные преобразования . . . . .	633
5.	Ортогональные преобразования . . . . .	637
§ 2.	Разложение аффинных и ортогональных преобразований в композицию более простых . . . . .	644
1.	Аффинные и ортогональные преобразования прямой . . . . .	644
2.	Разложение аффинных преобразований плоскости и пространства . . . . .	647
3.	Разложение ортогональных преобразований плоскости . . . . .	652
4.	Разложение ортогональных преобразований пространства . . . . .	658
5.	Представление движений пространства с помощью кватернионов . . . . .	665
§ 3.	Конформные преобразования . . . . .	677
1.	Инверсия относительно окружности . . . . .	677
2.	Пополненная плоскость . . . . .	679
3.	Свойства конформных преобразований . . . . .	686
4.	Конформные преобразования и ориентации . . . . .	694
5.	Конформная геометрия . . . . .	704
§ 4.	Группы и геометрии . . . . .	707
1.	Геометрии с данной группой автоморфизмов . . . . .	707
2.	Простейшие геометрии аффинного типа . . . . .	711
3.	Геометрии Галилея и Пуансо . . . . .	718
4.	Геометрия Минковского . . . . .	727
5.	Комплексная евклидова геометрия . . . . .	734
6.	Унитарная геометрия . . . . .	738
7.	Геометрия Пуанкаре — Лобачевского . . . . .	740