# *Лекция 1*

Линейные пространства. — Подпространства. — Пересечение подпространств. — Линейные оболочки. — Сумма подпространств. — Размерность подпространства. — Размерность суммы подпространств. — Размерность линейной оболочки.

В этом семестре мы перенесем результаты семестра I на случай любого $n$. В основном мы будем следовать прежнему плану изложения [1]).

Напомним (см. определение 1 лекции I. 1), что *линейным пространством* (или *линеалом*) над полем $\mathbb{K}$ называется множество $\mathscr{V}$, элементы которого называются *векторами* и в котором определены операция сложения $x, y \longmapsto x + y$ и для любого числа $k \in \mathbb{K}$ операция $x \longmapsto kx$ умножения на это число. При этом требуется, чтобы относительно сложения $\mathscr{V}$ было абелевой группой и чтобы для умножения на числа из $\mathbb{K}$ были выполнены четыре естественные аксиомы.

В таком пространстве имеют смысл понятия линейной комбинации векторов и линейно зависимых или независимых семейств и множеств векторов. Пространство $\mathscr{V}$ называется *конечномерным*, если в нем существует конечный *базис*, т. е. семейство векторов, через которые единственным образом линейно выражается любой вектор из $\mathscr{V}$. Число векторов во всех базисах одно и то же. Оно называется размерностью линеала $\mathscr{V}$ и обозначается символом $\dim \mathscr{V}$.

Пусть $\mathscr{V}$ — произвольное линейное пространство.

***Определение 1.*** Подмножество $\mathscr{P}$ пространства $\mathscr{V}$ называется его *подпространством*, если каждая линейная комбинация $k_1x_1 + \ldots + k_mx_m$ любых векторов $x_1, \ldots, x_m \in \mathscr{P}$ принадлежит $\mathscr{P}$.

Очевидно, что $\mathscr{P}$ тогда и только тогда является подпространством, когда $x + y \in \mathscr{P}$ и $kx \in \mathscr{P}$ для любых векторов $x, y \in \mathscr{P}$ и любого числа $k \in \mathbb{K}$.

---

[1]) См. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1986. Ссылка «см. определение 1 лекции I. 1» означает, что нужно смотреть определение 1 лекции 1 семестра I.

Иначе говоря, тот факт, что $\mathcal{P}$ является подпространством, означает, что соответствия $x, y \mapsto x+y$ и $x \mapsto kx$, где $x, y \in \mathcal{P}$ и $k \in \mathbb{K}$, определяют в $\mathcal{P}$ некоторые операции. Ясно, что относительно этих операций *подпространство $\mathcal{P}$ является линейным пространством.*

Примеры подпространств.

1. В любом линеале $\mathcal{V}$ одноэлементное подмножество $\{0\}$ и все множество $\mathcal{V}$ являются подпространствами. Подпространство $\{0\}$ (обыкновенно обозначаемое просто $0$) называется *нулевым*, а подпространство $\mathcal{V}$ — *тривиальным.*

2. В линеале $\mathbb{K}^n$ для любого $m \leqslant n$ совокупность всех векторов вида $(x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0)$, у которых равны нулю последние $n-m$ координат, является подпространством. Это подпространство естественным образом изоморфно пространству $\mathbb{K}^m$.

3. В линейном пространстве многочленов (или, более общо, любых функций, удовлетворяющих тем или иным условиям) подпространством будет множество всех многочленов (функций), равных нулю в одной или нескольких фиксированных точках.

4. Подпространством будет множество всех многочленов, коэффициенты которых при данных фиксированных степенях равны нулю, а также множество всех четных или всех нечетных многочленов.

***Предложение 1.*** *Пересечение*

$$\mathcal{P} = \bigcap_{\alpha} \mathcal{P}_\alpha$$

*произвольного семейства подпространств $\mathcal{P}_\alpha \subset \mathcal{V}$ является подпространством.*

Доказательство. Если $x, y \in \mathcal{P}$, то $x, y \in \mathcal{P}_\alpha$ для любого $\alpha$, и потому $x+y \in \mathcal{P}_\alpha$, $kx \in \mathcal{P}_\alpha$, и, значит (так как $\alpha$ произвольно), $x+y \in \mathcal{P}$, $kx \in \mathcal{P}$. □

Заметим, что пересечение подпространств не может быть пустым, поскольку любое подпространство содержит нулевой вектор $0$.

Если $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = 0$, то подпространства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ называются *дизъюнктными.*

Несмотря на свою простоту, предложение 1 влечет важные следствия.

Пусть $S$ — произвольное подмножество линеала $\mathcal{V}$.

***Определение 2.*** Подпространство $\mathscr{P} \subset \mathscr{V}$ называется *линейной оболочкой* множества $S$, если $S \subset \mathscr{P}$ и $\mathscr{P}$ является наименьшим подпространством, обладающим этим свойством, т. е. если каждое подпространство $\mathscr{Q}$, для которого $S \subset \mathscr{Q}$, содержит $\mathscr{P}$. Линейная оболочка множества $S$ обозначается символом $[S]$. Она называется также подпространством, *порожденным* множеством $S$.

***Предложение 2.*** *Линейная оболочка* $[S]$ *существует для любого множества* $S \subset \mathscr{V}$. *Ею является пересечение всех подпространств, содержащих* $S$.

Доказательство. Так как в этом пересечении (являющемся, согласно предложению 1, подпространством) участвует каждое подпространство $\mathscr{Q} \supset S$, то оно содержится в $\mathscr{Q}$. С другой стороны, оно, очевидно, содержит $S$. □

В связи с этим доказательством возникает вопрос: имеем ли мы вообще право говорить о пересечении подпространств, содержащих $S$? Почему, собственно, такие подпространства существуют? Формальный ответ состоит в том, что, в соответствии с общими принципами теории множеств, пересечение семейства подмножеств произвольного множества $\mathscr{V}$ определено даже тогда, когда семейство пусто, и является в этом случае, как ни парадоксально, всем $\mathscr{V}$. В нашей же конкретной ситуации дело еще проще, потому что рассматриваемое семейство никогда не пусто. Действительно, одним из подпространств, содержащих $S$, заведомо является все пространство $\mathscr{V}$.

Более наглядное описание линейной оболочки $[S]$ дает следующее предложение:

***Предложение 3.*** *Линейная оболочка* $[S]$ *множества* $S$ *состоит из всевозможных линейных комбинаций*

$$(1) \quad k_1x_1 + \ldots + k_mx_m, \quad x_1, \ldots, x_m \in S, \quad k_1, \ldots, k_m \in \mathrm{K},$$

*векторов из* $S$.

Доказательство. Если $\mathscr{P}$ — подпространство, содержащее $S$, то оно, очевидно, содержит все векторы вида (1). С другой стороны, ясно, что совокупность всех векторов (1) является подпространством, содержащим $S$. □

Из этого предложения следует, что *множество векторов пространства* $\mathscr{V}$ *тогда и только тогда полно, когда оно порождает все* $\mathscr{V}$.

Напомним (см. лекцию I.7), что два множества векторов называются *линейно эквивалентными*, если каждый вектор любого из множеств линейно выражается через векторы другого множества. Ясно, что это равносильно тому, что вектор тогда и только тогда представляет собой линейную комбинацию векторов одного множества, когда он является линейной комбинацией векторов другого множества, т. е., согласно предложению 3, — тому, что *линейные оболочки обоих множеств совпадают* (оба множества порождают одно и то же подпространство).

В отличие от пересечения, объединение подпространств, вообще говоря, подпространством не является. Чтобы получить подпространство, надо от объединения перейти к его линейной оболочке.

***Определение 3.*** *Суммой* $\sum_\alpha \mathcal{P}_\alpha$ произвольного семейства подпространств $\mathcal{P}_\alpha \subset \mathcal{V}$ называется линейная оболочка их объединения:

$$\sum_\alpha \mathcal{P}_\alpha = \left[\bigcup_\alpha \mathcal{P}_\alpha\right].$$

Для двух подпространств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = [\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}].$$

Ясно, что любая линейная комбинация векторов из $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ имеет вид $x + y$, где $x \in \mathcal{P}$, $y \in \mathcal{Q}$. Этим доказано следующее предложение:

***Предложение 4.*** *Сумма $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ подпространств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ состоит из всевозможных векторов вида $x + y$, где $x \in \mathcal{P}$, $y \in \mathcal{Q}$.* □

Аналогичное предложение имеет место, конечно, и для суммы любого семейства подпространств.

Все сказанное выше справедливо для любого — даже бесконечномерного — линеала $\mathcal{V}$. Предположим теперь, что этот линеал конечномерен.

Нам понадобится следующая простая лемма:

***Лемма 1.*** *Если для линейного пространства $\mathcal{V}$ существует такое число $N$, что любые $N$ векторов этого пространства линейно зависимы, то пространство $\mathcal{V}$ конечномерно и*

$$\dim \mathcal{V} < N. \tag{2}$$

Доказательство. При $\mathscr{V} = 0$ доказывать нечего. Если же $\mathscr{V} \neq 0$, то в $\mathscr{V}$ существуют линейно независимые семейства векторов и, согласно условию, каждое такое семейство содержит не более, чем $N$ векторов. Поэтому существуют линейно независимые семейства векторов, состоящие из максимального числа векторов. Поскольку добавление любого вектора к такому семейству делает его линейно зависимым, каждое такое семейство полно (является базисом). Таким образом, в линейном пространстве $\mathscr{V}$ существуют конечные полные семейства векторов, т. е. это пространство конечномерно. Неравенство (2) теперь очевидно. □

***Предложение 5.*** *Каждое подпространство $\mathscr{P}$ произвольного конечномерного линейного пространства $\mathscr{V}$ конечномерно, и его размерность не превосходит размерности пространства $\mathscr{V}$:*

$$\dim \mathscr{P} \leqslant \dim \mathscr{V}. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\dim \mathscr{V} = n$. Тогда любые $n+1$ векторов пространства $\mathscr{V}$ линейно зависимы. В частности, линейно зависимы любые $n+1$ векторов подпространства $\mathscr{P}$. Таким образом, линейное пространство $\mathscr{P}$ удовлетворяет условиям леммы 1 (с $N = n+1$). Значит, оно конечномерно и для его размерности имеет место неравенство (2). Для завершения доказательства остается заметить, что при $N = n+1$ (и $n = \dim \mathscr{V}$) последнее неравенство равносильно неравенству (3). □

Если $\dim \mathscr{P} = n$, то любой базис в $\mathscr{P}$, являясь линейно независимым семейством, состоящим из $n$ векторов, будет базисом и в $\mathscr{V}$. Поэтому $\mathscr{P} = \mathscr{V}$. Если же $\dim \mathscr{P} < n$, то базис в $\mathscr{P}$, имея менее $n$ векторов, не может быть полным семейством в $\mathscr{V}$ и, значит, не порождает $\mathscr{V}$. Поэтому $\mathscr{P} \neq \mathscr{V}$. Таким образом, *подпространство $\mathscr{P} \subset \mathscr{V}$ тогда и только тогда совпадает с $\mathscr{V}$, когда* $\dim \mathscr{P} = \dim \mathscr{V}$.

***Теорема 1*** (о размерности суммы подпространств). *Для любых двух подпространств $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ справедлива формула*

$$\dim (\mathscr{P} + \mathscr{Q}) = \dim \mathscr{P} + \dim \mathscr{Q} - \dim (\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}).$$

Доказательство. Пусть

$$\dim \mathscr{P} = p, \qquad \dim \mathscr{Q} = q, \qquad \dim (\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}) = r.$$

Рассмотрим в $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ произвольный базис $e_1, \ldots, e_r$. Добавляя к этому базису вектор за вектором, мы в конце концов получим некоторый базис

$$e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_{p-r} \tag{4}$$

подпространства $\mathcal{P} \supset \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$. Аналогично, и в подпространстве $\mathcal{Q}$ мы можем построить базис вида

$$e_1, \ldots, e_r, g_1, \ldots, g_{q-r}. \tag{5}$$

Теорема 1 будет, очевидно, доказана, если мы покажем, что $p+q-r$ векторов

$$e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_{p-r}, g_1, \ldots, g_{q-r} \tag{6}$$

составляют базис подпространства $\mathcal{P}+\mathcal{Q}$.

Линейная независимость. Пусть

$$k_1e_1 + \ldots + k_re_r + l_1f_1 + \ldots + l_{p-r}f_{p-r} + \\ + m_1g_1 + \ldots + m_{q-r}g_{q-r} = 0.$$

Полагая

$$e = k_1e_1 + \ldots + k_re_r,$$
$$f = l_1f_1 + \ldots + l_{p-r}f_{p-r},$$
$$g = m_1g_1 + \ldots + m_{q-r}g_{q-r},$$

мы получим такие векторы $e \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, $f \in \mathcal{P}$ и $g \in \mathcal{Q}$, что $e+f+g=0$. Тогда $e+f \in \mathcal{P}$, и потому $g = -(e+f) \in \mathcal{P}$. Значит, $g \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, и, следовательно, вектор $g$ линейно выражается через векторы $e_1, \ldots, e_r$. Но, по условию, вектор $g$ линейно выражается через векторы $g_1, \ldots, g_{p-r}$. Поскольку два различных выражения через базис (5) одного и того же вектора существовать не могут, этим доказано, что оба выражения имеют равные нулю коэффициенты. Таким образом, $m_1 = 0, \ldots, m_{q-r} = 0$, и, значит, $g = 0$.

Но тогда $e+f=0$, и, следовательно (поскольку (4) — базис), $k_1 = 0, \ldots, k_r = 0, l_1 = 0, \ldots, l_{p-r} = 0$. Этим доказано, что векторы (6) линейно независимы.

Полнота. Любой вектор из $\mathcal{P}+\mathcal{Q}$ имеет, как мы знаем, вид $x+y$, где $x \in \mathcal{P}$, $y \in \mathcal{Q}$. Сложив разложение вектора $x$ по базису (4) с разложением вектора $y$ по базису (5), мы, очевидно, получим представление вектора $x+y$ в виде линейной комбинации векторов (6). Следовательно, семейство (6) векторов подпространства $\mathcal{P}+\mathcal{Q}$ полно.

Являясь линейно независимым и полным, семейство (6) представляет собой базис. □

***Следствие 1.*** *Если* $\mathcal{P}+\mathcal{Q}=\mathcal{V}$, *то* $\dim(\mathcal{P}\cap\mathcal{Q})=$ $=p+q-n$.

***Следствие 2.*** *Если* $p+q>n$, *то* $\mathcal{P}\cap\mathcal{Q}\neq 0$. □

Как вычислять размерность подпространства? Ответ на этот вопрос зависит, конечно, от того, каким способом подпространство задано. Поэтому каждый раз, когда нам встретится новый способ задания подпространств, мы будем к этому вопросу возвращаться. Пока же нам известен, по существу, один способ эффективного задания подпространств, а именно как линейной оболочки некоторого конечного множества векторов. Поэтому наш общий вопрос конкретизируется в задачу о вычислении размерности $\dim[S]$ линейной оболочки произвольного (конечного) множества векторов $S$. Этой задачей мы сейчас и займемся.

Пусть $S$ — произвольное конечное множество векторов. Без ограничения общности мы можем считать, что оно содержит отличные от нуля векторы и, следовательно, обладает линейно независимыми подмножествами. В силу конечности числа векторов в $S$, среди этих подмножеств есть *максимальные*, т. е. такие, что от присоединения к ним любого другого вектора из $S$ они превращаются в линейно зависимые множества. Поскольку это возможно только тогда, когда присоединяемый вектор линейно выражается через векторы подмножества, мы получаем, что *любое максимальное линейно независимое подмножество* $S_0$ *множества* $S$ *линейно эквивалентно всему множеству* $S$, т. е. (см. выше) порождает то же подпространство $[S]$. Это означает, что множество $S_0$ полно в $[S]$, а так как оно, кроме того, и линейно независимо, то, следовательно, после произвольного занумерования, оно становится базисом в $[S]$. Итак, *каждое максимальное линейно независимое подсемейство множества* $S$ *является базисом линейной оболочки* $[S]$ *множества* $S$.

Поскольку все базисы любого пространства состоят из одного и того же числа векторов, отсюда, в частности, следует, что *все максимальные линейно независимые подмножества множества* $S$ *состоят из одного и того же числа векторов.*

***Определение 4.*** Число векторов максимального линейно независимого подмножества множества $S$ называется *рангом* множества $S$.

Согласно только что сказанному это определение корректно.

Кроме того, мы видим, что справедливо следующее предложение:

***Предложение 6.*** *Размерность* $\dim[S]$ *линейной оболочки множества векторов* $S$ *равна рангу этого множества.* □

На первый взгляд это предложение представляется малосодержательной тавтологией. На самом деле его содержание весьма глубоко, поскольку оно отождествляет интересующее нас число $\dim[S]$ с неким числом (рангом), для которого существует, хотя бы принципиальная, возможность вычисления в конечное, заранее оцениваемое, число шагов, т. е. которое, как говорят, эффективно вычислимо. Действительно, чтобы вычислить ранг, можно, например, последовательно перебирать все подмножества множества $S$ (а их конечное число!) и для каждого подмножества определять, не будет ли оно линейно независимо (что также осуществляется в конечное число шагов). Таким образом, значение предложения 6 состоит в том, что оно указывает конечную процедуру вычисления размерности подпространств (в случае — подчеркнем, — когда подпространства заданы как линейные оболочки конечных — для эффективности это обязательно! — множеств векторов).

Конечно, за счет разумной организации вычислений объем необходимых вычислений можно существенно уменьшить. Соответствующую методику мы рассмотрим в следующей лекции.